TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

MIARY ODKSZTAŁCENIA

MIARY ODKSZTAŁCENIA

Poznaliśmy już następujące **miary deformacji**:

- gradient deformacji – informacja o **deformacji włókien materialnych:**

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}}$$ (opis materialny)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}}$$ (opis przestrzenny)

- gradient przemieszczenia – informacja o **deformacji włókien materialnych:**

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}\right|_{\mathbf{X}} - \mathbf{1}$$ (opis materialny)

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} - \left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}}$$ (opis przestrzenny)

- tensory rozciągnięcia $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ – informacja o **wydłużeniu** włókien materialnych
- tensor obrotu $\mathbf{R}$ – informacja o **obrocie** włókien materialnych

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{V}\,\mathbf{R}$$ (opis materialny)

MIARY ODKSZTAŁCENIA

UWAGA:

Materialny gradient deformacji jest właściwy dla **opisu materialnego**, ponieważ w opisie tym **współrzędne przestrzenne są funkcjami współrzędnym materialnych** i składowe tego tensora obliczamy przez różniczkowanie związków deformacyjnych względem przyjętych zmiennych niezależnych:

$$F_{ij}(\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial X_j}\left[x_i(X_1, X_2, X_3)\right]\Big|_{\mathbf{X}}$$

Jeśli jednak znamy związek $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ oraz związek odwrotny $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$, to możemy również określić postać **materialnego gradientu deformacji** w **opisie przestrzennym**.

$$F_{ij}(\mathbf{x}) = F_{ij}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$$

To samo dotyczy wszystkich innych tensorów. Przy znajomości związków deformacyjnych **każdy można zapisać jako funkcję bądź współrzędnych materialnych** (opis materialny) **bądź współrzędnych przestrzennych** (opis przestrzenny). Jest to jednak zabieg bardzo niepraktyczny.

TENSOR DEFORMACJI

Obliczmy **długość liniowego elementu materialnego po deformacji w opisie materialnym**, tj. próbując wyrazić go poprzez wielkości opisujące ten sam element przed deformacją:

$$|\mathrm{d}\mathbf{x}| = \sqrt{\mathrm{d}\mathbf{x}\cdot\mathrm{d}\mathbf{x}} = \sqrt{(\mathrm{d}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{x}} = \sqrt{(\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}(\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X})} = \sqrt{(\mathrm{d}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{X}} = \sqrt{\underbrace{F_{ki}F_{kj}}_{=C_{ij}}\mathrm{d}X_i\,\mathrm{d}X_j} = \sqrt{C_{ij}\,\mathrm{d}X_i\,\mathrm{d}X_j}$$

Definiujemy materialny tensor deformacji (prawy tensor deformacji Cauchy'ego – Greena) następująco:

$$\boxed{C_{ij} = F_{ki}F_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}}$$

Po rozpisaniu:

$$C_{ij} = F_{1i}F_{1j} + F_{2i}F_{2j} + F_{3i}F_{3j} = \frac{\partial x_1}{\partial X_i}\frac{\partial x_1}{\partial X_j} + \frac{\partial x_2}{\partial X_i}\frac{\partial x_2}{\partial X_j} + \frac{\partial x_3}{\partial X_i}\frac{\partial x_3}{\partial X_j}$$

W zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

TENSOR DEFORMACJI

Mnożenie jest przemienne, zatem **tensor deformacji jest symetryczny**:

$$C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial x_k}{\partial X_j}\frac{\partial x_k}{\partial X_i} = C_{ji}$$

Znaczenie tensora deformacji można opisać następująco:

Kwadrat długości włókna po deformacji jest formą kwadratową* składowych wektora opisujących to włókno przed deformacją, a współczynnikami tej formy są składowe tensora deformacji:

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}\,\mathbf{x}|^2 &= C_{ij}\,\mathrm{d}X_i\,\mathrm{d}X_j = \\ &= C_{11}\,\mathrm{d}X_1^2 + C_{22}\,\mathrm{d}X_2^2 + C_{33}\,\mathrm{d}X_3^2 + 2\left(C_{23}\,\mathrm{d}X_2\,\mathrm{d}X_3 + C_{31}\,\mathrm{d}X_3\,\mathrm{d}X_1 + C_{12}\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2\right) = \\ &= \begin{bmatrix}\mathrm{d}X_1\\ \mathrm{d}X_2\\ \mathrm{d}X_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathrm{d}X_1\\ \mathrm{d}X_2\\ \mathrm{d}X_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

*forma kwadratowa – funkcja przypisująca wektorowi skalar, będący sumą jednomianów stopnia drugiego (składowe wektora występują tam w kwadracie lub w iloczynie dwóch pierwszych potęg składowych)

TENSOR DEFORMACJI

Korzystając z rozkładu biegunowego materialnego gradientu deformacji możemy napisać:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = (\mathbf{R}\,\mathbf{U})^{\mathrm{T}}(\mathbf{R}\,\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{U}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{U}^{2}$$

Tensor deformacji jest kwadratem prawego tensora rozciągnięcia (w sensie: iloczynu $\mathbf{U}\mathbf{U}=\mathbf{U}^2$).

W układzie osi własnych reprezentacja macierzowa tensora ma postać diagonalną, zatem:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \begin{bmatrix} U_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & U_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & U_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

Skąd płynie wniosek, że:

- tensory $\mathbf{C}$ i $\mathbf{U}$ mają te same osie własne (wektory własne)
- wartości własne $\mathbf{C}$ są kwadratami wartości własnych $\mathbf{U}$.

To spostrzeżenie staje się podstawą praktycznej realizacji rachunkowej rozkładu biegunowego.

