TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

FORMY ZAPISU
W RACHUNKU TENSOROWYM

FORMY ZAPISU I UMOWA SUMACYJNA

	zapis wskaźnikowy (działania na składowych tensorów w przyjętym ukł. wsp.)	**zapis macierzowy** (działania na macierzach reprezentacji tensorów w przyjętym ukł. wsp.)	**zapis absolutny** (działania tensorach bez odniesienia do jakiejkolwiek reprezentacji lub składowych)
skalar	α	α	α
wektor	v_i	$[v]=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$	$\mathbf{v}$
tensor	T_{ij}	$[T]=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$	$\mathbf{T}$
działanie tensora na wektor	$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = p_i$	$[\sigma][n]=[p] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}=\mathbf{p}$
iloczyn skalarny wektorów	$\alpha=\sum_{j=1}^{3} v_i w_i$	$\alpha=[v]^{\mathrm{T}}[w] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$	$\alpha=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
gradient wektora	$F_{ij}=X_{i,j}=\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$	$[F]=\begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$	$\mathbf{F}=\mathbf{X}\otimes\nabla_{\mathbf{x}}$

FORMY ZAPISU I UMOWA SUMACYJNA

Wykorzystywać będziemy następujące symbole

- delta Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad i = j \\ 0 & \Leftrightarrow \quad i \neq j \end{cases}$$

- symbol permutacyjny Levi-Civity

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3);(2,3,1);(3,1,2)\} \\ -1 & \Leftrightarrow \quad (i,j,k) \in \{(2,1,3);(1,3,2);(3,2,1)\} \\ 0 & \Leftrightarrow \quad \text{którykolwiek wskaźnik się powtarza} \end{cases}$$

$\leftarrow$ **parzyste** permutacje (1,2,3)

$\leftarrow$ **nieparzyste** permutacje (1,2,3)

Delta Kroneckera będzie wskaźnikowym zapisem **macierzy jednostkowej**, będącej reprezentacją **tensora jednostkowego** (**operatora tożsamościowego**)

$$\mathbf{1} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

FORMY ZAPISU I UMOWA SUMACYJNA

Celem uproszczenia zapisu złożonych wyrażeń stosuje się tzw. umowę (konwencję) sumacyjną Einsteina. W oryginalnym brzmieniu jest ona następująca:

„Jeśli w pewnym wyrażeniu indeks powtarza się dokładnie dwa razy,
raz na górze, raz na dole, oznacza to sumowanie względem tego wskaźnika
dla wszystkich wartości, jakie może przyjąć.”

Jeśli rozważa się układy kartezjańskie i ortogonalne przekształcenia układów współrzędnych nie zachodzi konieczność rozróżniania wskaźników górnych i dolnych. Będziemy zapisywać wszystkie wskaźniki na jednym poziomie, a ich powtarzanie się oznaczać będzie sumowanie.

Przykłady:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_i v_i} \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i v_i} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\sigma_{ij} n_j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j$$

$$\theta = \delta_{ik} \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{kk} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ik} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk} \text{¿} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \ddot{u}_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = u_i$$

CIAŁA ODKSZTAŁCALNE

CIAŁA ODKSZTAŁCALNE

Ciała odkształcalne – obiekty fizyczne obdarzone masą, które **mogą zmieniać swój kształt lub objętość**. **Odległość między dowolnymi dwiema cząstkami** należącymi do ciała odkształcalnego **mogą zmieniać się w czasie**.

Przeciwieństwem ciała odkształcalnego jest model **bryły sztywnej** – obiektu, w którym odległość między dowolnymi dwoma punktami należącymi do bryły jest stała w czasie.

Wyróżnia się **4 podstawowe typy materiałów,** z których mogą być wykonane ciała odkształcalne:

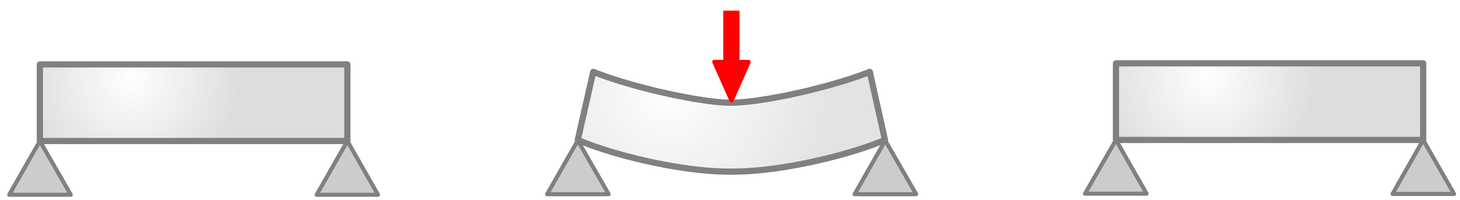
- materiały sprężyste
- materiały plastyczne
- materiały lepkie
- materiały kruche

Każdy **rzeczywisty materiał posiada w ogólności cechy każdego z tych typów**, ale np. sposób użytkowania tego ciała sprawia, że cechy jednego z nich dominują nad cechami pozostałych typów, np.

> W zakresie wystarczająco **małych obciążeń i odkształceń**, zadawanych **powoli** i na **krótki czas**, większość materiałów używanych w konstrukcji budynków i maszyn (**metale**, **drewno**, **beton**) wykazuje przede wszystkim cechy **sprężyste**.

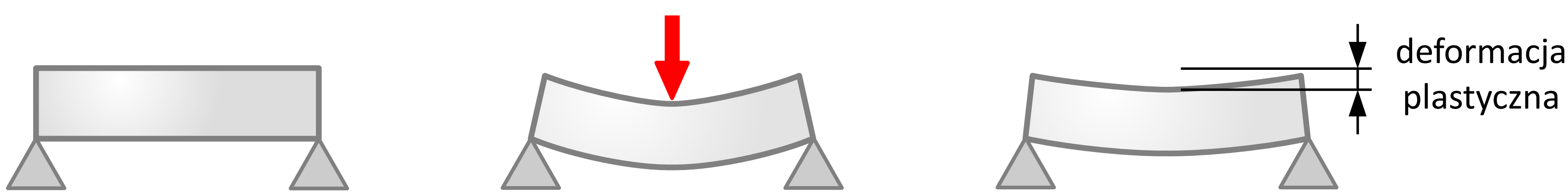
CIAŁA ODKSZTAŁCALNE

materiały sprężyste – deformują się pod zadanym wymuszeniem (siłą lub przemieszczeniem), ale **po usunięciu wymuszenia powracają do pierwotnego kształtu**.



ciało nieobciążone | obciążenie | odciążenie

materiały plastyczne – deformują się pod zadanym wymuszeniem, a po usunięciu wymuszenia zachowują zdeformowany kształt. W rzeczywistości mamy z reguły do czynienia z materiałami **sprężysto-plastycznymi**. Deformują się one sprężyście, a po przekroczeniu określonej wielkości wymuszenia również plastycznie. **Po usunięciu wymuszenia deformacja sprężysta znika, a plastyczna pozostaje**.

