TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

CIĄGŁOŚĆ PRZEPŁYWU I ZACHOWANIE MASY

ZASADA ZACHOWANIA MASY

Każdej cząstce przypisana powinna zostać masa – z uwagi na nieskończenie małe rozmiary cząstek (rozważamy ośrodek ciągły – continuum), **każdej cząstce** (punktowi) **przypisujemy** gęstość masy **(objętościową)**.

Gęstość może być funkcją
- **punktu** (ośrodek niejednorodny, o zmiennej gęstości)
- **czasu** (gęstość zmienia się wskutek deformacji)

W ogólności **gęstość w konfiguracji odniesienia** $\rho_R(\mathbf{X})$ (niezależna od czasu) może być różna od **gęstości w konfiguracji aktualnej** $\rho(\mathbf{x},t)$ jednak zgodnie z zasadą zachowania masy, **całkowita masa ciała nie zmienia się wskutek deformacji**, tj.

$$m_{ref} = m_t \qquad \Rightarrow \qquad \iiint_{V_R} \rho_R \, \mathrm{d}V_R = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V$$

ZASADA ZACHOWANIA MASY

$$m_{ref} = m_t \qquad \Rightarrow \qquad \iiint\limits_{V_R} \rho_R \, \mathrm{d} V_R = \iiint\limits_{V} \rho \, \mathrm{d} V$$

Wykorzystujemy związek między $\mathrm{d} V$ a $\mathrm{d} V_R$:

$$\iiint\limits_{V_R} \rho_R \, \mathrm{d} V_R = \iiint\limits_{V_R} \rho \, J \, \mathrm{d} V_R$$

Związek ten zachodzić musi dla każdej objętości V_R , zatem musi być:

$$\boxed{\rho_R = \rho \cdot J}$$

RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

Ilość masy, która przepływa przez powierzchnię zamkniętą S (w punkcie o **normalnej zewnętrznej** $\mathbf{n}$) z prędkością $\mathbf{v}$, wyraża się jako całka z **wektora strumienia masy** $\mathbf{\Phi}_m$ (masa wypływa z wnętrza powierzchni):

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \iint_{\Delta S} \underbrace{\rho(\mathbf{x};t)\,\mathbf{v}(\mathbf{x};t)}_{\mathbf{\Phi}_m} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Jednocześnie **przyrost masy zawartej w objętości** V ograniczonej powierzchnią S jest równy:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \iiint_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Ilość masy, która przyrasta w objętości musi być równa ilości masy jaka wpływa przez powierzchnię S:

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\iint_{\Delta S} \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

Całkę objętościową zamieniamy na całkę powierzchniową korzystając z twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego:

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{f}\,\mathrm{d}V = \oiint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

Mamy zatem:

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V = -\iiint_{\Delta V} \nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v})\mathrm{d}V$$

Suma całek to całka sumy:

$$\iiint_{\Delta V} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v})\right]\mathrm{d}V = 0$$

Związek ma zachodzić dla dowolnej objętości V, zatem

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\mathbf{v}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho\,v_k)_{,k} = 0}$$

Jest to równanie ciągłości – jest jednym z kluczowych równań dynamiki płynów.

SIŁY ZEWNĘTRZNE I WEWNĘTRZNE

POSTULATY SIŁ

SIŁY

SIŁY ZEWNĘTRZNE

ZEWNĘTRZNE SIŁY OBJĘTOŚCIOWE (SIŁY MASOWE)

- Oddziaływanie środowiska **zewnętrznego**
- Działają **bezpośrednio** na cząstki **wewnątrz ciała** (przenikają przez powierzchnię zewnętrzną)
- np. grawitacja, pole EM, itp.

ZEWNĘTRZNE SIŁY POWIERZCHNIOWE

- Oddziaływanie środowiska **zewnętrznego**
- Działają **bezpośrednio** tylko na cząstki **na powierzchni zewnętrznej ciała**
- np. naprężenia kontaktowe, parcie cieczy, w której ciało jest zanurzone itp.

SIŁY WEWNĘTRZNE

WEWNĘTRZNE SIŁY POWIERZCHNIOWE (NAPRĘŻENIA)

- Oddziaływanie **cząstek między sobą** (siły **wewnętrzne**).