TENSOR DEFORMACJI

Obliczmy **długość liniowego elementu materialnego przed deformacją w opisie przestrzennym**, tj. próbując wyrazić go poprzez wielkości opisujące ten sam element po deformacji:

$$|\mathrm{d}\mathbf{X}| = \sqrt{\mathrm{d}\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}} = \sqrt{(\mathrm{d}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\mathbf{X}} = \sqrt{(\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{x})} = \sqrt{(\mathrm{d}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\mathbf{x}} = \sqrt{\underbrace{f_{ki}f_{kj}}_{=c_{ij}}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j} = \sqrt{c_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j}$$

Definiujemy **przestrzenny tensor deformacji** następująco:

$$\boxed{c_{ij} = f_{ki}f_{kj} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{c} = \mathbf{f}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}}$$

TENSOR DEFORMACJI

W różnych zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych użyteczne okazują się następujące tensory:

- materialny tensor deformacji (prawy tensor deformacji Cauchy'ego – Greena)

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

opis materialny

- lewy tensor deformacji Cauchy'ego – Greena

$$B_{ij} = F_{ik} F_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^2$$

opis materialny

- przestrzenny tensor deformacji (tensor deformacji Cauchy'ego)

$$c_{ij} = f_{ki} f_{kj} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}$$

opis przestrzenny

- tensor Fingera

$$b_{ij} = f_{ik} f_{jk} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} = \mathbf{f} \mathbf{f}^{\mathrm{T}}$$

opis przestrzenny

TENSOR DEFORMACJI

UWAGI:

- Gdy **nie zachodzi żadna deformacja**, wtedy:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{1}$$

- Z zależności między materialnym i przestrzennym gradientem deformacji mamy:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{b} = \left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\right)\left(\mathbf{f}\,\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\underbrace{\left(\mathbf{F}\,\mathbf{f}\right)}_{=\mathbf{1}}\mathbf{f}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathrm{T}} = \underbrace{\left(\mathbf{f}\,\mathbf{F}\right)}_{=\mathbf{1}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{b} = \mathbf{C}^{-1}\,, \quad \mathbf{C} = \mathbf{b}^{-1}}$$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{c} = \left(\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\right) = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{f} = \mathbf{F}\underbrace{\left(\mathbf{f}\,\mathbf{F}\right)}_{=\mathbf{1}}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} = \underbrace{\mathbf{f}\,\mathbf{F}}_{=\mathbf{1}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{c}^{-1}}$$

TENSOR ODKSZTAŁCENIA

Obliczmy **różnicę kwadratów długości włókna po deformacji i przed deformacją**:

$$|\mathrm{d}\,\mathbf{x}|^2 - |\mathrm{d}\,\mathbf{X}|^2$$

Dostarczy nam to **nowej miary deformacji**:

- jeśli włókno się **wydłużyło** → miara ta jest **dodatnia**
- jeśli włókno się **skróciło** → miara ta jest **ujemna**
- jeśli włókno **nie zmieniło długości** → miara ta jest **zerowa**

Miarę tę nazywać będziemy odkształceniem.

TENSOR ODKSZTAŁCENIA

W **opisie materialnym:**

$$|\mathrm{d}\mathbf{x}|^2 - |\mathrm{d}\mathbf{X}|^2 = \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_i = C_{ij} \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j - \delta_{ij} \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j =$$

$$= (C_{ij} - \delta_{ij}) \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j = 2 \cdot \underbrace{\frac{C_{ij} - \delta_{ij}}{2}}_{= E_{ij}} \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j = 2 E_{ij} \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_j$$

Materialny tensor odkształcenia (**tensor odkształcenia Greena – de Saint-Venanta**, **tensor odkształcenia Greena – Lagrange'a**) definiujemy następująco:

$$\boxed{E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})}$$

UWAGI:

- tensor odkształcenia jest **symetryczny:** $E_{ij} = E_{ji}$
- przy **braku deformacji**, tensor odkształcenia jest **tensorem zerowym**: $\mathbf{F} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{C} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{E} = \mathbf{0}$

TENSOR ODKSZTAŁCENIA

W **opisie przestrzennym:**

$$|\mathrm{d}\mathbf{x}|^2 - |\mathrm{d}\mathbf{X}|^2 = \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}X_i \mathrm{d}X_i = \delta_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j - c_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j =$$

$$= (\delta_{ij} - c_{ij}) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = 2 \cdot \underbrace{\frac{\delta_{ij} - c_{ij}}{2}}_{= e_{ij}} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j = 2 e_{ij} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$$

Przestrzenny tensor odkształcenia (**tensor odkształcenia Almansiego – Hamela**) definiujemy następująco:

$$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c})}$$

UWAGI:

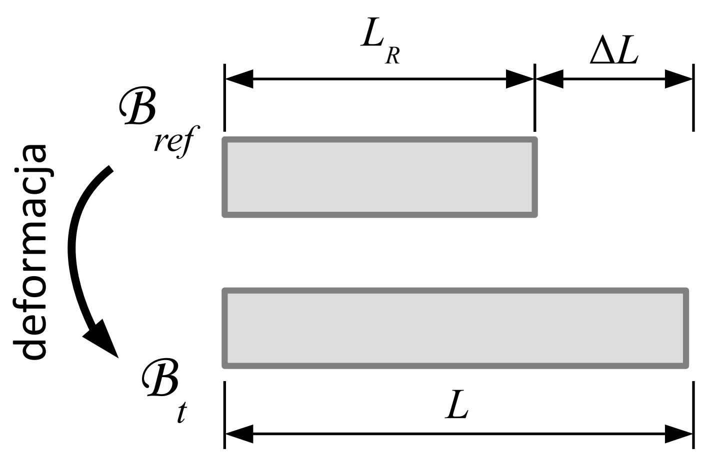
- tensor odkształcenia jest **symetryczny:** $e_{ij} = e_{ji}$
- przy **braku deformacji**, tensor odkształcenia jest **tensorem zerowym**: $\mathbf{f} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \mathbf{e} = \mathbf{0}$

INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE JEDNOIMIENNE – WYDŁUŻENIA WZGLĘDNE

Rozciągnięciem nazywamy **stosunek długości po deformacji do długości początkowej**.

Wydłużeniem względnym nazywamy **stosunek przyrostu długości do długości początkowej**



$$\lambda = \frac{L}{L_R}$$ – rozciągnięcie

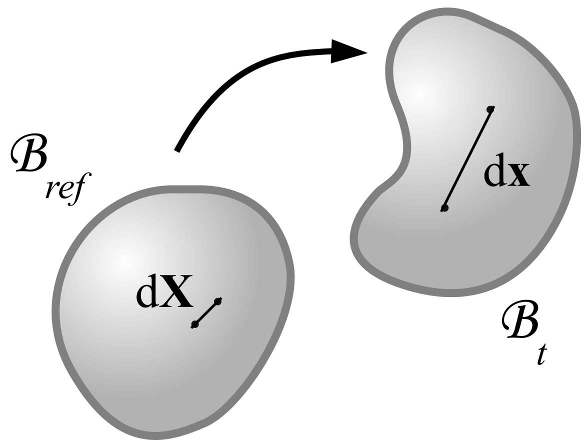
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_R}$$ – wydłużenie względne

$$\boxed{\lambda = 1 + \varepsilon}$$

INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE JEDNOIMIENNE – WYDŁUŻENIA WZGLĘDNE