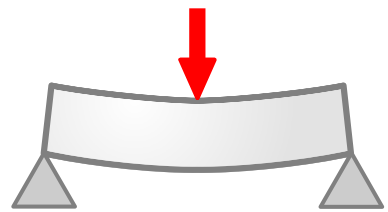


ciało nieobciążone | obciążenie powodujące przekroczenie granicy plastyczności | odciążenie

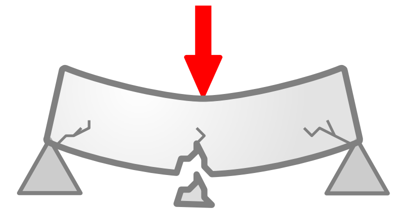
CIAŁA ODKSZTAŁCALNE

materiały kruche – deformują się pod zadanym wymuszeniem, jednak **po przekroczeniu pewnej wielkości wymuszenia materiał traci spoistość i ciągłość**.

ciało nieobciążone

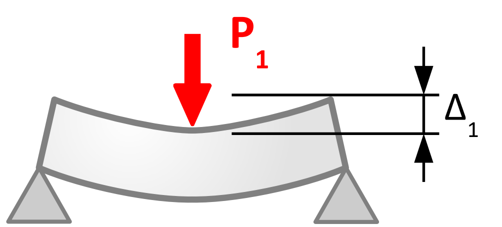


obciążenie

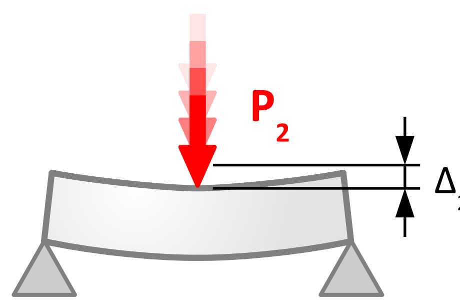


obciążenie powyżej wytrzymałości materiału

materiały lepkie (**wiskotyczne**, **reologiczne**) – charakter ich deformacji zależy nie tylko od wielkości wymuszenia, ale również od jego **historii**, np. **prędkości obciążenia**, **czasu jego trwania**, **zmian w charakterze obciążenie**. Konieczne jest uwzględnienia czynnika **czasu**.



powolne obciążenie



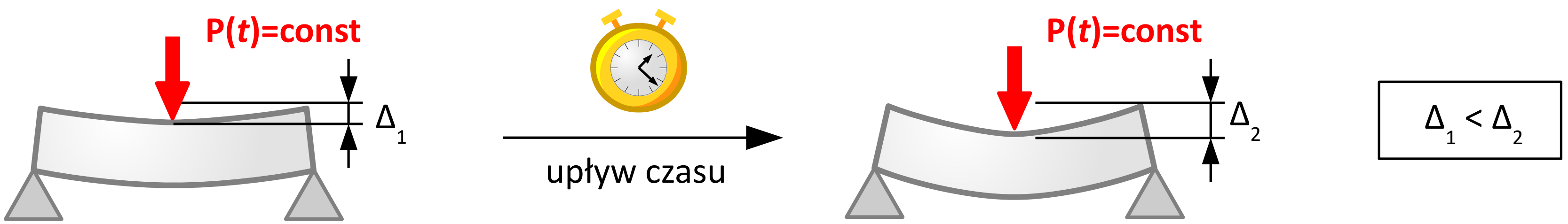
szybkie obciążenie

$$P_1 = P_2$$
$$\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}t} < \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}t}$$
$$\Delta_1 > \Delta_2$$

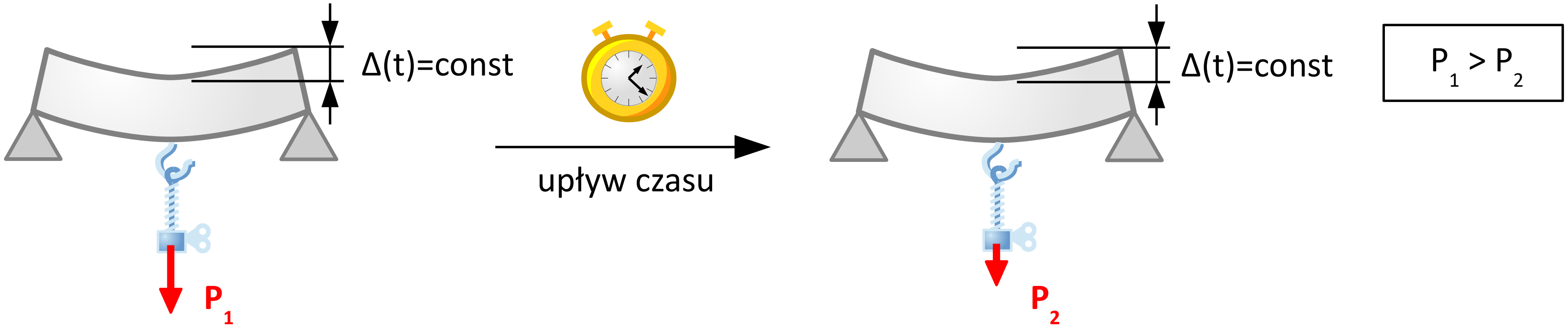
CIAŁA ODKSZTAŁCALNE

materiały lepkie (**wiskotyczne**, **reologiczne**) c.d.

- **pełzanie** – przyrost odkształcenia przy stałym w czasie obciążeniu. (problem: „ugięcia końcowe”)



- **relaksacja** – spadek naprężeń przy stałym w czasie wymuszonym przemieszczeniu (problem: spadek siły w cięgnach sprężających)



- **zmiana własności mechanicznych w czasie**, np. wytrzymałości, modułu Younga (np. dojrzewanie betonu)

CIAŁA ODKSZTAŁCALNE

Tworzy się modele matematyczne materiałów wykazujących cechy wszystkich powyższych typów np.:

- materiały sprężysto-plastyczne
- materiały lepko-sprężyste
- materiały lepko-sprężysto-plastyczne
- materiały sprężysto-plastyczno-kruche
- ...

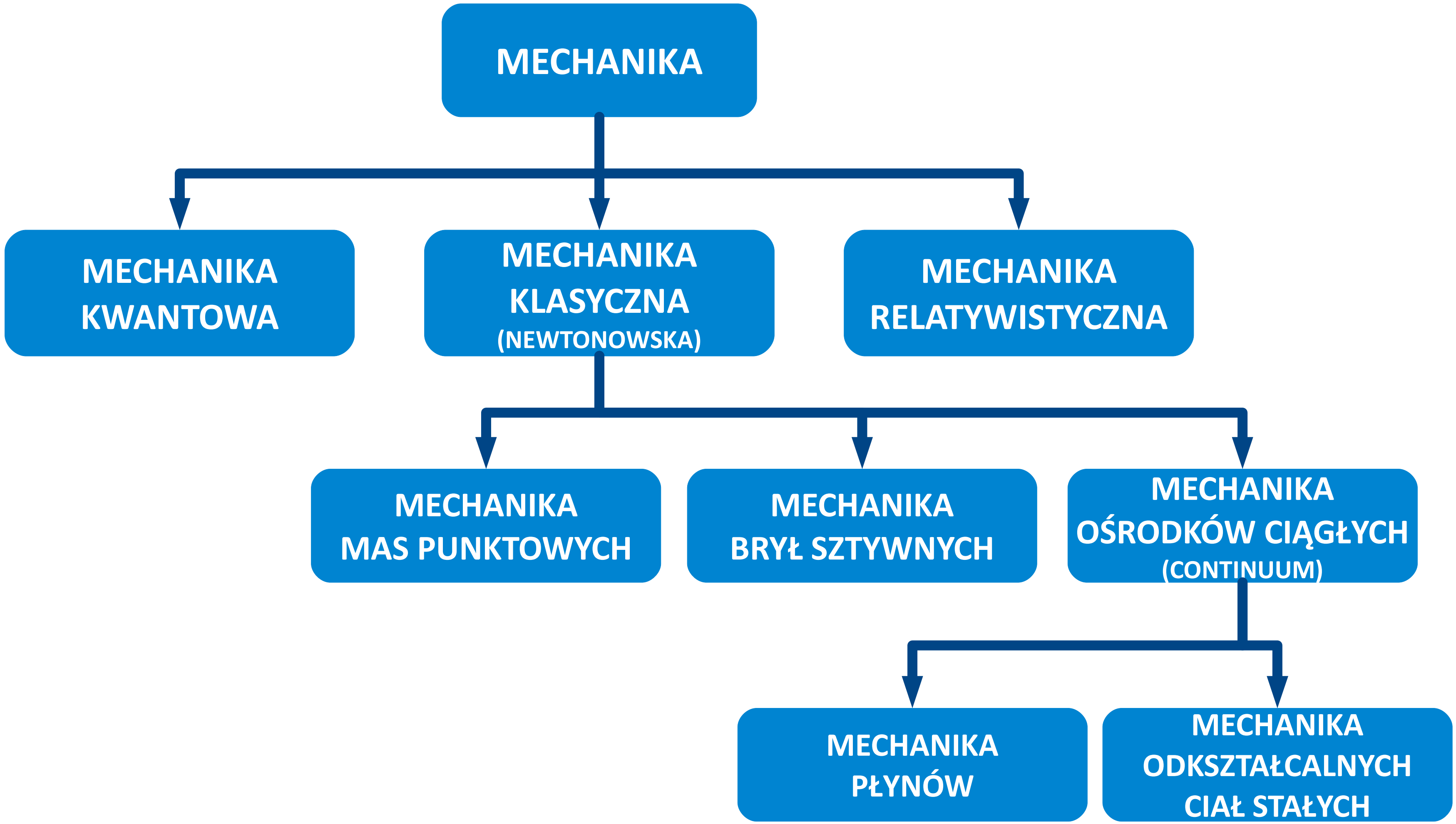
Najczęściej modele te są tak złożone, że jedyną możliwością ich praktycznego zastosowania jest wykorzystanie przybliżonych metod numerycznych, np. metoda elementów skończonych (MES)

