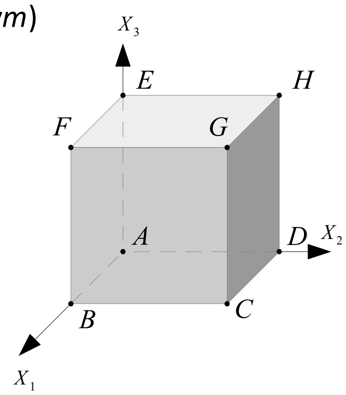
ZADANIE 22 (*Liniowa deformacja w opisie przestrzennym i materialnym*)



Dla sześcianu o jednostkowej krawędzi:

$$\begin{cases} x_1 = 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 \\ x_2 = -3X_3 \\ x_3 = -X_1 - X_2 \end{cases}$$

sprawdzić odwracalność równań deformacji a następnie wyznaczyć:

1. równania deformacji w opisie przestrzennym,
2. wektor przemieszczenia w opisie materialnym i w opisie przestrzennym,
3. konfigurację aktualną sześcianu – sporządzić szkic,
4. materialny gradient deformacji **F** oraz przestrzenny gradient deformacji **f** – dokonać rozkładu biegunowego **F**, znaleźć tensor obrotu, lewy i prawy tensor rozciągnięcia oraz zilustrować działanie tych tensorów na włókno $\mathrm{d}\mathbf{X} = [0;1;0]$
5. prawy tensor deformacji Cauchy'ego-Greena **C** i tensor deformacji Cauchy'ego **c**,
6. tensor odkształcenia Greena – de Saint-Venanta **E** i tensor odkształcenia Almansiego-Hamela **e** oraz tensor małych odkształceń i tensor małych obrotów
7. tensory naprężenia Piloi-Kirchhoffa I i II rodzaju oraz tensor naprężenia Cauchy'ego przyjmując liniowy związek fizyczny Hooke'a między tensorem odkształcenia Greena – de Saint - Venanta a tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa II rodzaju:

   $S_{ij} = 2G E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij}$, moduł Younga $E = 11\,\mathrm{kPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0{,}1$

8. rzeczywiste obciążenie ścianki BCGF,
9. nominalne obciążenie ścianki BCGF,
10. powierzchnię ścianki BCGF przed i po deformacji
11. długość odcinka AG przed i po deformacji,
12. objętość sześcianu przed i po deformacji.

ROZWIĄZANIE:

Na początku wyznaczamy **materialny gradient deformacji**. Składowa i,j jest równa pochodnej i -tej współrzędnej przestrzennej $\mathbf{x}$ względem j -tej współrzędnej materialnej $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Odwracalność równań deformacji sprawdzamy wyznaczając **jakobian** przekształcenia:

$$J=\det(\mathbf{F})=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & 0 & -3\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=3 \tag{2}$$

Jakobian jest większy od 0, zatem równania są **lokalnie odwracalne** w każdym punkcie.

AD 1) RÓWNANIA DEFORMACJI W OPISIE PRZESTRZENNYM

Równania deformacyjne stanowią układ równań wiążących zmienne materialne i zmienne przestrzenne, który można rozwiązać z uwagi na jeden z tych kompletów współrzędnych. Rozwiązujemy układ równań deformacji z uwagi na zmienne materialne $\mathbf{X}$. W naszym przypadku jest to **układ równań liniowych** – w prosty sposób możemy znaleźć jego rozwiązanie za pomocą **wzorów Cramera**:

$$\begin{cases} x_1=2X_1+3X_2-4X_3\\ x_2=-3X_3\\ x_3=-X_1-X_2\end{cases} \tag{3}$$

Wyznaczniki:

$$W=\det(\mathbf{F})=3 \tag{4}$$

$$W_1=\begin{bmatrix}x_1 & 3 & -4\\ x_2 & 0 & -3\\ x_3 & -1 & 0\end{bmatrix}=-3x_1+4x_2-9x_3 \tag{5}$$

$$W_2=\begin{bmatrix}2 & x_1 & -4\\ 0 & x_2 & -3\\ -1 & x_3 & 0\end{bmatrix}=3x_1-4x_2+6x_3 \tag{6}$$

$$W_3=\begin{bmatrix}2 & 3 & x_1\\ 0 & 0 & x_2\\ -1 & -1 & x_3\end{bmatrix}=x_2 \tag{7}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} X_1=\frac{W_1}{W}=-x_1+\frac{4}{3}x_2-3x_3\\ X_2=\frac{W_2}{W}=x_1-\frac{4}{3}x_2+2x_3\\ X_3=\frac{W_3}{W}=-\frac{x_2}{3}\end{cases} \tag{8}$$

W przypadku związków nieliniowych podejście powyższe nie jest możliwe i konieczne jest rozwiązanie układu równań nieliniowych.

AD 2) WEKTOR PRZEMIESZCZENIA

Wektor przemieszczenia wyznaczamy zgodnie z zależnością: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ (9)

W zależności od tego, w jakim opisie chcemy go wyznaczyć, jedną ze współrzędnych musimy wyrazić przez drugą zgodnie ze związkami deformacyjnymi (3) lub (8).