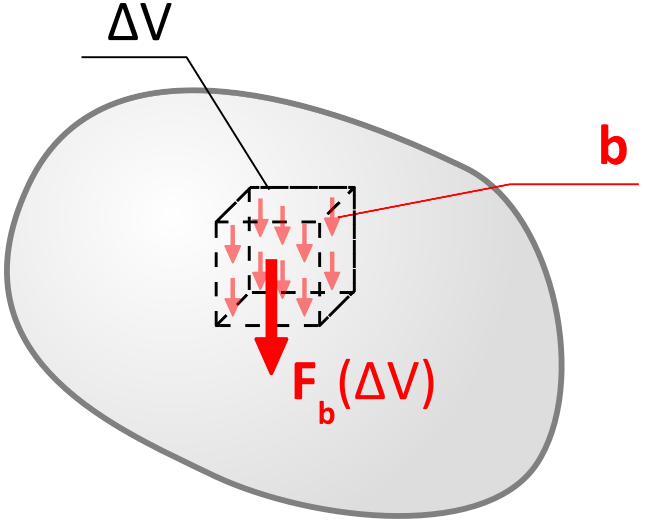
ZEWNĘTRZNE SIŁY OBJĘTOŚCIOWE

Zewnętrzne siły objętościowe opisujemy wektorem gęstości zewnętrznych sił objętościowych (wektorem sił masowych) $\mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ takim, że suma takiego ciągłego układu sił jest równa

$$\mathbf{F}_b = \iiint\limits_{\Delta V} \mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V$$

Wektor sił masowych możemy interpretować jako graniczny przypadek, gdy **sumę ciągłego układu zewnętrznych sił objętościowych** zebranych z pewnego obszaru ΔV **odnosimy do wielkości tego obszaru** ΔV, a wielkość ta zmierza w granicy do 0: $\Delta V \to 0$

$$\boxed{\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{F}_b(\Delta V)}{\Delta V}}$$



Wymiar fizyczny tego wektora to: $[\mathbf{b}] = \mathrm{N/m^3}$

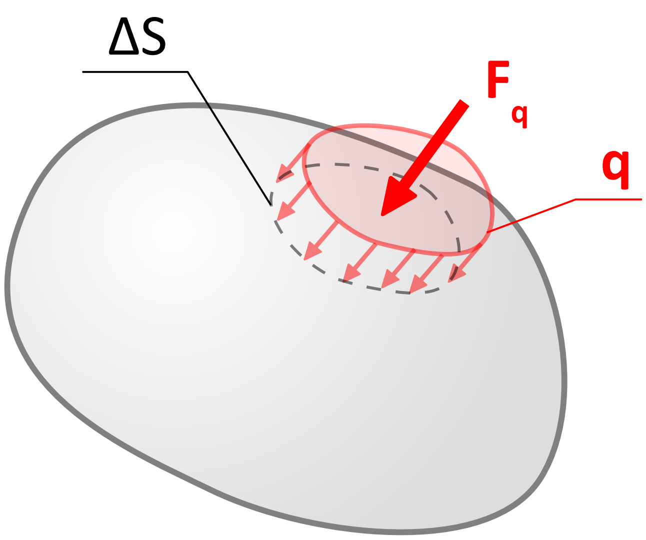
ZEWNĘTRZNE SIŁY POWIERZCHNIOWE

Zewnętrzne siły powierzchniowe opisujemy wektorem gęstości zewnętrznych sił powierzchniowych (wektorem powierzchniowego obciążenia ciągłego) $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ takim, że suma takiego ciągłego układu sił jest równa

$$\mathbf{F}_q = \iint_{\Delta S} \mathbf{q}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}S$$

Wektor powierzchniowego obciążenia ciągłego możemy interpretować jako graniczny przypadek, gdy **sumę ciągłego układu zewnętrznych sił powierzchniowych** zebranych z pewnego obszaru ΔS **odnosimy do wielkości tego obszaru** ΔS, a wielkość ta zmierza w granicy do 0: $\Delta S \to 0$

$$\boxed{\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\mathbf{F}_q(\Delta S)}{\Delta S}}$$