W większości podstawowych zagadnień inżynierii lądowej, inżynierii mechanicznej i materiałowej oraz mechaniki i budowy maszyn wystarczający okazuje się model **materiału sprężystego**. Modelowaniem matematycznym ciał wykonanych z materiałów sprężystych zajmuje się **teoria sprężystości:**

- dostarcza podstawowych metod opisu i analizy deformacji ciał
- dostarcza pierwszych przybliżeń rozwiązań rzeczywistych problemów inżynierskich
- stanowi podstawę sformułowania większości zaleceń w normach konstrukcyjnych

MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH



ZAŁOŻENIA:

- obowiązują zasady dynamiki Newtona
- ciało rzeczywiste modelujemy ośrodkiem ciągłym

MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

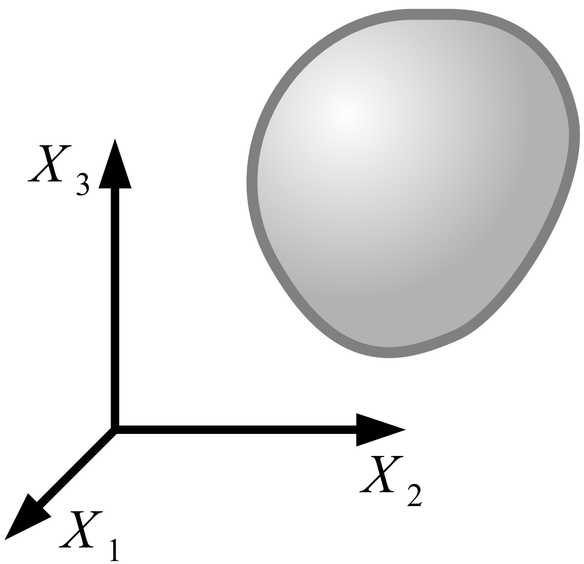
Ośrodek ciągły – matematyczny model ciała odkształcalnego. Ciało reprezentowane jest przez **podobszar trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej**, taki że można **na tym obszarze określać funkcje**, które będą **ciągłe** i **różniczkowalne** w każdym punkcie tego obszaru (**rozmaitość różniczkowa**).

- **Punkt należący do ośrodka ciągłego** nazywać będziemy cząstką – nie ma ona nic wspólnego z atomem, cząsteczką chemiczną itp.

- Cząstek jest nieprzeliczalnie nieskończenie wiele – w dowolnie małym podobszarze ośrodka ciągłego jest ich również nieskończenie wiele. To właśnie oznacza ośrodek ciągły (continuum)

Funkcje, które będziemy definiować na tym obszarze określać będą stan, w jakim znajduje się ciało, np.:

- skalarne pole temperatury $\theta(\mathbf{X})$
- wektorowe pole przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{X})$
- tensorowe pole odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$
- tensorowe pole naprężenia $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$



MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

KINEMATYKA

- **opis ruchu** ciała bez wnikania w przyczyny ruchu
- definicja **odkształcenia**
- określenie związku między odkształceniem a przemieszczeniem (**zw. geometryczne**)

STATYKA

- określenie typów sił występujących w ośrodku ciągłym
- określenie **warunków równowagi** układów sił wewnętrznych oraz sił zewnętrznych
- definicja **naprężenia**
- określenie **statycznych warunków brzegowych**

DYNAMIKA

- Określenie związku pomiędzy czynnikami wymuszającymi ruch a wynikającym ruchem (**równania ruchu**)

MODELOWANIE KONSTYTUTYWNE

- Określenie związku pomiędzy naprężeniem a odkształceniem (**zw. konstytutywne**)

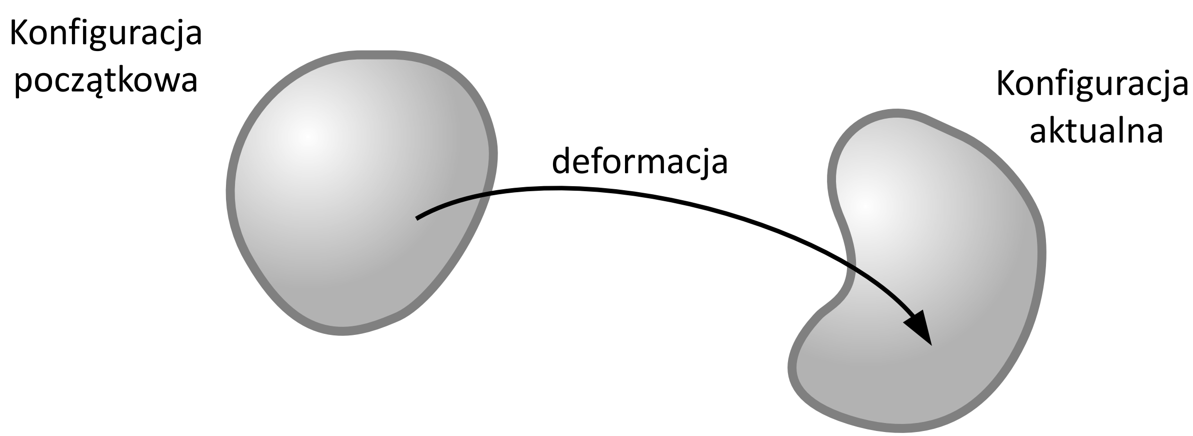
KINEMATYKA

KINEMATYKA OŚRODKA CIĄGŁEGO

Konfiguracja – podobszar przestrzeni, w którym znajdują się punkty należące do ośrodka ciągłego

Konfiguracja początkowa (**k. odniesienia**) – konfiguracja w początkowej chwili ruchu $t_0 \longrightarrow \mathcal{B}_0\ ,\quad \mathcal{B}_{ref}$

Konfiguracja aktualna – konfiguracja w bieżącej chwili ruchu $t \longrightarrow \mathcal{B}_t\ ,\quad \mathcal{B}(t)$