- **opis materialny** – zmiennymi niezależnymi są współrzędne materialne $\mathbf{X}$, więc współrzędne przestrzenne $\mathbf{x}$ musimy wyrazić przez współrzędne materialne zgodnie ze związkami (3):

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{X}) = x_1((\mathbf{X})) - X_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3 \\ u_2(\mathbf{X}) = x_2((\mathbf{X})) - X_2 = -X_2 - 3X_3 \\ u_3(\mathbf{X}) = x_3((\mathbf{X})) - X_3 = -X_1 - X_2 - X_3 \end{cases} \qquad (10)$$

- **opis przestrzenny**: zmiennymi niezależnymi są współrzędne przestrzenne $\mathbf{x}$, więc współrzędne materialne $\mathbf{X}$ musimy wyrazić przez współrzędne przestrzenne zgodnie ze związkami (8):

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) = x_1 - X_1(\mathbf{x}) = 2x_1 - \dfrac{4}{3}x_2 + 3x_3 \\ u_2(\mathbf{x}) = x_2 - X_2(\mathbf{x}) = -x_1 + \dfrac{7}{3}x_2 - 2x_3 \\ u_3(\mathbf{x}) = x_3 - X_3(\mathbf{x}) = x_3 + \dfrac{x_2}{3} \end{cases} \qquad (11)$$

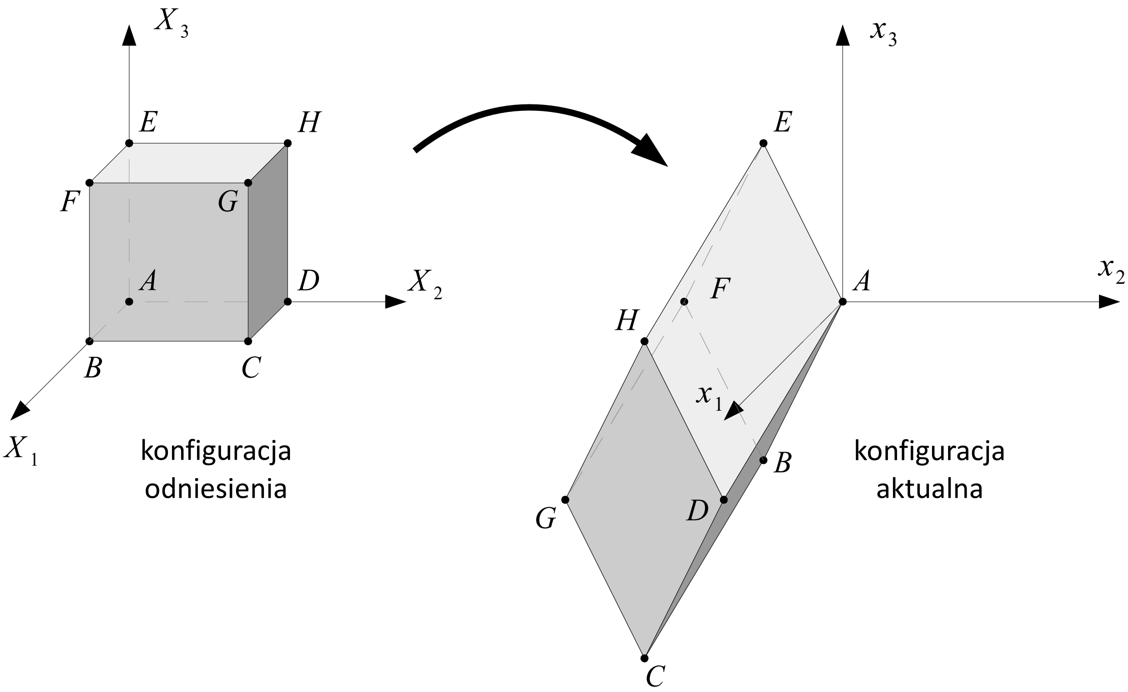
Można łatwo sprawdzić, że podstawienie (3) do (11) daje nam (10), natomiast podstawienie (8) do (10) daje nam (11).

AD 3) KONFIGURACJA AKTUALNA SZEŚCIANU

Związki deformacyjne są funkcjami liniowymi, co oznacza, że **każdy odcinek prosty przekształcany jest w odcinek prosty**, choć w ogólności zmienia się jego kierunek i długość i położenie końców. Skoro konfiguracja odniesienia jest sześcianem, zatem **konfiguracja aktualna będzie z pewnością równoległobokiem – wystarczy zatem znaleźć jedynie położenie wierzchołków** tego równoległościanu i połączyć je odcinkami prostymi.

Położenie w konfiguracji aktualnej dane jest współrzędnymi przestrzennymi $\mathbf{x}$. Korzystamy zatem ze związków (3) i dla każdego wierzchołka w konfiguracji odniesienia odczytujemy jego położenie (współrzędne materialne $\mathbf{X}$) i podstawiamy odpowiednie współrzędne do kolejnych związków w (3). Otrzymujemy:

$$\begin{array}{ll} A:\ \mathbf{x}(0;0;0) = [0;0;0]^{\mathrm{T}} & B:\ \mathbf{x}(1;0;0) = [2;0;-1]^{\mathrm{T}} \\ C:\ \mathbf{x}(1;1;0) = [5;0;-2]^{\mathrm{T}} & D:\ \mathbf{x}(0;1;0) = [3;0;-1]^{\mathrm{T}} \\ E:\ \mathbf{x}(0;0;1) = [-4;-3;0]^{\mathrm{T}} & F:\ \mathbf{x}(1;0;1) = [-2;-3;-1]^{\mathrm{T}} \\ G:\ \mathbf{x}(1;1;1) = [1;-3;-2]^{\mathrm{T}} & H:\ \mathbf{x}(0;1;1) = [-1;-3;-1]^{\mathrm{T}} \end{array}$$



AD 4) ROZKŁAD BIGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

Rozkładem biegunowym materialnego gradientu deformacji nazywamy możliwość zapisania gradientu deformacji w postaci iloczynu tensora symetrycznego i tensora ortogonalnego w jednej z dwóch postaci:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{V}\,\mathbf{R} \tag{12}$$

gdzie:

- $\mathbf{R}$ **tensor obrotu** – **ortogonalny**: $\det(\mathbf{R}) = 1\,,\quad \mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}$
- $\mathbf{U}$ **prawy tensor rozciągnięcia** – **symetryczny:** $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}$
- $\mathbf{V}$ **lewy tensor rozciągnięcia** – **symetryczny:** $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}$