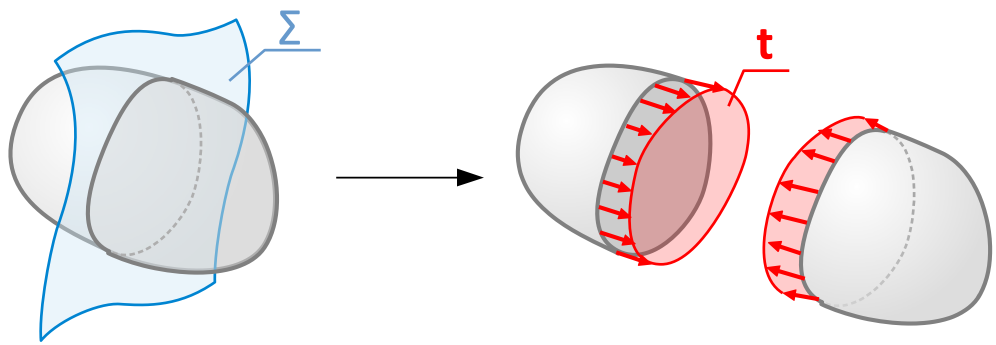
Wymiar fizyczny tego wektora to: $[\mathbf{q}] = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$

WEWNĘTRZNE SIŁY POWIERZCHNIOWE

Koncepcja **sił wewnętrznych** pojawia się w sposób naturalny, jeśli przyjmiemy, że **przyczyną ruchu jest obecność sił**, oraz że **ciała sprężyste mogą wykonywać ruch** (np.. drgania sprężyste) **nawet bez obecności sił zewnętrznych**. Muszą zatem istnieć siły innego rodzaju.

Znajomość cząsteczkowej budowy materii pozwala nam interpretować te siły w kategoriach **oddziaływań międzycząsteczkowych**, jednak **model ośrodka ciągłego odrzuca istnienie przeliczalnej liczby cząstek o skończonych wymiarach**, dla których takie siły można by określić. Będziemy więc mówić o **gęstości powierzchniowej sił wewnętrznych**.

Skoro nie możemy wyróżnić cząstek, zatem w inny sposób **wyróżnijmy podobszar ośrodka ciągłego**. Możemy dokonać myślowego rozcięcia ciała na dwie części za pomocą pewnej powierzchni Σ.



Układ sił, który zapewnia spójność ciała nazywać będziemy wewnętrznymi siłami powierzchniowymi lub naprężeniami – **zależą one zarówno od punktu ciała** jak i od wyboru **powierzchni myślowego rozcięcia** Σ.

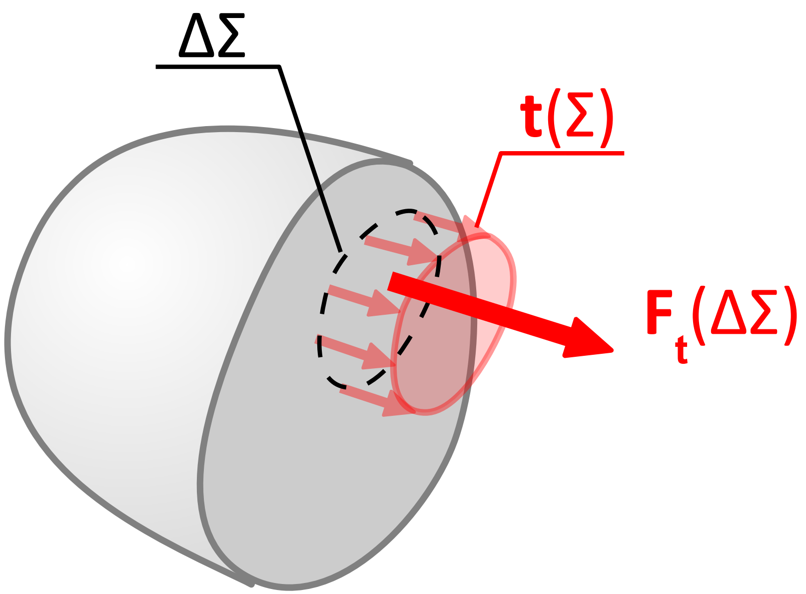
WEWNĘTRZNE SIŁY POWIERZCHNIOWE

Wewnętrzne siły powierzchniowe opisujemy wektorem gęstości wewnętrznych sił powierzchniowych (wektorem naprężenia) $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ takim, że suma takiego ciągłego układu sił jest równa

$$\mathbf{F}_t = \iint_{\Delta\Sigma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}\Sigma$$