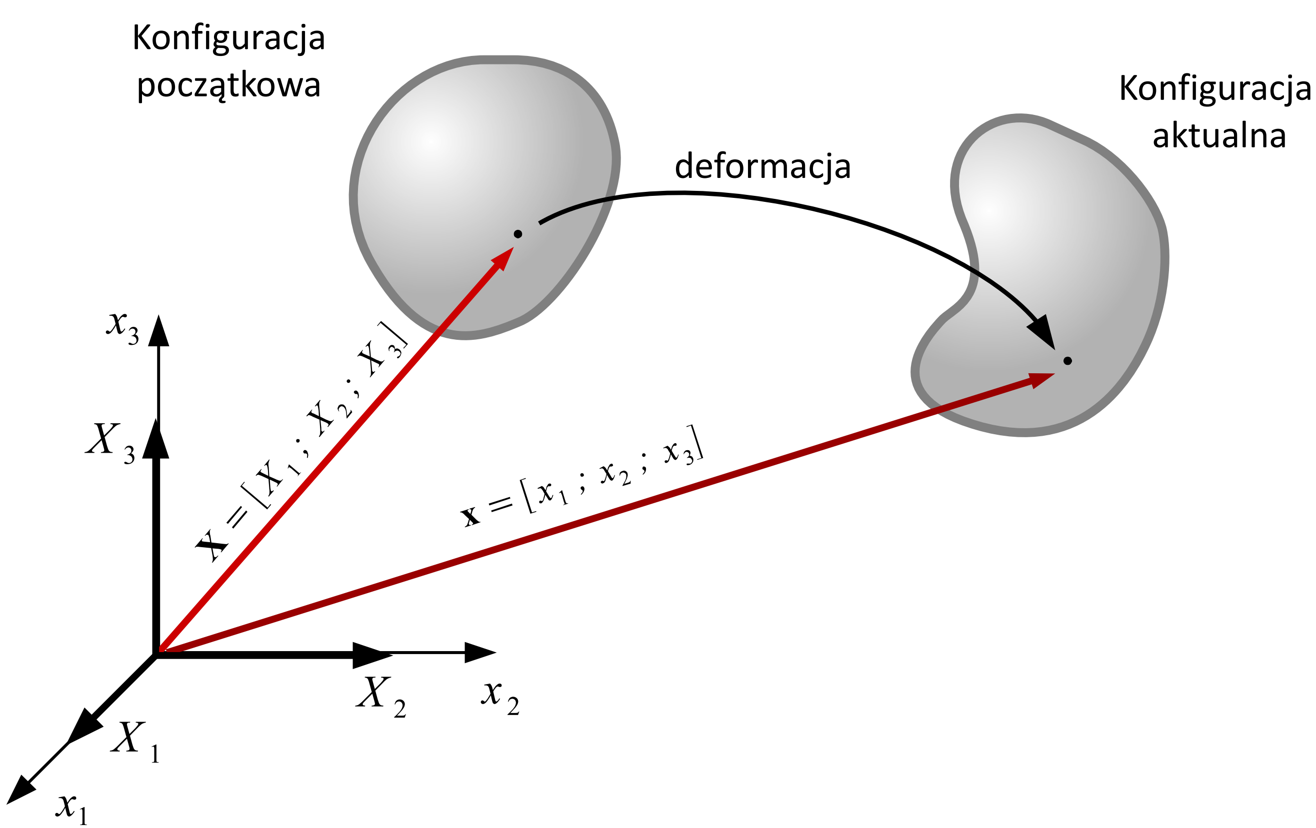


dr inż. Paweł Szeptyński

KINEMATYKA OŚRODKA CIĄGŁEGO

Wprowadzamy dwa rodzaje współrzędnych:

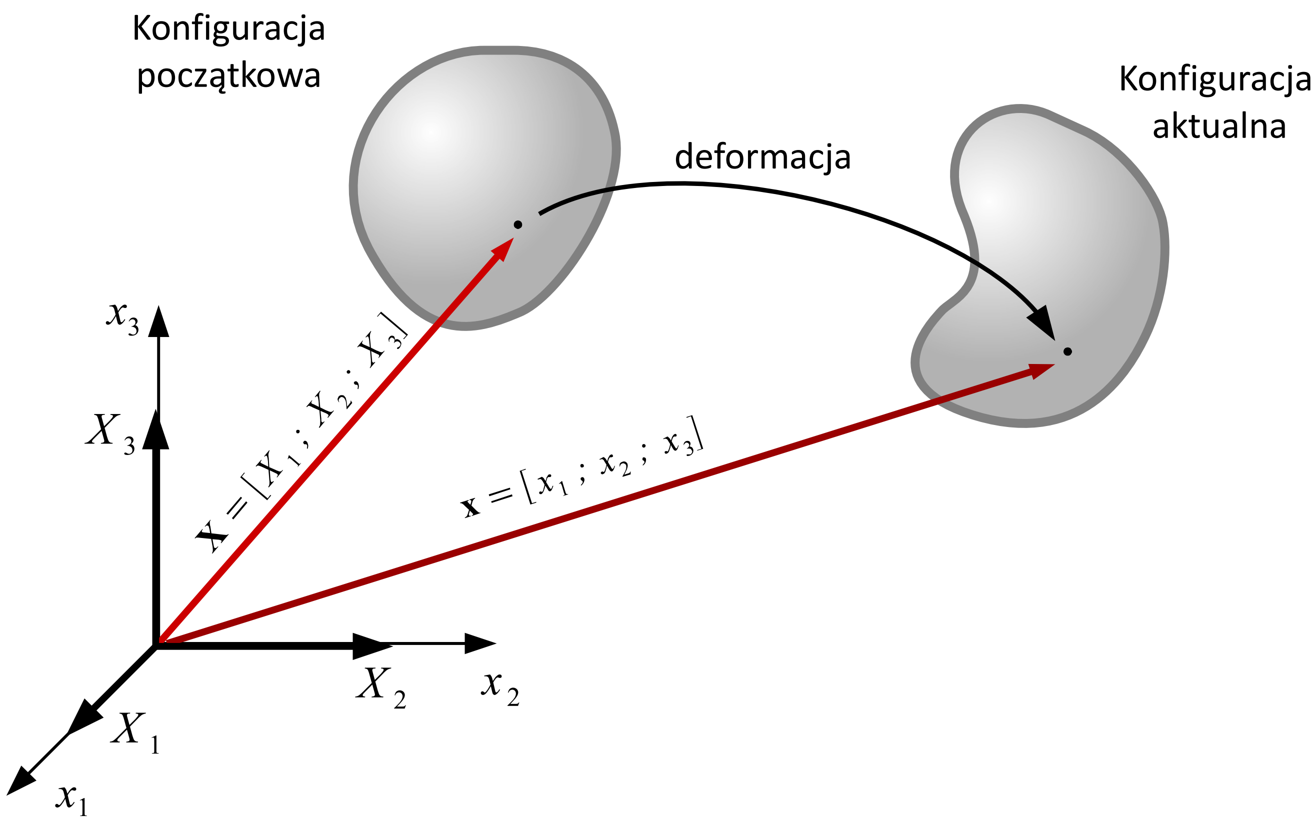
- współrzędne materialne (Lagrange'a) – położenie cząstek w **konfiguracji początkowej** $\mathbf{X}$
- współrzędne przestrzenne (Eulera) – położenie cząstek w **konfiguracji aktualnej** $\mathbf{x}(t)$



KINEMATYKA OŚRODKA CIĄGŁEGO

Wprowadzamy dwa rodzaje współrzędnych:

- współrzędne materialne (Lagrange'a) – położenie cząstek w **konfiguracji początkowej** $\mathbf{X}$
- współrzędne przestrzenne (Eulera) – położenie cząstek w **konfiguracji aktualnej** $\mathbf{x}(t)$



UWAGI:

- Współrzędne materialne i przestrzenne mogą w ogólności stanowić różne układy współrzędnych (mogą mieć różne początki, jedne mogą być kartezjańskie, a drugie walcowe itp.)
- Dla prostoty będziemy przyjmować, że oba układy są kartezjańskie i obydwa mają ten sam początek. Rysować będziemy tylko jeden układ osi.

KINEMATYKA OŚRODKA CIĄGŁEGO

współrzędne materialne – identyfikują cząstkę ciała
współrzędne przestrzenne – identyfikują punkt w przestrzeni

Aby rozwiązać zagadnienie mechaniki ośrodka ciągłego musimy znaleźć związek między współrzędnymi materialnymi a współrzędnymi przestrzennymi dla każdej chwili ruchu:

$$\mathbf{X} \xleftrightarrow{\;?\;} \mathbf{x}$$

ten związek musi być
WZAJEMNIE
JEDNOZNACZNY,
a zatem ODWRACALNY

Możemy to zrobić na dwa sposoby:

- wyznaczyć $\mathbf{x}$ (zmienna zależna), jako funkcję $\mathbf{X}$ i t (zmienne niezależne) → opis materialny (Lagrange'a)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

- wyznaczyć $\mathbf{X}$ (zmienna zależna), jako funkcję $\mathbf{x}$ i t (zmienne niezależne) → opis przestrzenny (Eulera)