Schematy znajdowania składników rozkładu biegunowego jest następujący:

1. wyznaczyć **materialny gradient deformacji:** $\mathbf{F}$
2. wyznaczyć **tensor deformacji:** $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$
3. znaleźć **wartości własne** C_1, C_2, C_3 i **wektory własne** $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3$ **tensora deformacji**. Postać tensora deformacji w układzie osi własnych:

$$\mathbf{C}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

4. wyznaczyć **macierz przejścia**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^{(1)} \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)} \\ \boldsymbol{\omega}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \omega_3^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \omega_3^{(2)} \\ \omega_1^{(3)} & \omega_2^{(3)} & \omega_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

5. Wyznaczyć **prawy tensor rozciągnięcia w układzie osi własnych**:
$$\mathbf{U}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{bmatrix}$$
6. Wyznaczyć **odwrotność prawego tensora rozciągnięcia w układzie osi własnych**:
$$\mathbf{U}^{-1}{}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_3}} \end{bmatrix}$$
7. Wyznaczyć **prawy tensor rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych**:
$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_{[\omega]}\mathbf{A}$$
8. Wyznaczyć **odwrotność prawego tensora rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych**:
$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{-1}{}_{[\omega]}\mathbf{A}$$
9. Wyznaczyć **tensor obrotu**: $\mathbf{R} = \mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1}$
10. Wyznaczyć **lewy tensor rozciągnięcia**: $\mathbf{V} = \mathbf{R}\,\mathbf{U}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$

Tensor deformacji:
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 7 & 10 & -12 \\ -8 & -12 & 25 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Aby znaleźć wartości własne tensora deformacji musimy rozwiązać **równanie wiekowe**:
$$C^3 - I_1 C^2 + I_2 C - I_3 = 0 \tag{14}$$

którego współczynniki dane są **niezmiennikami tensora** deformacji:
- **pierwszy niezmiennik – ślad tensora**:
$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33} = 40 \tag{15}$$
- **drugi niezmiennik**:
$$I_2 = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = 168 \tag{16}$$
- **trzeci niezmiennik – wyznacznik tensora**:
$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 9 \tag{17}$$

Równanie wiekowe: $$C^3 - 40C^2 + 168C - 9 = 0 \tag{18}$$

Można pokazać, że z symetrii i dodatniej określoności tensora wynika, że równanie powyższe zawsze ma trzy dodatnie pierwiastki rzeczywiste. Znajdujemy je bądź z wykorzystaniem **wzorów Cardano** (jak poniżej), bądź **numerycznie** na kalkulatorze lub komputerze:

Rachunki analityczne wymagają obliczenia następujących parametrów:

$$p = \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = 13{,}333 \tag{19}$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(C_{22} - C_{33})^2 + (C_{33} - C_{11})^2 + (C_{11} - C_{22})^2\right] + (C_{23}^2 + C_{31}^2 + C_{12}^2) = 365{,}333 \tag{20}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= (C_{11} - p)(C_{22} - p)(C_{33} - p) + 2C_{23}C_{31}C_{12} - \\ &- (C_{11} - p)C_{23}^2 - (C_{22} - p)C_{31}^2 - (C_{33} - p)C_{12}^2 = 2509{,}741 \end{aligned} \tag{21}$$

$$q = \sqrt{2J_2} = 27{,}031 \tag{22}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) = 0{,}122\,\mathrm{rad} \tag{23}$$

Pierwiastki równania wiekowego:

$$C_1 = p + \sqrt{\frac{2}{3}}q\cos(\theta) = 35{,}240 \tag{24}$$

$$C_2 = p + \sqrt{\frac{2}{3}}q\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}0543 \tag{25}$$

$$C_3 = p + \sqrt{\frac{2}{3}}q\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 4{,}706 \tag{26}$$

Numeracja wartości własnych może być wybrana dowolnie. Tradycyjnie numeruje się je od największej do najmniejszej lub odwrotnie:

Wartości własne tensora deformacji: $$C_1 = 0{,}0543 \qquad C_2 = 4{,}706 \qquad C_3 = 35{,}240 \tag{27}$$

Każdej pojedynczej wartości własnej tensora deformacji odpowiada jeden kierunek własny i dowolny wektor równoległy do tego kierunku jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej. Spośród nieskończonej liczby możliwych do wyboru wektorów wybierać będziemy **wektory unormowane** (**o jednostkowej długości**), natomiast **zwrot dwóch z wektorów własnych również wybierać będziemy dowolnie**, a **zwrot trzeciego wektora własnego dobierzemy tak, aby wektory własne tworzyły trójkę prawoskrętną**. Taka trójka posłuży nam do wyznaczenia macierzy przejścia między wyjściowym układem współrzędnych a układem osi własnych. Z symetrii tensora deformacji wynika, że będzie to układ ortogonalny, zaś unormowanie i zachowanie odpowiedniej orientacji trzeciego wektora własnego zagwarantuje nam, że będzie to dodatkowo **prawoskrętny układ ortonormalny** (**kartezjański**).

