

**PRZYKŁAD** (tarcza sprężysta – metoda różnic skończonych)

Korzystając z metody różnic skończonych, wyznacz wartości funkcji naprężeń Airy'ego w tarczy obciążonej jak na rysunku. Jako punkt początkowy do wyznaczania wartości brzegowych funkcji Airy'ego przyjmij punkt O. Oś styczna lokalnego układu współrzędnych niech będzie skierowana w dół. Wykorzystując symetrię układu, uwzględnij obciążenie tylko prawej połowy tarczy. Wyznacz składowe stanu naprężenia  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  w dwóch węzłach położonych najbliżej środka tarczy.

Wymiary tarczy:

$$L_x = 8 \text{ m}$$

$$L_y = 6 \text{ m}$$

Grubość tarczy:

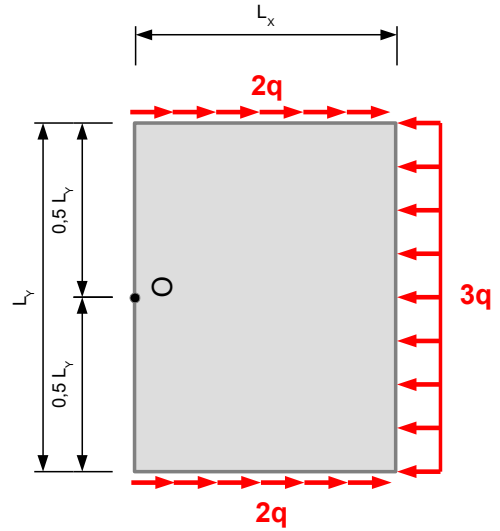
$$h = 20 \text{ cm}$$

Obciążenie:

$$q = 100 \text{ kPa}$$

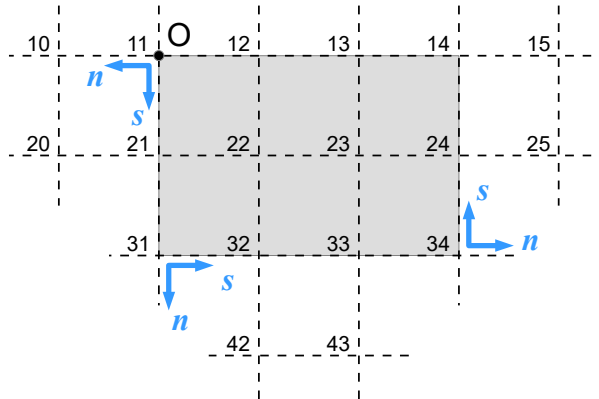
Oczko siatki MRS:

$$s = \Delta x = \Delta y = 2 \text{ m}$$

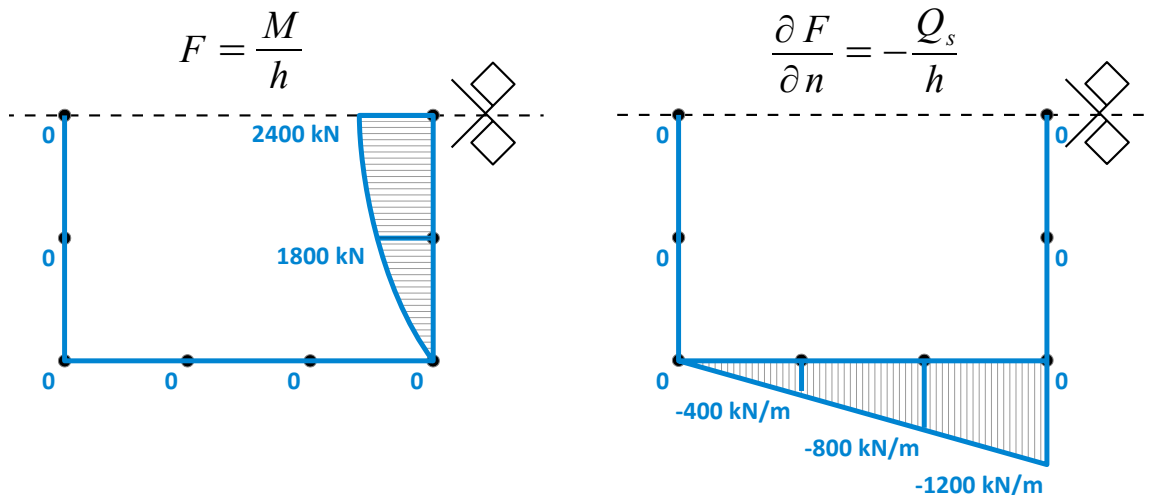


**ROWIĄZANIE:**

Przyjęta siatka MRS:



Wartości funkcji Airy'ego i jej pochodnej na kierunku normalnej



Równania dla węzłów wewnętrznych:  $\nabla^4 F = 0$

$$\begin{cases} 20 \cdot F_{12} - 8 \cdot (F_{13} + F_{22} + F_{11} + F_{22}) + 2 \cdot (F_{23} + F_{21} + F_{21} + F_{23}) + 1 \cdot (F_{32} + F_{10} + F_{32} + F_{14}) = 0 \\ 20 \cdot F_{13} - 8 \cdot (F_{23} + F_{12} + F_{23} + F_{14}) + 2 \cdot (F_{24} + F_{22} + F_{22} + F_{24}) + 1 \cdot (F_{33} + F_{11} + F_{33} + F_{15}) = 0 \\ 20 \cdot F_{22} - 8 \cdot (F_{12} + F_{21} + F_{32} + F_{23}) + 2 \cdot (F_{13} + F_{11} + F_{31} + F_{33}) + 1 \cdot (F_{22} + F_{20} + F_{42} + F_{24}) = 0 \\ 20 \cdot F_{23} - 8 \cdot (F_{13} + F_{22} + F_{33} + F_{24}) + 2 \cdot (F_{14} + F_{12} + F_{32} + F_{34}) + 1 \cdot (F_{23} + F_{21} + F_{43} + F_{25}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{10} + 20 F_{12} - 8 F_{13} - 16 F_{22} + 4 F_{23} = -2400 \\ -8 F_{12} + 20 F_{13} + F_{15} + 4 F_{22} - 16 F_{23} = 12000 \\ -8 F_{12} + 2 F_{13} + F_{20} + 21 F_{22} - 8 F_{23} + F_{42} = -1800 \\ 2 F_{12} - 8 F_{13} - 8 F_{22} + 21 F_{23} + F_{25} + F_{43} = 9600 \end{cases} \text{ [kN]}$$

Warunki brzegowe:  $\frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{Q_s}{h}$

$$\begin{cases} \frac{(F_{10} - F_{12})}{2s} = -\frac{Q_{s,11}}{h} \\ \frac{(F_{20} - F_{22})}{2s} = -\frac{Q_{s,21}}{h} \\ \frac{(F_{42} - F_{22})}{2s} = -\frac{Q_{s,32}}{h} \\ \frac{(F_{43} - F_{23})}{2s} = -\frac{Q_{s,33}}{h} \\ \frac{(F_{25} - F_{23})}{2s} = -\frac{Q_{s,24}}{h} \\ \frac{(F_{15} - F_{13})}{2s} = -\frac{Q_{s,14}}{h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{10} - F_{12} = 0 \\ F_{20} - F_{22} = 0 \\ F_{42} - F_{22} = -1600 \\ F_{43} - F_{23} = -3200 \\ F_{25} - F_{23} = 0 \\ F_{15} - F_{13} = 0 \end{cases} \text{ [kN]}$$

Układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 20 & -8 & 0 & 0 & -16 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 20 & 1 & 0 & 4 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 0 & 1 & 21 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & -8 & 21 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{10} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{15} \\ F_{20} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{25} \\ F_{42} \\ F_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2400 \\ 12000 \\ -1800 \\ 9600 \\ 0 \\ 0 \\ -1600 \\ -3200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_{10} = 694,707 \\ F_{12} = 694,707 \\ F_{13} = 1705,293 \\ F_{15} = 1705,293 \\ F_{20} = 527,325 \\ F_{22} = 527,325 \\ F_{23} = 1272,675 \\ F_{25} = 1272,675 \\ F_{42} = -1072,675 \\ F_{43} = -1927,325 \end{cases} \text{ [kN]}$$

Stan naprężenia:

WEŹEŁ 12:

$$\sigma_{xx}^{(12)} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{F_{22} - 2F_{12} + F_{22}}{s^2} = -83,691 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{yy}^{(12)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{11} - 2F_{12} + F_{13}}{s^2} = 78,970 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{xy}^{(12)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{F_{23} + F_{21} - F_{21} - F_{23}}{4s^2} = 0 \text{ kPa}$$