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$$

OPIS MATERIALNY

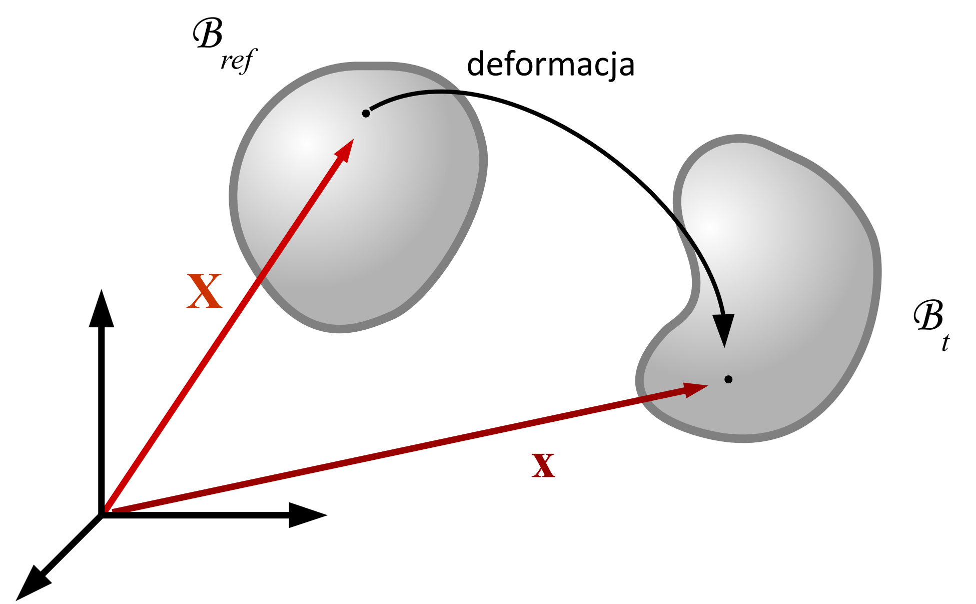
Opis materialny (opis Lagrange'a, analiza wędrowna)

- zmienne niezależne - współrzędne materialne $\mathbf{X}$
  - czas t
- zmienne zależne - współrzędne przestrzenne $\mathbf{x}$

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}$$

odpowiadamy na pytanie:

W jakim punkcie przestrzeni $\mathbf{x}$ znajduje się w chwili t cząstka, która na początku ruchu znajdowała się w punkcie przestrzeni $\mathbf{X}$?



Zakładamy, że **znamy kształt ciała przed deformacją (zakres zmienności $\mathbf{X}$)**. Opis materialny jest praktyczny przy opisie **ciał stałych**.

OPIS PRZESTRZENNY

Opis przestrzenny (opis Eulera, analiza lokalna)

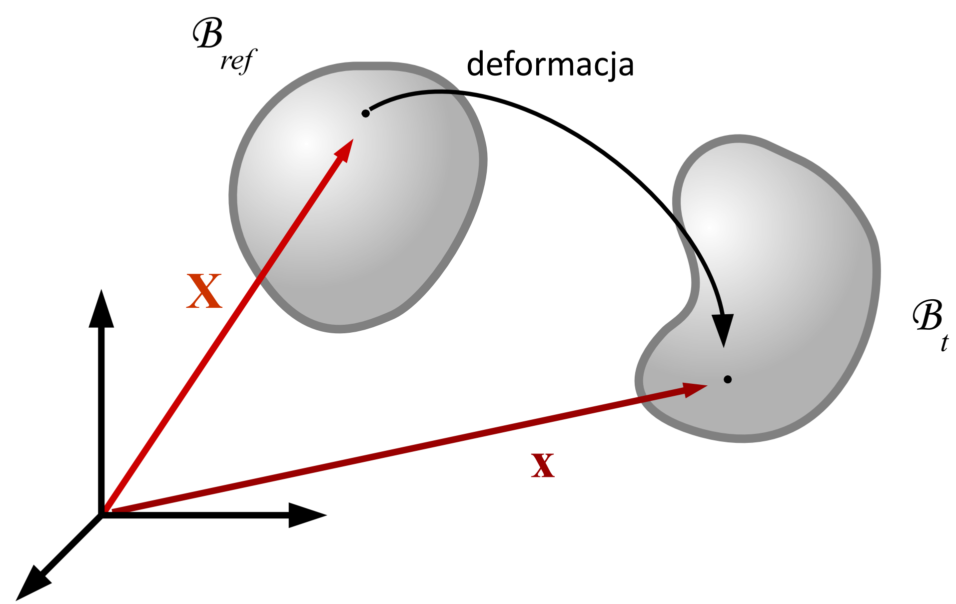
- zmienne niezależne - współrzędne przestrzenne $\mathbf{x}$
  - czas t
- zmienne zależne - współrzędne materialne $\mathbf{X}$

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}$$

odpowiadamy na pytanie:

Jaka cząstka znajduje się w chwili t w punkcie przestrzeni $\mathbf{x}$ *, tzn. jakie było jej położenie* $\mathbf{X}$ *na początku ruchu?*

Zakładamy, że **znamy obszar, w którym mogą znajdować się cząstki, np. kształt zbiornika (zakres zmienności** $\mathbf{x}$**)**. Opis przestrzenny jest praktyczny przy opisie **cieczy**.



MIARY PRZEMIESZCZENIA

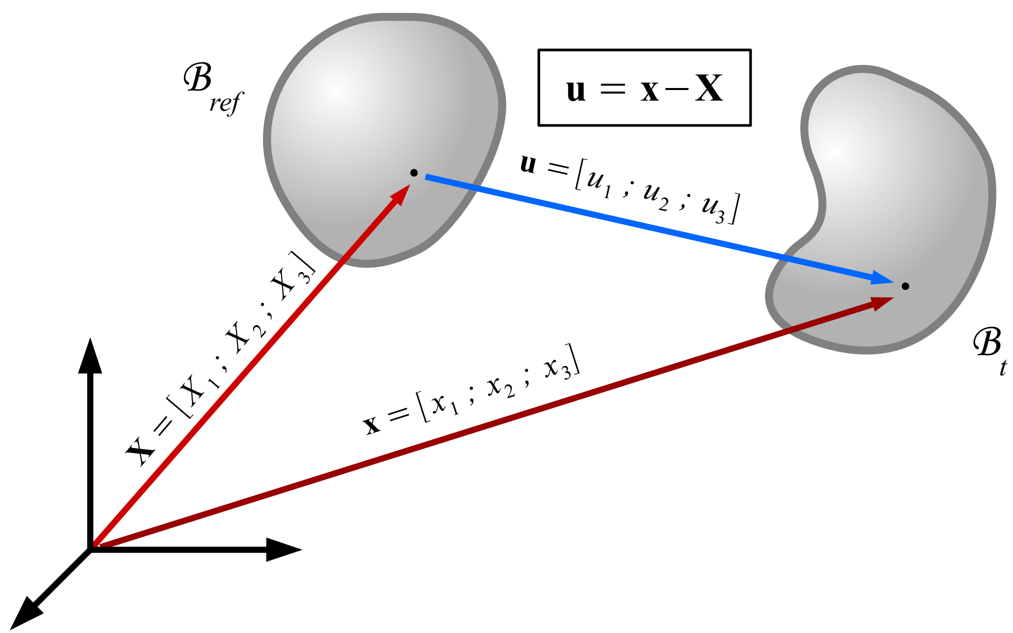
Niezależnie od wybranego opisu zdefiniować możemy:

- wektor przemieszczenia

$$\boxed{\mathbf{u} \overset{\text{df.}}{=} \mathbf{x} - \mathbf{X}}$$

w opisie materialnym jest funkcją $\mathbf{X}$: $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$

w opisie przestrzennym jest funkcją $\mathbf{x}$: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x})$



MIARY PRZEMIESZCZENIA

Niezależnie od wybranego opisu zdefiniować możemy:

- wektor prędkości $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{u}}{\mathrm{d}\,t}$
- wektor przyspieszenia $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}}{\mathrm{d}\,t}$

Operator, to operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$ **pochodnej zupełnej**, który uwzględnia również **niejawną zależność od czasu**, tj. zależność pośrednią poprzez **zależność pozostałych zmiennych niezależnych od czasu**.

Opis przestrzenny – współrzędne przestrzenne są funkcjami czasu $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial}{\partial\,t} + \frac{\partial\,x_1}{\partial\,t}\frac{\partial}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,x_2}{\partial\,t}\frac{\partial}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,x_2}{\partial\,t}\frac{\partial}{\partial\,x_2} = \frac{\partial}{\partial\,t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\,x_i}{\partial\,t}\frac{\partial}{\partial\,x_i}$$

Opis materialny – współrzędne materialne są stałe w czasie: $\mathbf{X}(t) = const.$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial}{\partial\,t}$$

GRADIENT DEFORMACJI

Liniowy element materialny albo włókno materialne – nieskończenie mały odcinek, łączący dwie cząstki.