Aby wyznaczyć pierwszy wektor własny $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ odpowiadający pierwszej wartości własnej C_1 zapiszmy poniższe wyrażenie:

$$\mathbf{C}\,\boldsymbol{\omega}^{(1)} - C_1\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad (\mathbf{C}-C_1\mathbf{1})\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5-0{,}0543 & 7 & -8 \\ 7 & 10-0{,}0543 & -12 \\ -8 & -12 & 25-0{,}0543 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \\ \omega_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Powyższe równanie wektorowe jest spełnione na mocy definicji wektora własnego. Odpowiada ono układowi równań liniowych jednorodnych (o prawych stronach równych 0). Równanie takie ma niezerowe rozwiązanie jedynie wtedy, gdy wyznacznik główny jest równy 0. Zerowanie się wyznacznika można interpretować geometrycznie jako zerowanie się iloczynu mieszanego trzech wektorów, których składowe opisane są trzema wierszami macierzy współczynników tego układu. Zerowanie się tego wyznacznika oznacza, że wektory te leżą na jednej płaszczyźnie. Jednocześnie każde z równań z osobna interpretować można jako iloczyn skalarny jednego z tych wektorów (wierszy macierzy) z wektorem własnym $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ - ponieważ prawa strona jest równa 0, zatem iloczyn ten jest zerowy, a to oznacza, że wektory te są prostopadłe. A zatem wektor własny $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczanej przez wektory odpowiadające wierszom macierzy współczynników. Taki prostopadły wektor można wyznaczyć jako iloczyn wektorowy dowolnych dwóch wektorów leżących w płaszczyźnie, np. pierwszych dwóch:

$$\begin{bmatrix} 4{,}946 & 7 & -8 \\ 7 & 9{,}946 & -12 \\ -8 & -12 & 24{,}946 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} [4{,}946\ ;\ 7\ ;\ -8] \\ \times \quad [7\ ;\ 9{,}946\ ;\ -12] \\ \hline \mathbf{v}^{(1)} = \quad [-4{,}434\,;3{,}349\,;0{,}189] \end{array} \tag{29}$$

Wektor własny otrzymujemy przez unormowanie obliczonego wektora:

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{|\mathbf{v}^{(1)}|} = \frac{[-4{,}434\,;3{,}349\,;0{,}189]}{\sqrt{(-4{,}434)^2 + (3{,}349)^2 + (0{,}189)^2}} = [-0{,}798\,;0{,}603\,;0{,}034] \tag{30}$$

Analogicznie postępujemy przy wyznaczaniu drugiego wektora własnego $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ odpowiadającego drugiej wartości własnej C_2 .

$$(\mathbf{C}-C_2\mathbf{1})\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 5-4{,}706 & 7 & -8 \\ 7 & 10-4{,}706 & -12 \\ -8 & -12 & 25-4{,}706 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \\ \omega_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}294 & 7 & -8 \\ 7 & 5{,}294 & -12 \\ -8 & -12 & 20{,}294 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} [0{,}294\ ;\ 7\ ;\ -8] \\ \times \quad [7\ ;\ 5{,}294\ ;\ -12] \\ \hline \mathbf{v}^{(2)} = \quad [-41{,}646\,;-52{,}470\,;-47{,}442] \end{array} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{|\mathbf{v}^{(2)}|} = \frac{[-41{,}646\,;-52{,}470\,;-47{,}442]}{\sqrt{(-41{,}646)^2+(-52{,}470)^2+(-47{,}442)^2}} = [-0{,}507\,;-0{,}639\,;-0{,}578] \quad (33)$$

Trzeci wektor własny wyznaczamy inaczej. Skoro wiemy, że musi on być prostopadły do dwóch pozostałych, a ponadto chcemy, aby był unormowany i razem z pozostałymi tworzył trójkę prawoskrętną, to wszystkie te cechy posiada **wektor będący iloczynem wektorowym dwóch pozostałych wektorów własnych**:

$$\begin{array}{rl} \boldsymbol{\omega}^{(1)} = & [-0{,}798\ ;\ 0{,}602\ ;\ 0{,}034] \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)} = & [-0{,}507\ ;\ -0{,}639\ ;\ -0{,}578] \\ \hline \boldsymbol{\omega}^{(3)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(2)} & [-0{,}326\,;-0{,}478\,;0{,}815] \end{array} \quad (34)$$

Wektory własne tensora deformacji:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}^{(1)} &= [-0{,}798\ ;\ 0{,}602\ ;\ 0{,}034] \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)} &= [-0{,}507\ ;\ -0{,}639\ ;\ -0{,}578] \\ \boldsymbol{\omega}^{(3)} &= [-0{,}326\ ;\ -0{,}478\ ;\ 0{,}815] \end{aligned}$$

Składowa i,j macierzy przejścia jest równa j **-tej składowej** i **-tego wektora własnego**:

Macierz przejścia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}798 & 0{,}602 & 0{,}034 \\ -0{,}507 & -0{,}639 & -0{,}578 \\ -0{,}326 & -0{,}478 & 0{,}815 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Prawy tensor rozciągnięcia w osiach własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}233 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}169 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}936 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Odwrotność $\mathbf{U}$ w osiach własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}293 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}461 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}169 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Prawy tensor rozciągnięcia $\mathbf{U}$ w układzie wyjściowym:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_{[\omega]}\mathbf{A} =$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}798 & -0{,}507 & -0{,}326 \\ 0{,}602 & -0{,}639 & -0{,}478 \\ 0{,}034 & -0{,}578 & 0{,}815 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}233 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}169 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}936 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}798 & 0{,}602 & 0{,}034 \\ -0{,}507 & -0{,}639 & -0{,}578 \\ -0{,}326 & -0{,}478 & 0{,}815 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}186 & -1.100 & -1.935 \\ 0{,}140 & -1.386 & -2.837 \\ 0{,}00792 & -1.254 & 4.838 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}798 & 0{,}602 & 0{,}034 \\ -0{,}507 & -0{,}639 & -0{,}578 \\ -0{,}326 & -0{,}478 & 0{,}815 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}339 & 1{,}518 & -0{,}950 \\ 1{,}518 & 2{,}328 & -1{,}508 \\ -0{,}950 & -1{,}508 & 4{,}671 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Odwrotność prawego tensora rozciągnięcia $\mathbf{U}^{-1}$ w układzie wyjściowym:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{-1}{}_{[\omega]}\mathbf{A} =$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}798 & -0{,}507 & -0{,}326 \\ 0{,}602 & -0{,}639 & -0{,}478 \\ 0{,}034 & -0{,}578 & 0{,}815 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4{,}293 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}461 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}798 & 0{,}602 & 0{,}034 \\ -0{,}507 & -0{,}639 & -0{,}578 \\ -0{,}326 & -0{,}478 & 0{,}815 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -3{,}423 & -0{,}234 & -0{,}055 \\ 2{,}585 & -0{,}295 & -0{,}081 \\ 0{,}146 & -0{,}266 & 0{,}137 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}798 & 0{,}602 & 0{,}034 \\ -0{,}507 & -0{,}639 & -0{,}578 \\ -0{,}326 & -0{,}478 & 0{,}815 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}867 & -1{,}886 & -0{,}026 \\ -1{,}886 & 1{,}784 & 0{,}192 \\ -0{,}026 & 0{,}192 & 0{,}271 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Tensor obrotu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}867 & -1{,}886 & -0{,}026 \\ -1{,}886 & 1{,}784 & 0{,}192 \\ -0{,}026 & 0{,}192 & 0{,}271 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}810 & -0{,}558 \\ 0{,}078 & -0{,}577 & -0{,}813 \\ -0{,}981 & 0{,}102 & -0{,}167 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Lewy tensor rozciągnięcia:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\,\mathbf{U}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}078 & -0{,}981 \\ 0{,}810 & -0{,}577 & 0{,}102 \\ -0{,}558 & -0{,}813 & -0{,}167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}018 & 1{,}676 & -0{,}988 \\ 1{,}676 & 2{,}440 & 0{,}500 \\ -0{,}988 & 0{,}500 & 0{,}879 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Sprawdzenia:

$\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}$ - tensor $\mathbf{U}$ jest symetryczny

$\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}$ - tensor $\mathbf{V}$ jest symetryczny

$\det(\mathbf{R}) = 1$

$$\mathbf{R}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}810 & -0{,}558 \\ 0{,}078 & -0{,}577 & -0{,}813 \\ -0{,}981 & 0{,}102 & -0{,}167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}078 & -0{,}981 \\ 0{,}810 & -0{,}577 & 0{,}102 \\ -0{,}558 & -0{,}813 & -0{,}167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}\,\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}810 & -0{,}558 \\ 0{,}078 & -0{,}577 & -0{,}813 \\ -0{,}981 & 0{,}102 & -0{,}167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}339 & 1{,}518 & -0{,}950 \\ 1{,}518 & 2{,}328 & -1{,}508 \\ -0{,}950 & -1{,}508 & 4{,}671 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$$

DEFORMACJA WŁÓKNA MATERIALNEGO $\mathrm{d}\mathbf{X} = [0\,;1\,;0]$

Rozciągnięcie przed obrotem:

$$\mathbf{U}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1{,}339 & 1{,}518 & -0{,}950 \\ 1{,}518 & 2{,}328 & -1{,}508 \\ -0{,}950 & -1{,}508 & 4{,}671 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}518 \\ 2{,}328 \\ -1{,}508 \end{bmatrix}$$

Obrót po rozciągnięciu:

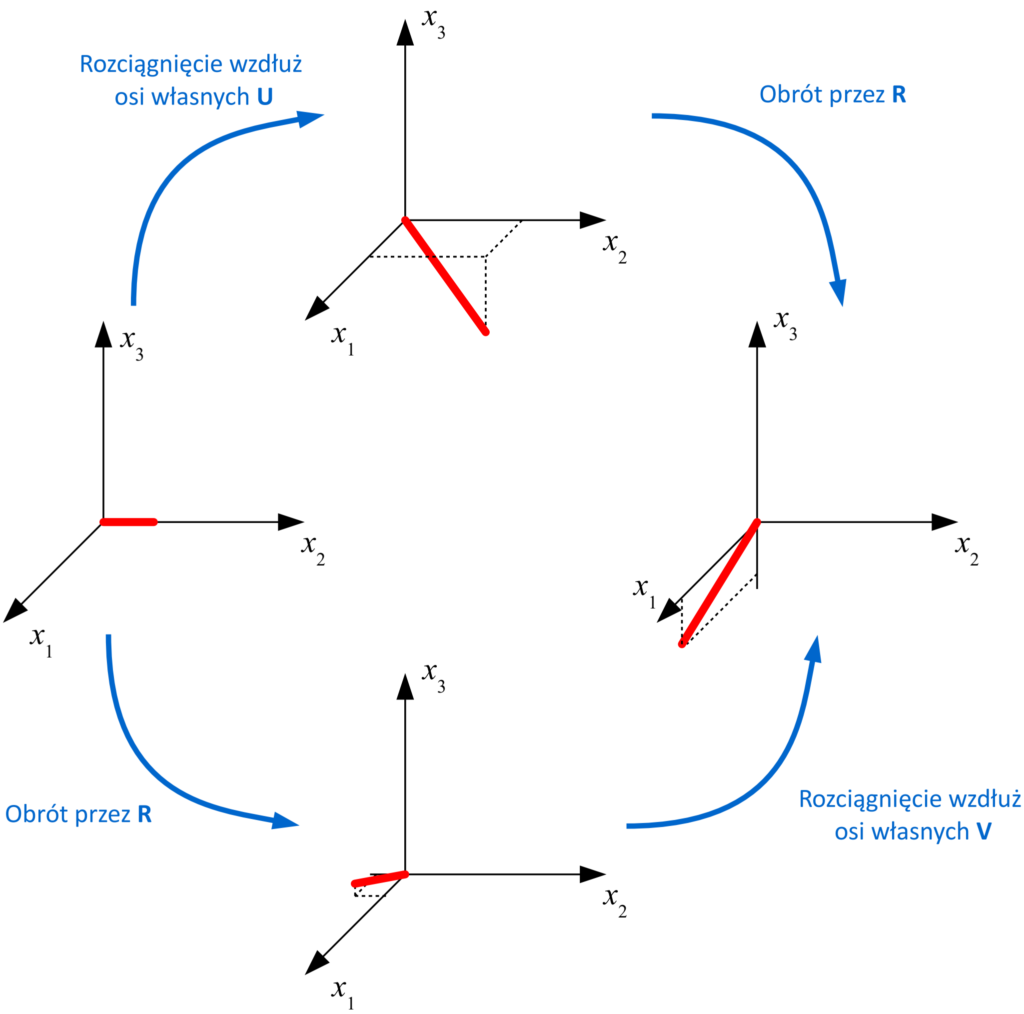
$$\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{R}(\mathbf{U}\,\mathrm{d}\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}810 & -0{,}558 \\ 0{,}078 & -0{,}577 & -0{,}813 \\ -0{,}981 & 0{,}102 & -0{,}167 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1{,}518 \\ 2{,}328 \\ -1{,}508 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obrót przed rozciągnięciem:

$$\mathbf{R}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0{,}179 & 0{,}810 & -0{,}558 \\ 0{,}078 & -0{,}577 & -0{,}813 \\ -0{,}981 & 0{,}102 & -0{,}167 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}810 \\ -0{,}577 \\ 0{,}102 \end{bmatrix}$$

Rozciągnięcie po obrocie:

$$\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{V}(\mathbf{R}\,\mathrm{d}\mathbf{X}) = = \begin{bmatrix} 5{,}018 & 1{,}676 & -0{,}988 \\ 1{,}676 & 2{,}440 & 0{,}500 \\ -0{,}988 & 0{,}500 & 0{,}879 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0{,}810 \\ -0{,}577 \\ 0{,}102 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



AD 5) TENSOR DEFORMACJI

Do wyznaczenia przestrzennego tensora deformacji konieczne jest wyznaczenie przestrzennego gradientu deformacji:

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} = \frac{\left(\operatorname{cof}\left(\mathbf{F}\right)\right)^{\mathrm{T}}}{\det\left(\mathbf{F}\right)} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{(2+1)}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+2)}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+3)}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{(3+1)}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+2)}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+3)}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -3 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Przestrzenny gradient deformacji może być również wyznaczony z definicji na postawie związków (8):

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -3 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Prawy tensor deformacji Cauchy'ego-Greena (materialny tensor deformacji):

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 7 & 10 & -12 \\ -8 & -12 & 25 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Tensor deformacji Cauchy'ego (przestrzenny tensor deformacji):

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{f} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1{,}333 & -1{,}333 & -0{,}333 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1{,}333 & -3 \\ 1 & -1{,}333 & 2 \\ 0 & -0{,}333 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2{,}667 & 5 \\ -2{,}667 & 3{,}667 & -6{,}667 \\ 5 & -6{,}667 & 13 \end{bmatrix} \tag{45}$$

AD 6) TENSOR ODKSZTAŁCENIA

Tensor odkształcenia Greena – de Saint-Venanta (materialny tensor odkształcenia)

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{1})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}5 & 7 & -8\\ 7 & 10 & -12\\ -8 & -12 & 25\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 3{,}5 & -4\\ 3{,}5 & 4{,}5 & -6\\ -4 & -6 & 12\end{bmatrix} \tag{46}$$

Tensor odkształcenia Almansiego-Hamela (przestrzenny tensor odkształcenia)

$$\mathbf{e}=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathbf{c})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -2{,}667 & 5\\ -2{,}667 & 3{,}667 & -6{,}667\\ 5 & -6{,}667 & 13\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-0{,}5 & 1{,}333 & -2{,}5\\ 1{,}333 & -1{,}333 & 3{,}333\\ -2{,}5 & 3{,}333 & -6\end{bmatrix} \tag{47}$$

Aby wyznaczyć tensor małych przemieszczeń i tensor małych obrotów, wyznaczamy **materialny gradient przemieszczenia**:

$$\mathbf{H}=\mathbf{F}-\mathbf{1}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & 0 & -3\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix} \tag{48}$$

Tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ -4 & -3 & -1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 1{,}5 & -2{,}5\\ 1{,}5 & -1 & -2\\ -2{,}5 & -2 & -1\end{bmatrix} \tag{49}$$

Tensor małych obrotów:

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{\mathrm{T}})=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -1 & -3\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ -4 & -3 & -1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1{,}5 & -1{,}5\\ -1{,}5 & 0 & -1\\ 1{,}5 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{50}$$

AD 7) TENSOR NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa II rodzaju wyznaczamy z podanych związków fizycznych, których parametry określamy na podstawie modułu Younga i współczynnika Poissona:

- **moduł Younga**: $E = 11 \text{ kPa}$ (51)
- **współczynnik Poissona**: $\nu = 0{,}1$ (52)
- **moduł Kirchhoffa**: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 5 \text{ kPa}$ (53)
- **parametr Lamego**: $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 1{,}25 \text{ kPa}$ (54)

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa II rodzaju (tensor naprężeń materialnych)

$$\mathbf{T}_S = 2G\,\mathbf{E} + \lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E}\,\mathbf{1} = 2\cdot 5\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3{,}5 & -4 \\ 3{,}5 & 4{,}5 & -6 \\ -4 & -6 & 12 \end{bmatrix} + 1{,}25\cdot(2+4{,}5+12)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 43{,}125 & 35 & -40 \\ 35 & 68{,}125 & -60 \\ -40 & -60 & 143{,}125 \end{bmatrix} [\text{kPa}] \tag{55}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa I rodzaju (tensor naprężeń nominalnych)