WEŹEŁ 12:

$$\sigma_{xx}^{(13)} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{F_{23} - 2F_{13} + F_2}{s^2} = -216,309 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{yy}^{(13)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{12} - 2F_{13} + F_{14}}{s^2} = -78,970 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{xy}^{(13)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{F_{24} + F_{22} - F_{22} - F_{24}}{4s^2} = 0 \text{ kPa}$$

Skrypt wxMaxima:

(%i1)	/* DEKLARACJA STALYCH */ Lx:6; Ly:8; h:20e-2; q:100e3; s:2;
(%i2)	/* MOMENTY OBCIAZENIA ZEWNETRZNEGO WZGLEDEM WEZLOW BRZEGOWYCH */ M11:0; M21:0; M31:0; M32:0; M33:0; M34:0; M24:2*q*h*3*s*s-3*q*h*s*s/2; M14:2*q*h*3*s*2*s-3*q*h*2*s*s;
(%i3)	/* SILA STYCZNA W WEZLACH BRZEGOWYCH */ QS11:0; QS21:0; QS32:2*q*h*s; QS33:2*q*h*2*s; QS24:0; QS14:0;
(%i4)	/* WARTOSCI BRZEGOWE FUNKCJI AIRY'EGO */ F11:M11/h; F21:M21/h; F31:M31/h; F32:M32/h; F33:M33/h; F34:M34/h; F24:M24/h; F14:M14/h;

(%i5)	/* ROWNANIA DLA WEZLOW WEWNETRZNYCH: D^4 F = 0 */ eq1:20*F12-8*(F13+F22+F11+F22)+2*(F23+F21+F21+F23)+1*(F32+F10+F32+F14); eq2:20*F13-8*(F23+F12+F23+F14)+2*(F24+F22+F22+F24)+1*(F33+F11+F33+F15); eq3:20*F22-8*(F12+F21+F32+F23)+2*(F13+F11+F31+F33)+1*(F22+F20+F42+F24); eq4:20*F23-8*(F13+F22+F33+F24)+2*(F14+F12+F32+F34)+1*(F23+F21+F43+F25);
(%i6)	/* WARUNKI BRZEGOWE: -dF//dn = QS/h */ eq5:-((F10-F12)/2/s)-QS11/h; eq6:-((F20-F22)/2/s)-QS21/h; eq7:-((F42-F22)/2/s)-QS32/h; eq8:-((F43-F23)/2/s)-QS33/h; eq9:-((F25-F23)/2/s)-QS24/h; eq10:-((F15-F13)/2/s)-QS14/h;
(%i7)	/* ROZWIAZNIE UKLADU ROWNAN */ W:solve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10],[F10,F20,F12,F22,F42,F13,F23,F43,F15,F25]);
(%i8)	F10:float(W[1][1]); F20:float(W[1][2]); F12:float(W[1][3]); F22:float(W[1][4]); F42:float(W[1][5]); F13:float(W[1][6]); F23:float(W[1][7]); F43:float(W[1][8]); F15:float(W[1][9]); F25:float(W[1][10]);
(%i9)	/* STAN NAPREZENIA W WEZLE 12 */ SXX12:(F22-2*F12+F22)/s^2; SYY12:(F11-2*F12+F13)/s^2; SXY12:-(F23+F21-F21-F23)/4/s^2;
(%i10)	/* STAN NAPREZENIA W WEZLE 13 */ SXX31:(F23-2*F13+F323)/s^2; SYY31:(F12-2*F13+F14)/s^2; SXY31:-(F24+F22-F22-F24)/4/s^2;

UWAGI:

- funkcja *float* zamienia ułamek zwykły na ułamek dziesiętny;
- funkcja *solve([e1,e2,...][x1,x2,...])* rozwiązuje układ równań postaci  $e_1=0, e_2=0, \dots$  z uwagi na zmienne  $x_1, x_2, \dots$ ;

UZYSKANE WYNIKI:

F10=694706.7238912733

F20=527324.7496423462

F12=694706.7238912733

F22=527324.7496423462

F42=-1072675.250357654

F13=1705293.276108727

F23=1272675.250357654

F43=-1927324.749642346

F15=1705293.276108727

F25=1272675.250357654

SXX12=-83690.98712446354

SYY12=78969.95708154509

SXY12=0.0

SXX31=-216309.0128755365

SYY31=-78969.95708154514

SXY31=0.0