Rozważmy włókno, które przed deformacją było równoległe do osi X_1 :



- włókno materialne: $\mathrm{d}\mathbf{X} = [\mathrm{d}X_1\ ;\ 0\ ;\ 0]$
- długość przed deformacją: $|\mathrm{d}\mathbf{X}| = \mathrm{d}X_1$
- długość po deformacji: $|\mathrm{d}\mathbf{x}| = \sqrt{C_{ij}\mathrm{d}X_i\mathrm{d}X_j} = \sqrt{C_{11}}\,\mathrm{d}X_1$
- wydłużenie względne: $\varepsilon_1 = \dfrac{|\mathrm{d}\mathbf{x}|-|\mathrm{d}\mathbf{X}|}{|\mathrm{d}\mathbf{X}|} = \sqrt{C_{11}}-1 = \sqrt{2E_{11}+1}-1$

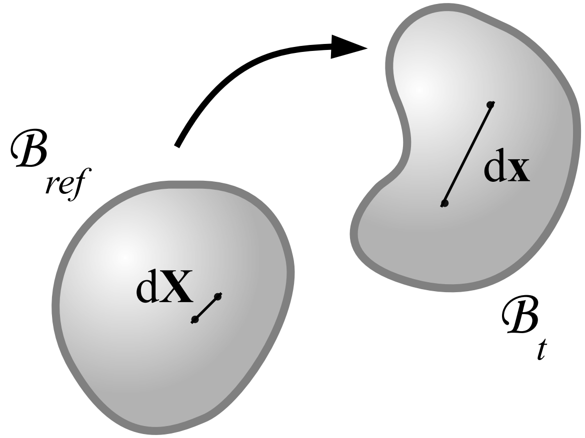
$$\varepsilon_1 = \sqrt{2E_{11}+1}-1$$

Wydłużenia względne włókien równoległych do *i*-tej osi przyjętego układu współrzędnych zależą wyłącznie od **składowej jednoimiennej** E_{ii} (nie sumować wzgl. i) **tensora odkształcenia**.

INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE JEDNOIMIENNE – WYDŁUŻENIA WZGLĘDNE

Jeśli **odkształcenie jest małe** to otrzymaną zależność możemy rozwinąć w **szereg Taylora** w otoczeniu $E_{11}=0$



$$\varepsilon_1 = \sqrt{2E_{11}+1}-1 = E_{11} - \frac{E_{11}^2}{2} + \frac{E_{11}^3}{2} + \ldots \approx E_{11}$$

A zatem:

$$\varepsilon_1 \approx E_{11}$$

Jeśli deformacja jest mała, to jednoimienne składowe tensora odkształcenia są w przybliżeniu równe wydłużeniom względnym włókien równoległych do odpowiedniej osi układu współrzędnych

INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE RÓŻNOIMIENNE – ZMIANA KĄTA

Kąt między dwoma wektorami o znanych długościach można obliczyć za pomocą ich **iloczynu skalarnego:**

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\sphericalangle(\mathbf{a}\,;\mathbf{b})$$

Cosinus kąta między dwoma zdeformowanymi włóknami można obliczyć następująco:

$$\boxed{\cos\phi_{12} = \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(1)}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(2)}}{\left|\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(1)}\right|\,\left|\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(2)}\right|}}$$

INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE RÓŻNOIMIENNE – ZMIANA KĄTA

Rozważmy dwa włókna, z który jedno było przed deformacją równoległe do osi X_1, a drugie do X_2:

- włókna materialne **przed deformacją**:

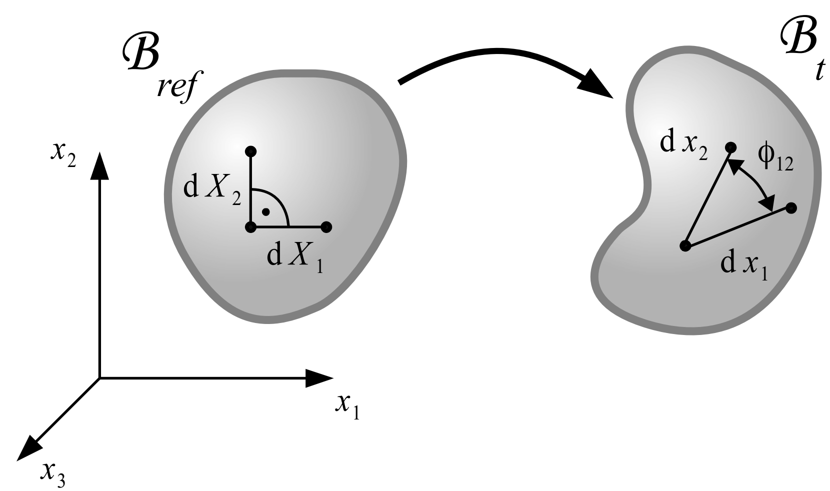
$$\mathrm{d}\,\mathbf{X}^{(1)} = [\mathrm{d}\,X_1\,;\,0\,;\,0]$$

$$\mathrm{d}\,\mathbf{X}^{(2)} = [0\,;\,\mathrm{d}\,X_2\,;\,0]$$

- włókna materialne **po deformacji**:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\,\mathbf{X}^{(1)} = \mathrm{d}\,X_1[F_{11}\,;\,F_{21}\,;\,F_{31}]$$

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F}\,\mathrm{d}\,\mathbf{X}^{(2)} = \mathrm{d}\,X_2[F_{12}\,;\,F_{22}\,;\,F_{32}]$$



INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE RÓŻNOIMIENNE – ZMIANA KĄTA

Cosinus kąta między włóknami zdeformowanymi:

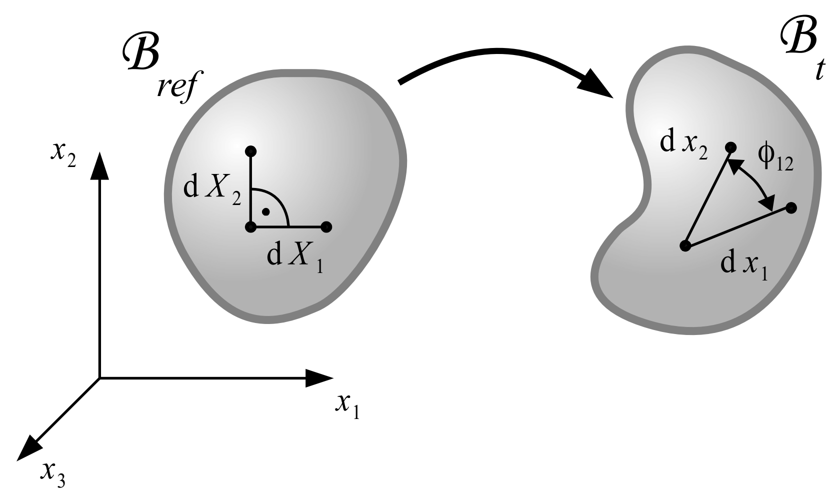
$$\cos\phi_{12}=\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(1)}\cdot\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(2)}}{|\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(1)}|\,|\mathrm{d}\,\mathbf{x}^{(2)}|}=\frac{\mathrm{d}\,X_1\,\mathrm{d}\,X_2\left(F_{11}F_{12}+F_{21}F_{22}+F_{31}F_{32}\right)}{\mathrm{d}\,X_1\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}\cdot\mathrm{d}\,X_2\sqrt{F_{12}^2+F_{22}^2+F_{32}^2}}$$

Wykorzystajmy definicję tensora deformacji:

$$C_{ij}=F_{ki}F_{kj}=F_{1i}F_{1j}+F_{2i}F_{2j}+F_{3i}F_{3j}$$

Możemy zatem napisać:

$$\boxed{\cos\phi_{12}=\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\cdot\sqrt{C_{22}}}=\frac{2E_{12}}{\sqrt{(2E_{11}+1)(2E_{22}+1)}}}$$

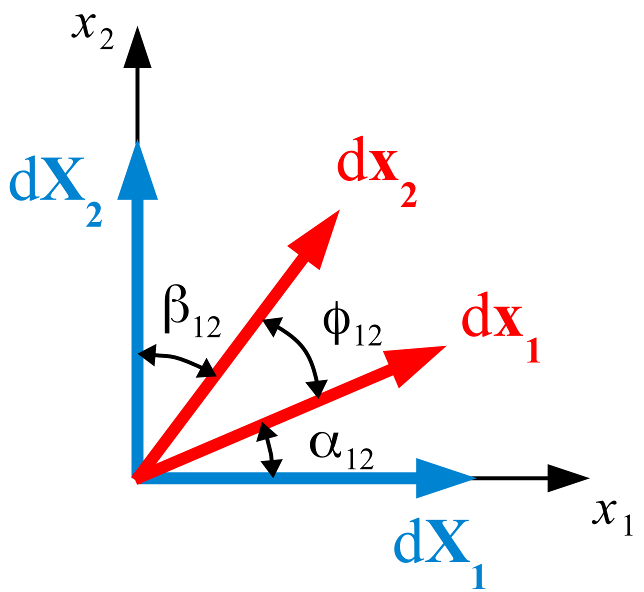


INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE RÓŻNOIMIENNE – ZMIANA KĄTA

Zdefiniujmy **kąt, o jaki zmieni się w wyniku deformacji kąt prosty między dwoma włóknami** (które przed deformacją były prostopadłe):

$$\gamma_{12} = \alpha_{12}+\beta_{12} = 90^\circ - \phi_{12}$$



Z zależności trygonometrycznych mamy:

$$\cos\phi_{12} = \cos\left(90^\circ - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12}$$

zatem:

$$\sin\gamma_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{(2E_{11}+1)(2E_{22}+1)}}$$

Sinus zmiany kąta między dwoma pierwotnie prostopadłymi włóknami równoległymi do osi X_i oraz X_j przyjętego układu współrzędnych zależy od składowej różnoimiennej E_{ij} tensora odkształcenia.

INTERPRETACJA SKŁADOWYCH TENSORA ODKSZTAŁCENIA

SKŁADOWE RÓŻNOIMIENNE – ZMIANA KĄTA

Zależność

$$\sin\gamma_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{(2E_{11}+1)(2E_{22}+1)}}$$

Możemy interpretować jako zależną od 4 zmiennych. Jeśli deformacja jest mała, to każda z tych zmiennych jest bliska 0, i w otoczeniu takiego punktu obie strony tej zależności możemy rozwinąć w szereg Taylora. Uwzględniając tylko wyrazy 1 stopnia, mamy:

$$\left.\begin{aligned} \sin\gamma_{12} &= \gamma_{12} + \dots \\ \frac{2E_{12}}{\sqrt{(2E_{11}+1)(2E_{22}+1)}} &= 2E_{12} + \dots \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \gamma_{12} \approx 2E_{12}$$

Zatem dla małych deformacji:

$$E_{12} \approx \frac{\gamma_{12}}{2}$$

Dla małych deformacji składowe różnoimienne tensora odkształcenia są w przybliżeniu równe połowie zmiany kąta między dwoma pierwotnie prostopadłymi włóknami.

ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE

ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE

Związkami geometrycznymi (kinematycznymi) nazywamy **związki** między składowymi **tensora odkształcenia** a składowymi **wektora przemieszczenia**.

- Tensor odkształcenia możemy wyrazić przez tensor deformacji: $E_{ij}=\frac{1}{2}(C_{ij}-\delta_{ij})$
- Tensor deformacji możemy wyrazić przez gradient deformacji: $C_{ij}=F_{ki}F_{kj}$
- Gradient deformacji możemy wyrazić przez gradient przemieszczenia: $F_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\delta_{ij}$

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(C_{ij}-\delta_{ij})=\frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj}-\delta_{ij})=\frac{1}{2}\left[(u_{k,i}+\delta_{ki})(u_{k,j}+\delta_{kj})-\delta_{ij}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[u_{k,i}\delta_{kj}+u_{k,j}\delta_{ki}+u_{k,i}u_{k,j}+\delta_{ki}\delta_{kj}-\delta_{ij}\right]==\frac{1}{2}\left[u_{j,i}+u_{i,j}+u_{k,i}u_{k,j}+\delta_{ij}-\delta_{ij}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right]$$

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right)$$

ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE

Związki geometryczne to **nieliniowe związki różniczkowe** między składowymi tensora odkształcenia i składowymi wektora przemieszczenia:

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right]$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2\right]$$

$$\dots$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right]$$

Układy nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych są trudne...

Bardzo trudne...

Trzeba będzie coś z tym zrobić.

ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE

Podobne rozważania można przeprowadzić w opisie przestrzennym

- Tensor odkształcenia możemy wyrazić przez tensor deformacji: $e_{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-c_{ij})$
- Tensor deformacji możemy wyrazić przez gradient deformacji: $c_{ij}=f_{ki}f_{kj}$
- Gradient deformacji możemy wyrazić przez gradient przemieszczenia: $f_{ij}=\delta_{ij}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-c_{ij})=\frac{1}{2}(\delta_{ij}-f_{ki}f_{kj})=\frac{1}{2}\left[\delta_{ij}-(\delta_{ki}-u_{k,i})(\delta_{kj}-u_{k,j})\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[u_{k,i}\delta_{kj}+u_{k,j}\delta_{ki}-u_{k,i}u_{k,j}-\delta_{ki}\delta_{kj}+\delta_{ij}\right]=\frac{1}{2}\left[u_{j,i}+u_{i,j}-u_{k,i}u_{k,j}-\delta_{ij}+\delta_{ij}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j}\right]$$

$$\boxed{e_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{h}+\mathbf{h}^{\mathrm{T}}-\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}\right)}$$

UWAGA: w opisie **materialnym**: $u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ w opisie **przestrzennym**: $u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

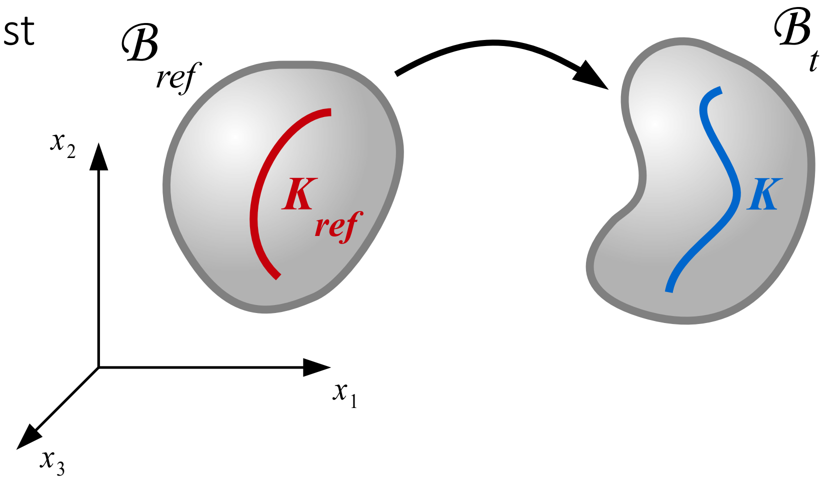
DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Długość różniczkowego elementu liniowego

- przed deformacją: $\mathrm{d}\,L_R = |\mathrm{d}\,\mathbf{X}| = \sqrt{\mathrm{d}\,X_i \mathrm{d}\,X_i}$
- po deformacji: $\mathrm{d}\,L = |\mathrm{d}\,\mathbf{x}| = \sqrt{\mathrm{d}\,x_i \mathrm{d}\,x_i} = \sqrt{C_{ij}\,\mathrm{d}\,X_i \mathrm{d}\,X_j} = \dfrac{\sqrt{C_{ij}\,\mathrm{d}\,X_i \mathrm{d}\,X_j}}{\sqrt{\mathrm{d}\,X_k \mathrm{d}\,X_k}}\,\mathrm{d}\,L_R$

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Długość krzywej materialnej (skończonego włókna materialnego), która w opisie materialnym dana jest równaniami parametrycznymi:



$$K_{ref}: \begin{cases} X_1 = X_1(\lambda) \\ X_2 = X_2(\lambda) \\ X_3 = X_3(\lambda) \end{cases}$$

- **przed deformacją:**

$$L_R = \underbrace{\int_{K_{ref}} \mathrm{d} L_R = \int_{K_{ref}} \sqrt{\mathrm{d} X_i \mathrm{d} X_i} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\frac{\mathrm{d} X_i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d} X_i}{\mathrm{d}\lambda}}\mathrm{d}\lambda}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{ref}}$$

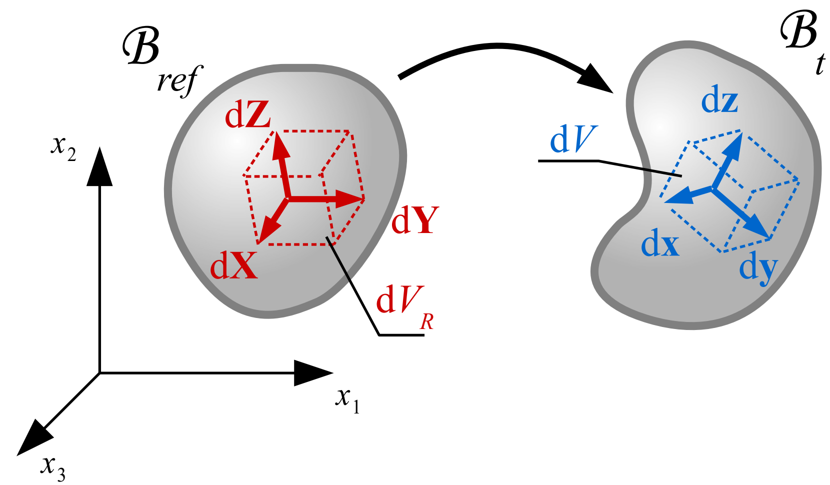
- **po deformacji:**

$$L = \underbrace{\int_{K} \mathrm{d} L = \int_{K} \sqrt{\mathrm{d} x_i \mathrm{d} x_i}}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{t}} = \underbrace{\int_{K_{ref}} \sqrt{C_{ij}\mathrm{d} X_i \mathrm{d} X_j} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{C_{ij}\frac{\mathrm{d} X_i}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d} X_i}{\mathrm{d}\lambda}}\mathrm{d}\lambda}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{ref}}$$

Konfiguracja odniesienia jest często „łatwiejsza” do całkowania, a przy tym stała.