Położenie początku włókna przed deformacją: $\mathbf{X}$
Położenie końca włókna przed deformacją: $\mathbf{X}+\mathrm{d}\mathbf{X}$

Położenie początku włókna po deformacji: $\mathbf{x}$
Położenie końca włókna po deformacji: $\mathbf{x}+\mathrm{d}\mathbf{x}$

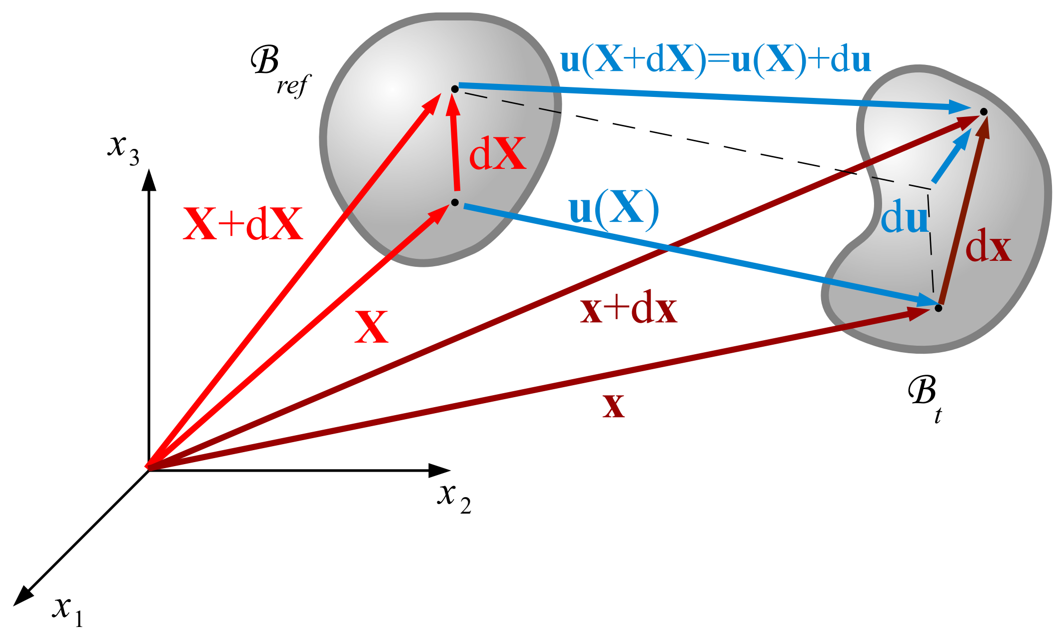
W **opisie materialnym** możemy napisać
(dla prostoty pomijając zapis zależności od t):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}+\mathrm{d}\mathbf{X})$$

Z tego wynika, że:

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}+\mathrm{d}\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X})}$$



GRADIENT DEFORMACJI

Rozważmy wyrażenie określające **liniowy element materialny po deformacji** (w notacji wskaźnikowej):

$$\mathrm{d}x_i = x_i(\mathbf{X}+\mathrm{d}\mathbf{X}) - x_i(\mathbf{X}) \qquad i=1,2,3$$

Jeśli $\mathbf{dX}$ jest małe, to pierwsze wyrażenie po prawej stronie można rozwinąć w **szereg Taylora:**

$$x_i(\mathbf{X}+\mathrm{d}\mathbf{X}) = x_i(\mathbf{X}) + \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_1}\right|_{\mathbf{X}} \mathrm{d}X_1 + \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_2}\right|_{\mathbf{X}} \mathrm{d}X_2 + \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_3}\right|_{\mathbf{X}} \mathrm{d}X_3 + \ldots$$

Kolejne wyrazy tego rozwinięcia zależą od iloczynów składowych $\mathbf{dX}$. Jeśli te składowe są znacznie mniejsze od jedności, to ich iloczyny są bliskie 0. Jeśli pominiemy wszystkie te kolejne wyrazy, to otrzymamy:

$$\mathrm{d}x_i \approx \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathrm{d}X_j$$

Napiszemy:

$$\mathrm{d}x_i \approx F_{ij}\,\mathrm{d}X_j \qquad i=1,2,3 \qquad \text{gdzie} \qquad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \qquad i,j=1,2,3$$

GRADIENT DEFORMACJI

W **zapisie macierzowym**, związek ten ma postać:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\,x_1 \\ \mathrm{d}\,x_2 \\ \mathrm{d}\,x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}\,X_1 \\ \mathrm{d}\,X_2 \\ \mathrm{d}\,X_3 \end{bmatrix} \qquad \text{gdzie} \qquad F_{ij} = \frac{\partial\, x_i}{\partial\, X_j}$$

W **zapisie absolutnym**:

$$\boxed{\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \mathbf{F}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X}}$$

Obiekt zdefiniowany następująco

$$\boxed{F_{ij} = \frac{\partial\, x_i}{\partial\, X_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{F} = \frac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial\,\mathbf{X}}}$$

nazywamy materialnym gradientem deformacji. Można udowodnić, że jest to **tensor**. Jest to tensor w ogólności **niesymetryczny**.

GRADIENT DEFORMACJI

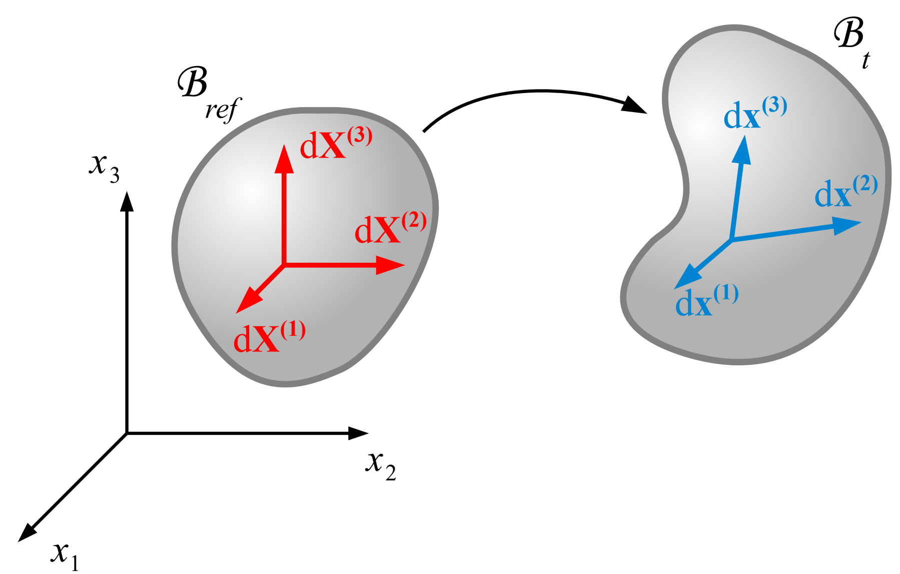
Składowe gradientu deformacji to **funkcje punktu** – pochodne współrzędnych przestrzennych względem współrzędnych materialnych.

$$F_{ij}(\mathbf{X}) = \left.\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right|_{\mathbf{X}}$$

Nie niosą ze sobą informacji o przemieszczeniach niezależnych od współrzędnych materialnych, tj. o przemieszczeniach stałych („znikają” w trakcie różniczkowania) – **tracimy informację o przesunięciu równoległym** (bez obrotu i odkształcenia), tj. **o translacji ciała**.