Wektor naprężenia możemy interpretować jako graniczny przypadek, gdy **sumę ciągłego układu wewnętrznych sił powierzchniowych** zebranych z pewnego obszaru $\Delta\Sigma$ **odnosimy do wielkości tego obszaru** $\Delta\Sigma$, a wielkość ta zmierza w granicy do 0: $\Delta\Sigma \to 0$

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{x}, \Sigma) = \lim_{\Delta\Sigma \to 0} \frac{\mathbf{F}_t(\Delta\Sigma)}{\Delta\Sigma}}$$



Wymiar fizyczny tego wektora to: $[\mathbf{t}] = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{Pa}$

ZASADY DYNAMIKI

ZASADY DYNAMIKI

Teoria sprężystości jest działem mechaniki klasycznej, co oznacza, że obowiązują w niej zasady dynamiki sformułowane przez Newtona dla mas punktowych i brył sztywnych.

I ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

Istnieją tzw. ***inercjalne układy odniesienia***, w których, jeśli na ciało nie działa żadna siła lub działające siły się równoważą, wtedy ciało to pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

ZASADY DYNAMIKI

Teoria sprężystości jest działem mechaniki klasycznej, co oznacza, że obowiązują w niej zasady dynamiki sformułowane przez Newtona dla mas punktowych i brył sztywnych.

II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

W inercjalnych układach odniesienia:

- w **ruchu postępowym** zmiana pędu ciała w czasie jest równa sumie sił działających na to ciało (zasada pędu):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \mathbf{S} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{S}$$

- w **ruchu obrotowym** zmiana w czasie momentu pędu (krętu) względem dowolnego nieruchomego punktu O jest równa momentowi względem punktu O wszystkich sił działających na to ciało (zasada krętu):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathbf{v}\times(\mathbf{x}_O-\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = \mathbf{M}_O \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$$

ZASADY DYNAMIKI

Teoria sprężystości jest działem mechaniki klasycznej, co oznacza, że obowiązują w niej zasady dynamiki sformułowane przez Newtona dla mas punktowych i brył sztywnych.

III ZASADA DYNAMIKI NEWTONA

Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne, czyli jeśli ciało A działa na ciało B pewną siłą, to ciało B działa na ciało A siłą o takiej samej wartości, tym samym kierunku i przeciwnym zwrocie.

RÓWNOWAGA SIŁ WEWNĘTRZNYCH

WARUNKI CZWOROŚCIANU

Rozważmy mały wycinek ciała sprężystego w kształcie czworościanu, którego 3 ścianki są prostopadłe do osi przyjętego kartezjańskiego układu współrzędnych, jedna zaś jest prostopadła do wektora normalnej zewnętrznej $\boldsymbol{\nu}$ $(|\boldsymbol{\nu}| = 1)$.

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \ ; \ \nu_2 \ ; \ \nu_3]$$
$$\mathbf{t} = [t_1 \ ; \ t_2 \ ; \ t_3]$$
$$\mathbf{t}_i = [t_{i1} \ ; \ t_{i2} \ ; \ t_{i3}]$$
$$\mathbf{b} = [b_1 \ ; \ b_2 \ ; \ b_3]$$