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Objętość **różniczkowego elementu objętościowego** (**bryłowego**) przybliżamy **objętością nieskończenie małego równoległościanu**, którego krawędzie zadane są 3 niewspółpłaszczyznowymi włóknami materialnymi – jest ona równa iloczynowi mieszanemu wektorów reprezentujących te włókna:



- **przed deformacją**:

$$\mathrm{d}V_R = [\mathrm{d}\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{Y}, \mathrm{d}\mathbf{Z}] = (\mathrm{d}\mathbf{X} \times \mathrm{d}\mathbf{Y}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{Z}$$

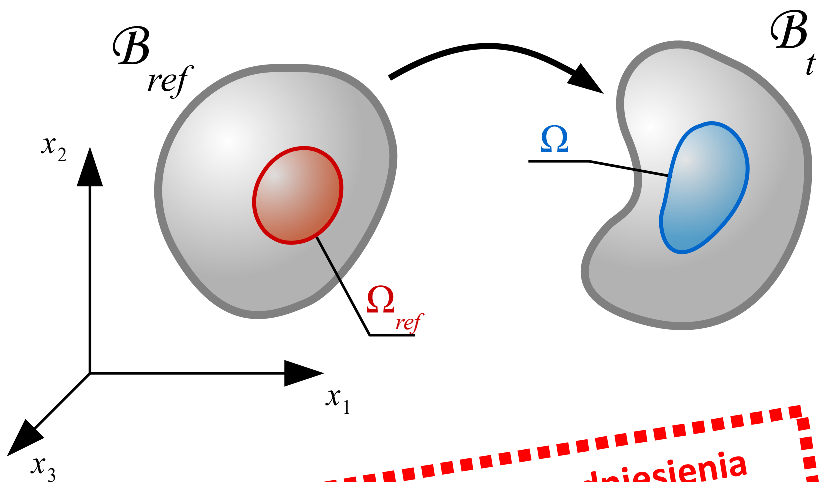
- **po deformacji**:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= [\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{y}, \mathrm{d}\mathbf{z}] = (\mathrm{d}\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{y}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{z} \\ &= \big((\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X})\times(\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{Y})\big)\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{Z}) = \\ &= \det\mathbf{F}(\mathrm{d}\mathbf{X}\times\mathrm{d}\mathbf{Y})\cdot\mathrm{d}\mathbf{Z} = J\,\mathrm{d}V_R\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}V = J\;\mathrm{d}V_R}$$

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Objętość skończonego podobszaru Ω konfiguracji ciała:



- przed deformacją:

$$\underbrace{V_R = \iiint\limits_{\Omega_{ref}} \mathrm{d}V_R}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{ref}}$$

- po deformacji:

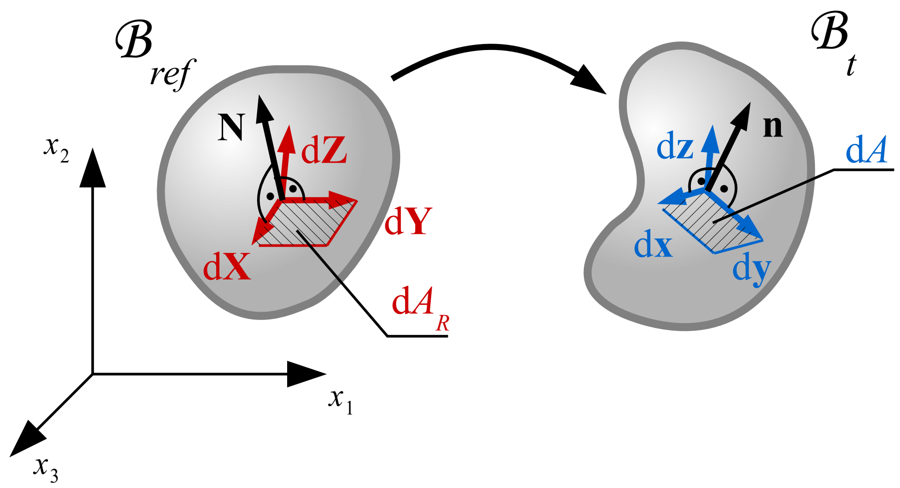
$$V = \underbrace{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_t} = \underbrace{\iiint\limits_{\Omega_{ref}} J\,\mathrm{d}V_R}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{ref}}$$

Konfiguracja odniesienia jest często „łatwiejsza” do całkowania, a przy tym stała.

UWAGI:
- **Jakobian** jest funkcją $\mathbf{X}$ i jest **miarą** lokalnej zmiany objętości („w punkcie $\mathbf{X}$”) w wyniku deformacji.
- $J = 0$ oznacza „znikanie cząstek”
- $J < 0$ oznacza, że obszar w wyniku deformacji jest „wywleczony na lewą stronę”

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Pole powierzchni różniczkowego elementu powierzchniowego przybliżamy polem powierzchni **nieskończenie małego równoległoboku**, którego krawędzie zadane są 2 niewspółliniowymi włóknami materialnymi – jest ono liczbowo równe długości iloczynu wektorowego wektorów reprezentujących te włókna. Uwzględnijmy to w zależności wiążącej objętości elementów bryłowych. **Iloczyn mieszany** jest złożeniem **iloczynu wektorowego** i **iloczynu skalarnego**:



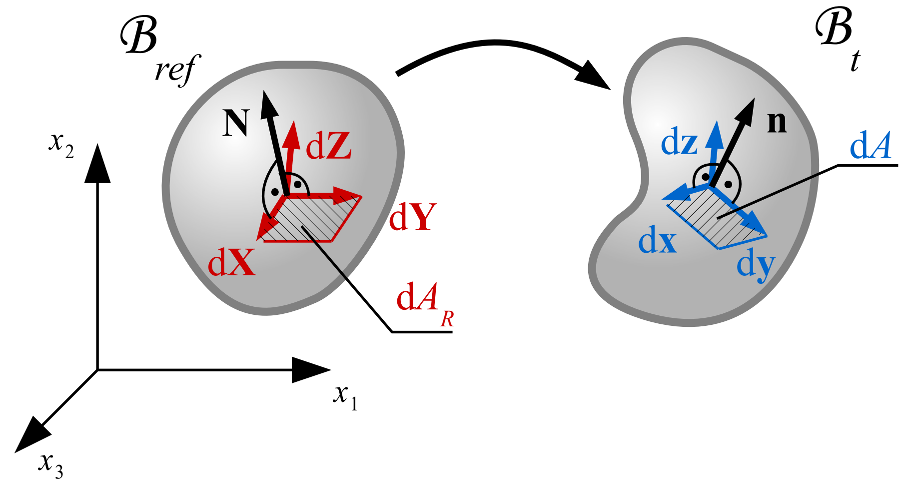
- **przed deformacją**: $\mathrm{d}V_R = [\mathrm{d}\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{Y}, \mathrm{d}\mathbf{Z}] = (\mathrm{d}\mathbf{X} \times \mathrm{d}\mathbf{Y}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{Z} = \mathrm{d}A_R \mathbf{N} \cdot \mathrm{d}\mathbf{Z}$ $\quad |\mathbf{N}| = 1$