Składowe i-tej kolumny gradientu deformacji to składowe wektora opisującego zdeformowane włókno materialne, które przed deformacją było równoległe do i-tej osi przyjętego układu współrzędnych.

$$\mathrm{d}\mathbf{X}^{(1)}=[1;0;0] \qquad \mathrm{d}\mathbf{x}^{(1)}=[F_{11};F_{21};F_{31}]$$
$$\mathrm{d}\mathbf{X}^{(2)}=[0;1;0] \qquad \mathrm{d}\mathbf{x}^{(2)}=[F_{12};F_{22};F_{32}]$$
$$\mathrm{d}\mathbf{X}^{(3)}=[0;0;1] \qquad \mathrm{d}\mathbf{x}^{(3)}=[F_{13};F_{23};F_{33}]$$



GRADIENT DEFORMACJI

W analogiczny sposób można skonstruować przestrzenny gradient deformacji, zdefiniowany następująco:

$$f_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}$$

Mamy wtedy:

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Zachodzi oczywiście:

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{F}\left(\mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{F}\mathbf{f}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{X} = \mathbf{f}\ \mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{f}\left(\mathbf{F}\ \mathrm{d}\mathbf{X}\right) = \left(\mathbf{f}\mathbf{F}\right)\mathrm{d}\mathbf{X}$$

Skoro ma to zachodzić dla dowolnych włókien, zatem

$$\mathbf{F}\mathbf{f} = \mathbf{f}\mathbf{F} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \ \wedge \ \mathbf{F} = \mathbf{f}^{-1}$$

GRADIENT DEFORMACJI

Aby tensor (lub macierz) był **odwracalny**, jego **wyznacznik musi być różny od zera**. Wyznacznik materialnego gradientu deformacji nazywać będziemy w skrócie jakobianem:

$$J = \det(\mathbf{F}) \neq 0$$

Wyznacznik tensora odwrotnego jest jego odwrotnością

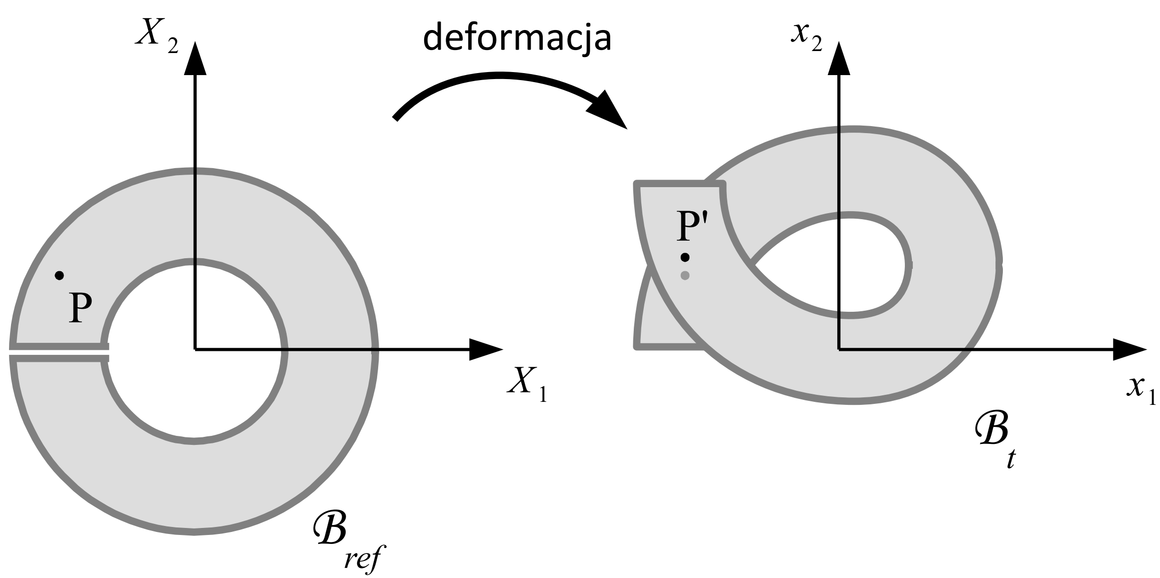
$$\det(\mathbf{f}) = \det(\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{J} \neq 0$$

Warunek, aby związki deformacyjne były wzajemnie jednoznaczne i przez to odwracalne, wymaga, aby jakobian był różny od 0. Okazuje się jednak, że ujemne wartości jakobianu pojawiają się w sytuacjach, gdy ciało w wyniku deformacji staje się „wywleczone na lewą stronę” (objętość ma ujemną miarę) - sytuacje takie będziemy odrzucać. Wymagamy zatem, aby **jakobian był dodatni:**

$$J > 0$$

GRADIENT DEFORMACJI

Niezerowanie się jakobianu zapewnia **jedynie** lokalną **odwracalność związków deformacyjnych**. Związki takie mogą być w dalszym ciągu globalnie nieodwracalne, np. w sytuacji gdy odległe części ciała w wyniku deformacji „zachodzą na siebie”, tj. zajmują w przestrzeni ten sam obszar.



$$J > 0$$

Sytuacje takie zachodzą przede wszystkim dla **dużych przemieszczeń** lub **dużych odkształceń**. W podstawowym swoim sformułowaniu **równania teorii sprężystości nie gwarantują globalnej odwracalności** związków deformacyjnych. Wymaga to śledzenia deformacji na kolejnych jej etapach, a w przypadku zajścia kontaktu odległych części ciała, uwzględnienia stosownych warunków brzegowych. Analiza taka jest uwzględniana w zaawansowanych metodach numerycznych.

ROZKŁAD BIEGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

Można udowodnić następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE BIEGUNOWYM GRADIENTU DEFORMACJI

Dla każdego **dodatnio określonego** $(J > 0)$ materialnego gradientu deformacji $\mathbf{F}$ **jednoznacznie** określone są następujące tensory:

- $\mathbf{U}$ – prawy tensor rozciągnięcia - symetryczny: $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad U_{ij} = U_{ji}$
- $\mathbf{V}$ – lewy tensor rozciągnięcia - symetryczny: $\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V} \quad \Leftrightarrow \quad V_{ij} = V_{ji}$
- $\mathbf{R}$ – tensor obrotu - ortogonalny: $\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathbf{R} = 1$

takie, że:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{V}\,\mathbf{R}$$

Zachodzi przy tym:

$$\det \mathbf{U} = \det \mathbf{F} = J > 0$$

ROZKŁAD BIEGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

INTERPRETACJA FIZYCZNA TENSORA OBROTU

Rozważmy sytuację, gdy **tensor rozciągnięcia jest jednostkowy**. **Gradient deformacji jest tożsamy z tensorem obrotu**.

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}$$

Długość dowolnego włókna materialnego przed deformacją możemy obliczyć następująco:

$$|\mathrm{d}\,\mathbf{X}| = \sqrt{\mathrm{d}\,\mathbf{X} \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{X}} = \sqrt{(\mathrm{d}\,\mathbf{X})^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\,\mathbf{X}}$$

To samo **włókno po deformacji** opisuje wektor: $\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \mathbf{F}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X} = \mathbf{R}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X}$

Podobnie obliczamy **długość** tego samego włókna **po deformacji** dla $\mathbf{F} = \mathbf{R}$

$$|\mathrm{d}\,\mathbf{x}| = |\mathbf{R}\,\mathrm{d}\,\mathbf{X}| = \sqrt{(\mathbf{R}\,\mathrm{d}\,\mathbf{X})^{\mathrm{T}} \mathbf{R}\,\mathrm{d}\,\mathbf{X}} = \sqrt{(\mathrm{d}\,\mathbf{X})^{\mathrm{T}} \underbrace{\mathbf{R}^{\mathbf{T}} \mathbf{R}}_{=\mathbf{1}} \mathrm{d}\,\mathbf{X}} = \sqrt{(\mathrm{d}\,\mathbf{X})^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\,\mathbf{X}} = |\mathrm{d}\,\mathbf{X}|$$

W wyniku deformacji **włókno nie zmieniło długości** – a zatem doznało **obrotu** (i/lub translacji).

ROZKŁAD BIEGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

INTERPRETACJA FIZYCZNA TENSORA ROZCIĄGNIĘCIA

Rozważmy sytuację, gdy **tensor obrotu jest jednostkowy. Gradient deformacji jest tożsamy z tensorami rozciągnięcia**.

$$\mathbf{R} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$$

Dowolne **włókno materialne po deformacji** opisuje wektor

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \mathbf{F}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X} = \mathbf{U}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X}$$

Ponieważ tensor $\mathbf{U}$ jest **symetryczny**, wiemy zatem z rozwiązania jego zagadnienia własnego, że

- istnieją 3 **rzeczywiste** liczby λ_k (wartości własne $\mathbf{U}$)
- i istnieją 3 wzajemnie prostopadłe wektory $\mathbf{u}^{(k)}$ (wektory własne $\mathbf{U}$) (k=1,2,3), takie że

$$\mathbf{U}\,\mathbf{u}^{(k)} = \lambda_k\,\mathbf{u}^{(k)}\,, \qquad k = 1,2,3$$

Wektory własne $\mathbf{U}$ nie zmieniają kierunku, a jedynie długość. Ulegają λ-krotnemu wydłużeniu.