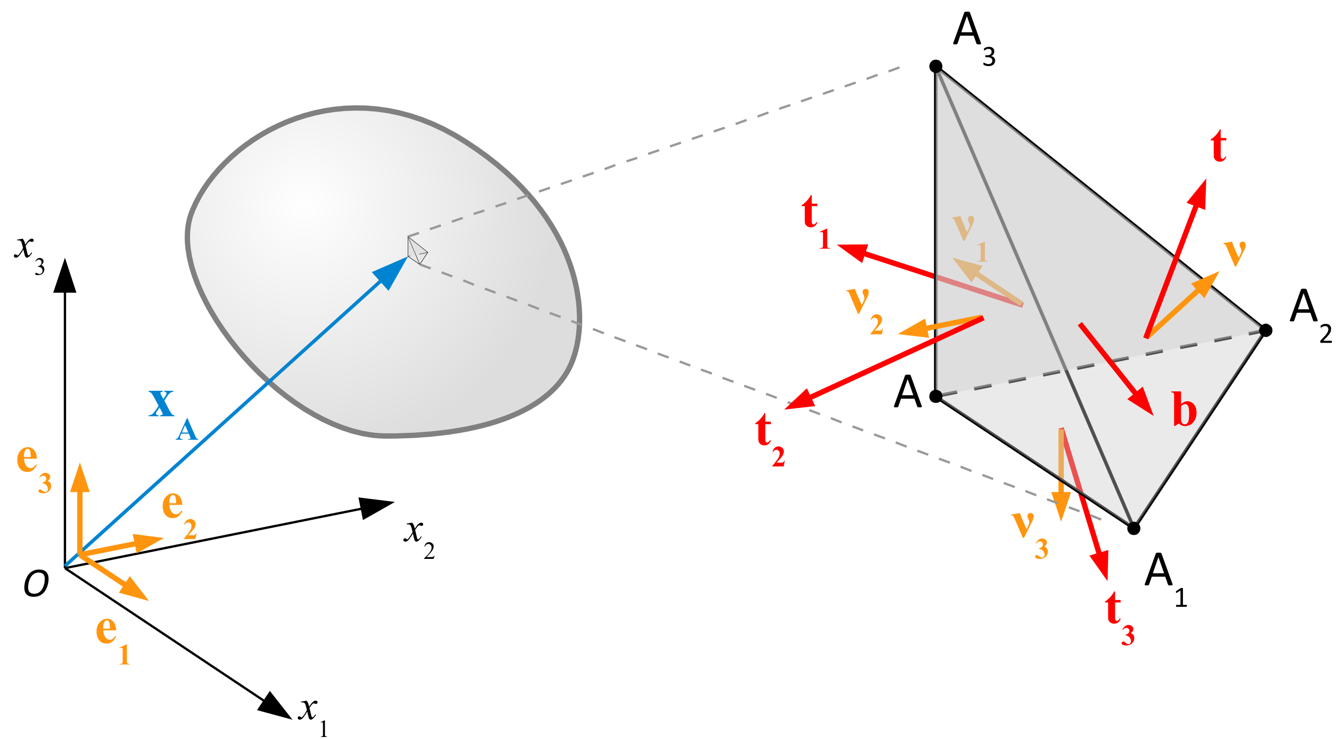
S – pole trójkąta $\Delta A_1 A_2 A_3$

S_{ij} – pole trójkąta $\Delta A A_i A_j$

h – wysokość czworościanu opuszczona na $\Delta A_1 A_2 A_3$

objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3} h S$$

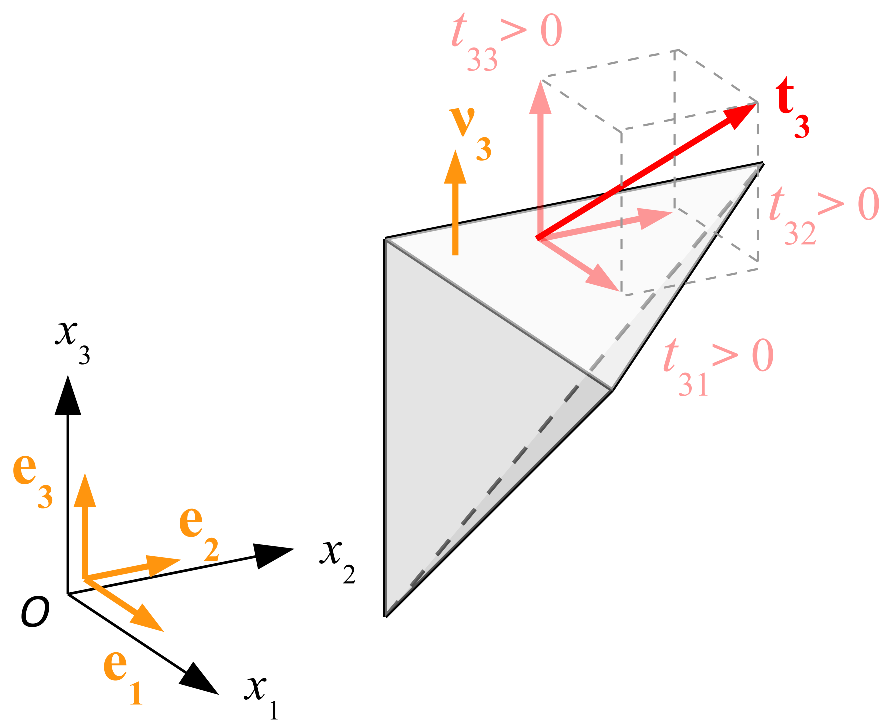


WARUNKI CZWOROŚCIANU

Symbol t_{ij} oznacza j-tą składową wektora naprężenia przyłożonego do ścianki prostopadłej do i-tej osi przyjętego układu współrzędnych,