- **po deformacji**: $\mathrm{d}V = [\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{y}, \mathrm{d}\mathbf{z}] = (\mathrm{d}\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{y}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{z} = \mathrm{d}A \mathbf{n} \cdot \mathrm{d}\mathbf{z}$ $\quad |\mathbf{n}| = 1$

$$\mathrm{d}V = J\,\mathrm{d}V_R \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}A\,\mathbf{n} \cdot \mathrm{d}\mathbf{z} = J\,\mathrm{d}A_R \mathbf{N} \cdot \mathrm{d}\mathbf{Z}$$

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

$$\mathrm{d}A\,\mathbf{n}\cdot\mathrm{d}\mathbf{z} = J\,\mathrm{d}A_R\mathbf{N}\cdot\mathrm{d}\mathbf{Z}$$



Włókno $\mathrm{d}\mathbf{z}$ wyrażamy przez $\mathrm{d}\mathbf{Z}$ i gradient deformacji

$$\mathrm{d}A\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{Z} = J\,\mathrm{d}A_R\mathbf{N}\cdot\mathrm{d}\mathbf{Z}$$

W zapisie wskaźnikowym łatwiej zauważyć, że obydwie strony równania można interpretować jako pewne odwzorowania liniowe działające na wektor $\mathrm{d}\mathbf{Z}$:

$$\left(\mathrm{d}A\,n_j F_{ji}\right)\,\mathrm{dZ}_i = \left(J\,\mathrm{d}A_R N_i\right)\,\mathrm{dZ}_i$$

Związek ten **ma zachodzić dla dowolnego** $\mathrm{d}\mathbf{Z}$, zatem odpowiednie **operatory liniowe muszą być równe**:

$$\mathrm{d}A\,\mathbf{n}\mathbf{F} = J\,\mathrm{d}A_R\mathbf{N}$$

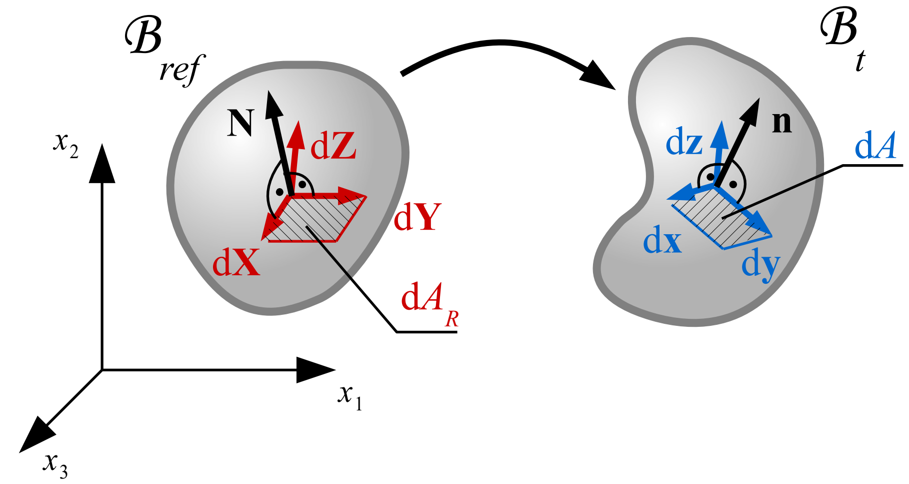
Po przemnożeniu przez $\mathbf{F}^{-1}$ otrzymujemy wzór Nansona:

$$\boxed{\mathrm{d}A\,\mathbf{n} = J\,\mathrm{d}A_R\mathbf{N}\,\mathbf{F}^{-1}}$$

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Wzór Nansona jest równością dwóch wektorów:

$$\mathrm{d}A\,\mathbf{n} = J\,\mathrm{d}A_R\mathbf{N}\,\mathbf{F}^{-1}$$



W szczególności muszą mieć one równe długości:

$$|\mathrm{d}A\,\mathbf{n}| = |J\,\mathrm{d}A_R\mathbf{N}\,\mathbf{F}^{-1}|$$

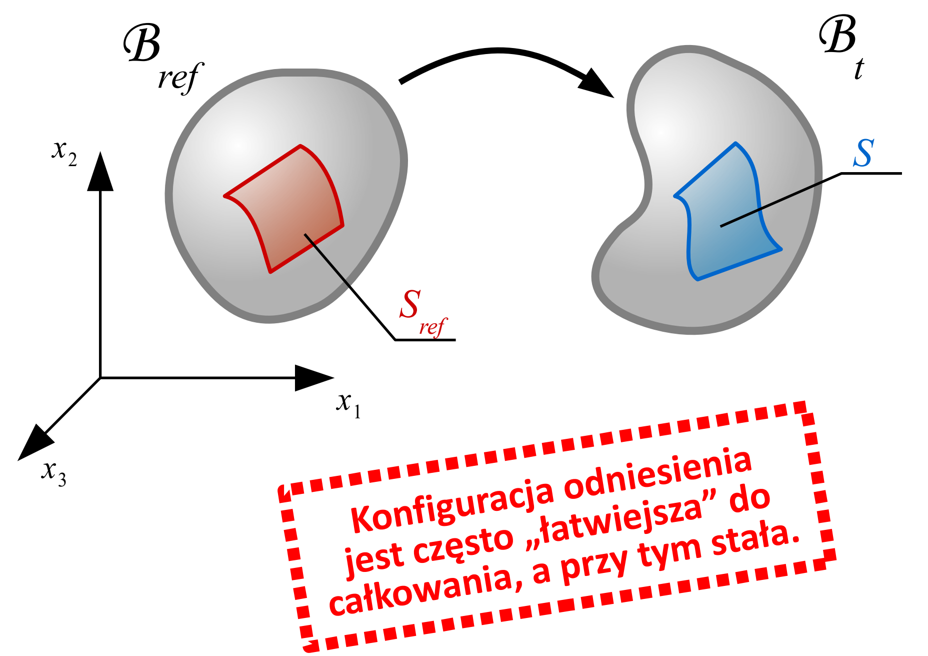
$$\mathrm{d}A|\mathbf{n}| = J\,\mathrm{d}A_R|\mathbf{N}\,\mathbf{F}^{-1}|$$