ROZKŁAD BIEGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

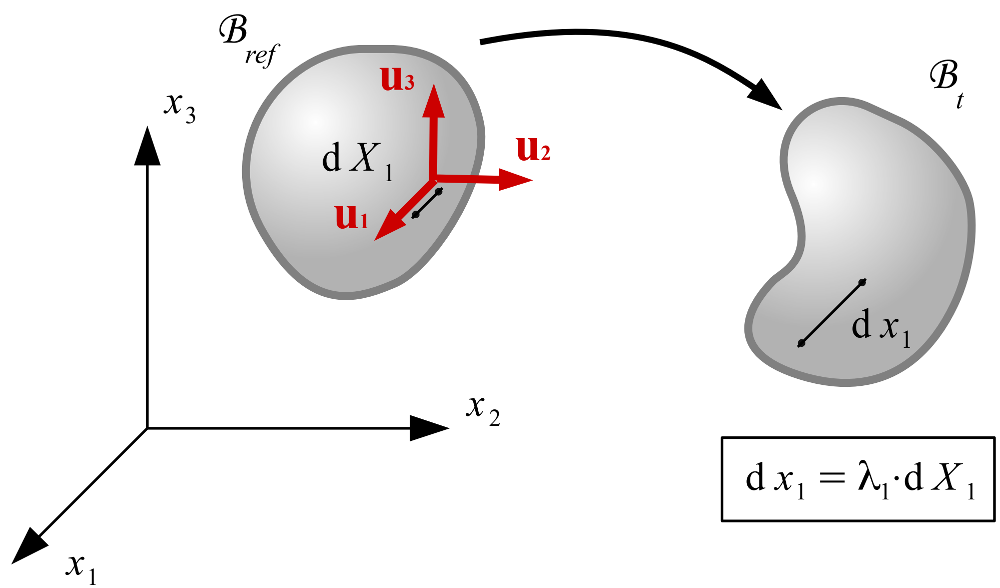
INTERPRETACJA FIZYCZNA TENSORA ROZCIĄGNIĘCIA

Rozważając dalej sytuację, gdy **tensor obrotu jest jednostkowy, a gradient deformacji jest tożsamy z tensorami rozciągnięcia**, jeśli przyjmiemy układ współrzędnych, którego osie są równoległe do osi własnych tensora rozciągnięcia, wtedy:

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}_1 = \mathbf{U}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_1 = \lambda_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_1$$

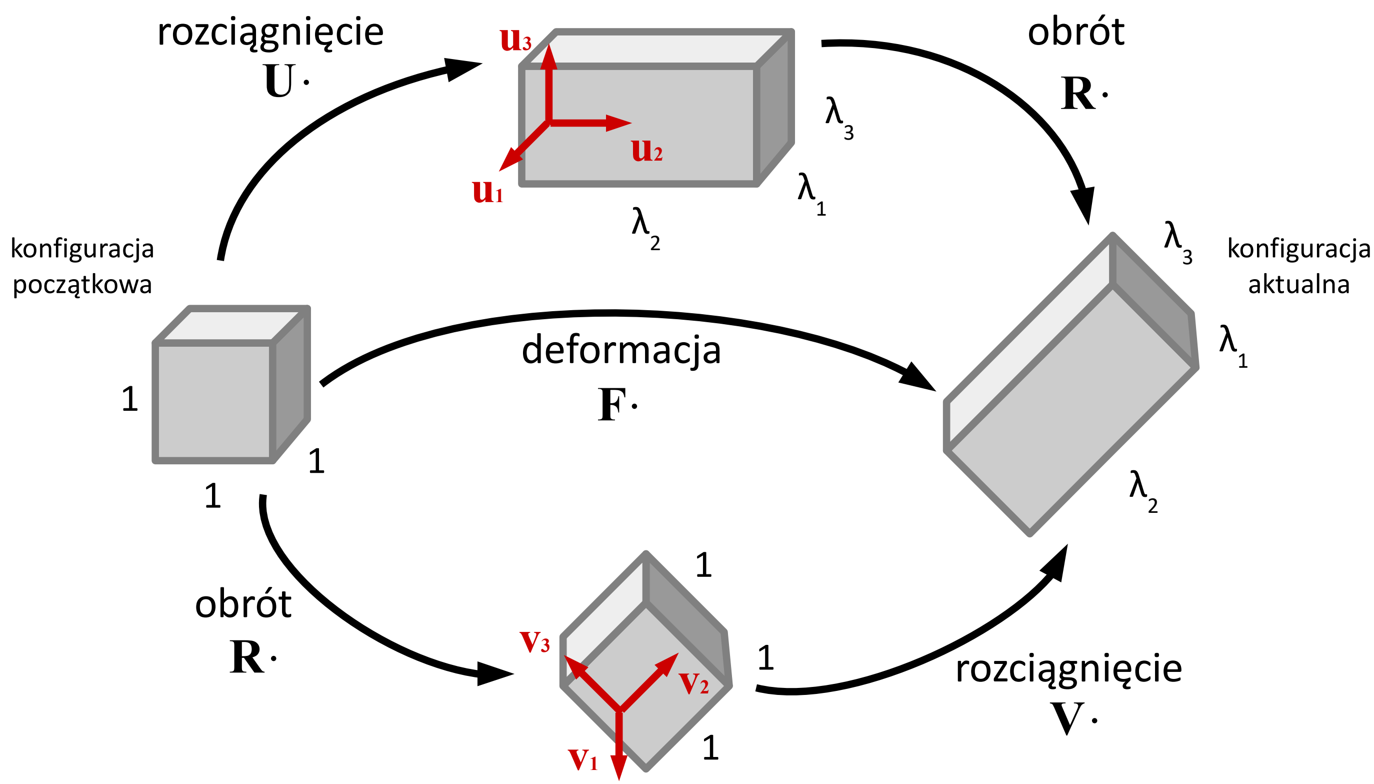
$$\mathrm{d}\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}_2 = \mathbf{U}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_2 = \lambda_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_2$$

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_3 = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}_3 = \mathbf{U}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_3 = \lambda_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}_3$$



Włókna materialne równoległe do osi własnych tensora rozciągnięcia nie zmieniają kierunku, a jedynie długość. Wartości własne tensora rozciągnięcia nazywamy rozciągnięciami głównymi.

ROZKŁAD BIEGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI



UWAGI:

- wartości własne tensorów $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ są takie same.
- Tensory $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ różnią się tylko kierunkiem ich wektorów własnych.
- Tensor $\mathbf{U}$ można otrzymać z tensora $\mathbf{V}$ za pomocą obrotu danego tensorem obrotu $\mathbf{R}$:

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{R}} \qquad \boxed{\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}}$$

ROZKŁAD BIEGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

Podsumowując powyższe rozważania, można sformułować następujące

FUNDAMENTALNE TWIERDZENIE KINEMATYKI OŚRODKA CIĄGŁEGO

Deformacja dowolnego włókna materialnego w otoczeniu każdego punktu ciała jest złożeniem ***przesunięcia równoległego*** *(translacji),* ***obrotu*** *oraz* ***rozciągnięcia*** */* ***skrócenia*** *wzdłuż kierunków własnych tensora rozciągnięcia.*

GRADIENT PRZEMIESZCZENIA

Analogicznie do definicji gradientu deformacji, zdefiniować możemy

- materialny gradient przemieszczenia

$$\boxed{H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}}$$

- przestrzenny gradient przemieszczenia

$$\boxed{h_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}}$$

Wykorzystując definicję wektora przemieszczenia możemy napisać:

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_j}(x_i - X_i) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1}}$$

$$h_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i - X_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - f_{ij} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{h} = \mathbf{1} - \mathbf{f}}$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