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 43{,}125 & 35 & -40 \\ 35 & 68{,}125 & -60 \\ -40 & -60 & 143{,}125 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 351{,}25 & 514{,}375 & -832{,}5 \\ 120 & 180 & -429{,}375 \\ -78{,}125 & -103{,}125 & 100 \end{bmatrix} [\text{kPa}] \tag{56}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego (tensor naprężeń rzeczywistych)

$$\mathbf{T}_\sigma = \frac{1}{J}\mathbf{T}_R\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 351{,}25 & 514{,}375 & -832{,}5 \\ 120 & 180 & -429{,}375 \\ -78{,}125 & -103{,}125 & 100 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1858{,}542 & 832{,}5 & -288{,}542 \\ 832{,}5 & 429{,}375 & -100 \\ -288{,}542 & -100 & 60{,}417 \end{bmatrix} [\text{kPa}] \tag{57}$$

AD 8) AKTUALNE OBCIĄŻENIE ŚCIANKI BCGF W KONFIGURACJI AKTUALNEJ

Ścianka BCGF przed deformacją zawierała się w płaszczyźnie danej równaniem:

$$A_R: \quad X_1 - 1 = 0 \tag{58}$$

Równanie ścianki po deformacji uzyskamy podstawiając do (8) związki (58). Po deformacji ścianka ta zawiera się w powierzchni danej równaniem:

$$A: \quad X_1(x_1, x_2, x_3) - 1 = -x_1 + \frac{4}{3} x_2 - 3 x_3 - 1 = 0 \tag{59}$$

Normalną zewnętrzną do ścianki BCGF po deformacji wyznaczamy jako **unormowany gradient funkcji określającej kształt zdeformowanej ścianki**:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} A}{|\nabla_{\mathbf{x}} A|} = \frac{\left[-1 \ ; \ \frac{4}{3} \ ; \ -3\right]}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + (-3)^2}} = [-0{,}291 \ ; \ 0{,}389 \ ; \ -0{,}874] \tag{60}$$

Wektor obciążenia rzeczywistego ścianki BCGF:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1858{,}542 & 832{,}5 & -288{,}542 \\ 832{,}5 & 429{,}375 & -100 \\ -288{,}542 & -100 & 60{,}417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}291 \\ 0{,}398 \\ -0{,}874 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34{,}116 \\ 11{,}655 \\ -7{,}588 \end{bmatrix} [\mathrm{kPa}] \tag{61}$$

AD 9) AKTUALNE OBCIĄŻENIE ŚCIANKI BCGF ODNIESIONE DO KONFIGURACJI POCZĄTKOWEJ

Ścianka BCGF przed deformacją zawierała się w płaszczyźnie danej równaniem:

$$A_R: \quad X_1 - 1 = 0 \tag{62}$$

Normalną zewnętrzną do ścianki BCGF przed deformacją wyznaczamy jako **unormowany gradient funkcji określającej oryginalny kształt ścianki**:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla_{\mathbf{X}} A_R}{|\nabla_{\mathbf{X}} A_R|} = \frac{[1 \ ; \ 0 \ ; \ 0]}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = [1 \ ; \ 0 \ ; \ 0] \tag{63}$$

Wektor obciążenia nominalnego ścianki BCGF:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 351{,}25 & 514{,}375 & -832{,}5 \\ 120 & 180 & -429{,}375 \\ -78{,}125 & -103{,}125 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 351{,}25 \\ 120 \\ -78{,}125 \end{bmatrix} [\mathrm{kPa}] \tag{64}$$

AD 10) POWIERZCHNIA ŚCIANKI BCGF

Pole wycinka dowolnej krzywoliniowej powierzchni sparametryzowanej dwoma parametrami można obliczyć jako **całkę podwójną niezorientowaną z funkcji jednostkowej**:

$$A=\iint_A \mathrm{d}A=\iint_A \sqrt{\left(\left|\begin{matrix}\frac{\partial X_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial X_2}{\partial\beta}\\ \frac{\partial X_3}{\partial\alpha} & \frac{\partial X_3}{\partial\beta}\end{matrix}\right|\right)^2+\left(\left|\begin{matrix}\frac{\partial X_3}{\partial\alpha} & \frac{\partial X_3}{\partial\beta}\\ \frac{\partial X_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial X_1}{\partial\beta}\end{matrix}\right|\right)^2+\left(\left|\begin{matrix}\frac{\partial X_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial X_1}{\partial\beta}\\ \frac{\partial X_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial X_2}{\partial\beta}\end{matrix}\right|\right)^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \tag{65}$$

W naszym przypadku powierzchnią tą jest płaszczyzna prostopadła do osi X_1 , stąd łatwo sparametryzować ją zmiennymi X_2 , X_3 :

$$A_R=\{\mathbf{X}: X_1=1 \wedge X_2\in\langle 0;1\rangle \wedge X_3\in\langle 0;1\rangle\} \tag{66}$$

Powierzchnia ścianki BCGF przed deformacją:

$$A_R=\iint_{BCGF}\mathrm{d}A_R=\int_{X_2=0}^{1}\int_{X_3=0}^{1}\mathrm{d}X_2\,\mathrm{d}X_3=1 \tag{67}$$

Powierzchnię ścianki zdeformowanej możemy obliczyć w sposób analogiczny, przy czym wykorzystamy tutaj zależność, która wiąże wielkość infinitezymalnego elementu powierzchniowego przed deformacją i po deformacji:

$$\mathrm{d}A=J\sqrt{(\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1})\cdot(\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1})^{\mathrm{T}}}\,\mathrm{d}A_R \tag{68}$$

Wtedy:

$$A=\iint_{BCGF}\mathrm{d}A=\iint_{BCGF}J\sqrt{(\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1})\cdot(\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1})^{\mathrm{T}}}\,\mathrm{d}A_R \tag{69}$$