Wektor normalny z założenia jest jednostkowy, tj. $|\mathbf{n}| = 1$, otrzymujemy zatem **związek między wielkością różniczkowego elementu powierzchniowego przed deformacją i po deformacji**:

$$\boxed{\mathrm{d}A = J\,|\mathbf{N}\,\mathbf{F}^{-1}|\,\mathrm{d}A_R}$$

DEFORMACJA ELEMENTÓW RÓŻNICZKOWYCH I SKOŃCZONYCH

Pole powierzchni **skończonego powierzchni** S zawartej w konfiguracji ciała:



- **przed deformacją**:

$$\underbrace{A_R = \iint_{S_{ref}} \mathrm{d}\, A_R}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{ref}}$$

- **po deformacji**:

$$\underbrace{A = \iint_{S} \mathrm{d}\, A}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_t} = \underbrace{\iint_{S_{ref}} J\,|\mathbf{N}\,\mathbf{F}^{-1}|\,\mathrm{d}\, A_R}_{\text{całkowanie w } \mathcal{B}_{ref}}$$

TEORIA MAŁYCH ODKSZTAŁCEŃ

TEORIA MAŁYCH ODKSZTAŁCEŃ

Pokazaliśmy, że dla **małych deformacji**:

- jednoimienne **składowe tensora odkształcenia** są **miarą** wydłużenia względnego **włókien**
- różnoimienne **składowe tensora odkształcenia** są **miarą** zmiany kąta **między włóknami**

Jeśli pochodne przemieszczeń (przyrosty przemieszczeń, odkształcenia) są małe, tj. $u_{i,j} \ll 1$, wtedy związki geometryczne można uprościć:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right) \approx \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \varepsilon_{ij}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$, będący **symetryczną częścią gradientu przemieszczenia**, nazywamy tensorem małych odkształceń Cauchy'ego. Jego związek z pochodnymi przemieszczeń określamy mianem związków geometrycznych (kinematycznych) Cauchy'ego.

TEORIA MAŁYCH ODKSZTAŁCEŃ

Miary małych odkształceń:

- tensor małych odkształceń (symetryczna część gradientu przemieszczenia):

$$\underbrace{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}_{\text{związki geometryczne Cauchy'ego}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varepsilon}$$

- tensor małych obrotów (antysymetryczna część gradientu przemieszczenia):

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right) \qquad \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{\omega}$$

Rozkład gradientu przemieszczenia na część symetryczną i antysymetryczną: $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}$

Tensor odkształcenia (duże odkształcenia) można zapisać w następującej postaci:

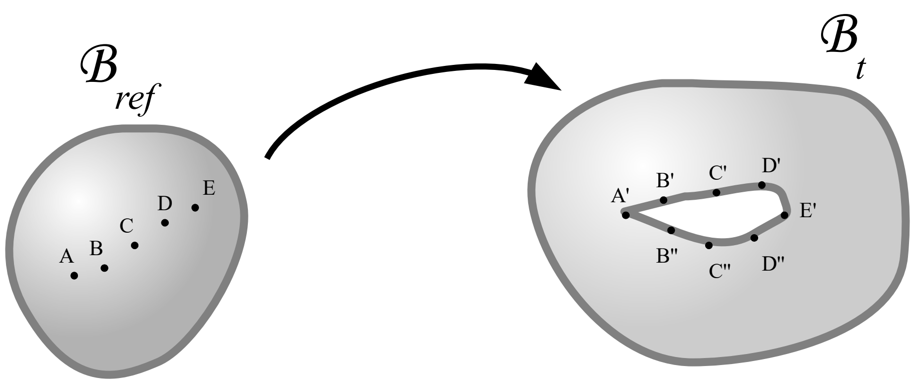
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}+\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{H}\right) = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\omega})$$

WARUNKI NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ

WARUNKI NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ

Nieliniowe **związki geometryczne** stanowią układ **6 nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych**, w których dla znanych odkształceń występują **3 nieznane składowe wektora przemieszczenia**.

W ogólności taki układ jest „nadokreślony" (więcej równań niż niewiadomych) i **nie zawsze ma jednoznaczne rozwiązanie**. Może się zdarzyć, że układ taki nie ma rozwiązań lub ma ich kilka. W tym drugim przypadku mogłoby dojść do „rozdwojenia" przemieszczeń dla zadanych odkształceń:



Warunki, które zapewniają **całkowalność związków geometrycznych**, nazywamy warunkami nierozdzielności (zgodności) odkształceń.

WARUNKI NIEROZDZIELNOŚCI ODKSZTAŁCEŃ

Dowód jest dość złożony, ale można pokazać, że warunki te są następujące:

- teoria dużych odkształceń

$$\nabla_{\mathbf{X}}\times\mathbf{F}=\mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \epsilon_{pqi}F_{jq,p}=0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{13}}{\partial X_2}-\frac{\partial F_{12}}{\partial X_3}=0 \qquad &&\frac{\partial F_{23}}{\partial X_2}-\frac{\partial F_{22}}{\partial X_3}=0 \qquad &&\frac{\partial F_{33}}{\partial X_2}-\frac{\partial F_{32}}{\partial X_3}=0\\
&\frac{\partial F_{11}}{\partial X_3}-\frac{\partial F_{13}}{\partial X_1}=0 &&\frac{\partial F_{21}}{\partial X_3}-\frac{\partial F_{23}}{\partial X_1}=0 &&\frac{\partial F_{31}}{\partial X_3}-\frac{\partial F_{33}}{\partial X_1}=0\\
&\frac{\partial F_{12}}{\partial X_1}-\frac{\partial F_{11}}{\partial X_2}=0 &&\frac{\partial F_{22}}{\partial X_1}-\frac{\partial F_{21}}{\partial X_2}=0 &&\frac{\partial F_{32}}{\partial X_1}-\frac{\partial F_{31}}{\partial X_2}=0
\end{aligned}$$

- teoria małych odkształceń

$$\nabla_{\mathbf{X}}\times(\nabla_{\mathbf{X}}\times\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \epsilon_{pri}\epsilon_{qsj}\varepsilon_{pq,rs}=0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_3^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial X_2\partial X_3}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_2^2}=0 \qquad &&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_2\partial X_3}-\frac{\partial}{\partial X_1}\left[-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial X_3}\right]=0\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_1^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{31}}{\partial X_3\partial X_1}+\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_3^2}=0 &&\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_3\partial X_1}-\frac{\partial}{\partial X_2}\left[\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial X_1}-\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial X_2}+\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial X_3}\right]=0\\
&\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_2^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}=0 &&\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_1\partial X_2}-\frac{\partial}{\partial X_3}\left[\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial\varepsilon_{31}}{\partial X_2}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial X_3}\right]=0
\end{aligned}$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