Obliczamy:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1}=[1;0;0]\begin{bmatrix}-1 & \frac{4}{3} & -3\\ 1 & -\frac{4}{3} & 2\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}=\left[-1\,;\,\frac{4}{3}\,;\,-3\right] \tag{70}$$

$$(\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1})\cdot(\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{-1})^{\mathrm{T}}=\left[-1\,;\,\frac{4}{3}\,;\,-3\right]\cdot\begin{bmatrix}-1\\ \frac{4}{3}\\ -3\end{bmatrix}=(-1)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-3)^2=\frac{106}{9}\approx 11{,}778 \tag{71}$$

Powierzchnia ścianki BCGF po deformacji:

$$A = \iint_{BCGF} \mathrm{d}\,A = \iint_{BCGF} 3\cdot\sqrt{11{,}778}\,\mathrm{d}\,A_R = 10{,}296 \int_{X_2=0}^{1} \int_{X_3=0}^{1} \mathrm{d}\,X_2 \mathrm{d}\,X_3 = 10{,}296\cdot 1 = 10{,}296 \quad [\mathrm{m}^2]$$

(72)

AD 11) DŁUGOŚĆ ODCINKA AG

Długość łuku krzywej można obliczyć jako **całkę krzywoliniową niezorientowaną z funkcji jednostkowej** wzdłuż rozpatrywanego łuku:

$$L_R = \int_{L_R} \mathrm{d}\,S = \int_{L_R} \sqrt{\mathrm{d}\,X_1^2 + \mathrm{d}\,X_2^2 + \mathrm{d}\,X_3^2} = \int_{L_R} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,X_1}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,X_2}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,X_3}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\,\lambda \qquad (73)$$

Prosta zawierająca odcinek AG przed deformacją dana jest równaniami:

$$\mathbf{X}_{AG}(\lambda) = \mathbf{X}_A + \lambda(\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_A) = \begin{cases} X_1(\lambda) = X_1^A + \lambda(X_1^G - X_1^A) = 0 + \lambda(1-0) = \lambda \\ X_2(\lambda) = X_2^A + \lambda(X_2^G - X_2^A) = 0 + \lambda(1-0) = \lambda \\ X_3(\lambda) = X_3^A + \lambda(X_3^G - X_3^A) = 0 + \lambda(1-0) = \lambda \end{cases} \qquad (74)$$

Odcinkowi AG odpowiadają wartości parametru krzywej: $\lambda \in \langle 0\ ;\ 1 \rangle$

Pochodne współrzędnych punktów krzywej względem parametru krzywej:

$$\frac{\mathrm{d}\,X_1}{\mathrm{d}\,\lambda} = 1\ ,\quad \frac{\mathrm{d}\,X_2}{\mathrm{d}\,\lambda} = 1\ ,\quad \frac{\mathrm{d}\,X_3}{\mathrm{d}\,\lambda} = 1 \qquad (75)$$

Długość odcinka AG przed deformacją:

$$L_R = \int_{AG} \mathrm{d}\,S = \int_{AG} \sqrt{\mathrm{d}\,X_1^2 + \mathrm{d}\,X_2^2 + \mathrm{d}\,X_3^2} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,X_1}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,X_2}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,X_3}{\mathrm{d}\,\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\,\lambda =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}\,\mathrm{d}\,\lambda = \int_0^1 \sqrt{3}\,\mathrm{d}\,\lambda = \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}\,\lambda = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3} \approx 1{,}732 \quad [\mathrm{m}] \qquad (76)$$

Długość krzywej zdeformowanej możemy obliczyć w sposób analogiczny, przy czym wykorzystamy tutaj zależność, która wiąże wielkość infinitezymalnego elementu liniowego przed deformacją i po deformacji:

$$\mathrm{d}\,s = \sqrt{C_{ij}\,\mathrm{d}\,X_i\,\mathrm{d}\,X_j} \qquad (77)$$

Długość odcinka AG po deformacji:

$$L = \int_L \mathrm{d}s = \int_{AG} \sqrt{C_{ij} \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j} = \int_{AG} \sqrt{C_{ij} \frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}\lambda}} \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{C_{11}\left(\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + C_{22}\left(\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + C_{33}\left(\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + 2C_{23}\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}\lambda} + 2C_{31}\frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}\lambda} + 2C_{12}\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}\lambda}} \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{5\cdot(1)^2 + 10\cdot(1)^2 + 25\cdot(1)^2 + 2\cdot(-12)\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot(-8)\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 7\cdot 1\cdot 1} \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \sqrt{14} \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \sqrt{14}\int_0^1 \mathrm{d}\lambda = \sqrt{14}\cdot 1 = \sqrt{14} \approx 3{,}742 \tag{78}$$

AD 12) OBJĘTOŚĆ BRYŁY

Objętość bryły można obliczyć jako **całkę potrójną po konfiguracji bryły**. Konfiguracja początkowa określona jest następująco:

$$V_R = \{\mathbf{X} : X_1 \in \langle 0;1\rangle \wedge X_2 \in \langle 0;1\rangle \wedge X_3 \in \langle 0;1\rangle\} \tag{79}$$

Objętość bryły przed deformacją:

$$V_R = \iiint_V \mathrm{d}V_R = \int_{X_1=0}^{1} \int_{X_2=0}^{1} \int_{X_3=0}^{1} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 = 1$$

Objętość bryły zdeformowanej możemy obliczyć w sposób analogiczny, przy czym wykorzystamy tutaj zależność, która wiąże wielkość infinitezymalnego elementu objętościowego przed deformacją i po deformacji:

$$\mathrm{d}V = J\,\mathrm{d}V_R \tag{80}$$

Objętość bryły po deformacji:

$$V = \iiint_V \mathrm{d}V = \iiint_V J\,\mathrm{d}V_R = \int_{X_1=0}^{1} \int_{X_2=0}^{1} \int_{X_3=0}^{1} (3)\mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 = \tag{81}$$

$$= 3\int_{X_1=0}^{1} \int_{X_2=0}^{1} \int_{X_3=0}^{1} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \mathrm{d}X_3 = 3\cdot 1 = 3$$