Przyjmujemy następującą **umowę dotyczącą znakowania składowych wektora naprężenia**:

Jeśli **normalna zewnętrzna $\mathbf{v}_i$ ścianki jest** zgodna **z wersorem $\mathbf{e}_i$** odpowiedniej osi układu współrzędnych, to za dodatnie uznawać będziemy **składowe zwrócone** zgodnie **z wersorami odpowiednich osi układu współrzędnych**

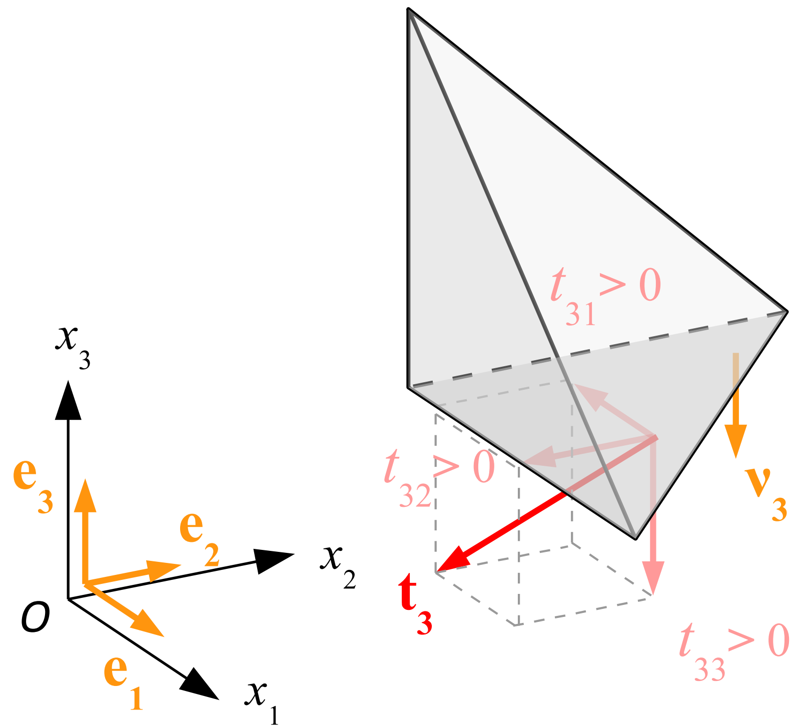


WARUNKI CZWOROŚCIANU

Symbol t_{ij} oznacza j-tą składową wektora naprężenia przyłożonego do ścianki prostopadłej do i-tej osi przyjętego układu współrzędnych,

Przyjmujemy następującą **umowę dotyczącą znakowania składowych wektora naprężenia**:

Jeśli **normalna zewnętrzna $\mathbf{v}_i$ ścianki jest przeciwna do wersora $\mathbf{e}_i$** odpowiedniej osi układu współrzędnych, to za dodatnie uznawać będziemy **składowe zwrócone przeciwnie do wersorów odpowiednich osi układu współrzędnych**



Dodatnie naprężenie normalne do ścianki to naprężenie rozciągające.

WARUNKI CZWOROŚCIANU

Zapiszmy **zasadę pędu dla czworościanu**. Suma wszystkich sił działających na czworościan:

$$\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \iint_{\Sigma} \mathbf{t}\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_1} \mathbf{t_1}\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{t_2}\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3} \mathbf{t_3}\,\mathrm{d}S$$

Pochodna pędu:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V$$

Pochodna względem czasu dotyczy funkcji, która jest całką po **konfiguracji, która też zmienia się w czasie** – powinna ona być uwzględniona przy obliczaniu pochodnej. Możemy jednak zmienić obszar całkowania:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V_R} \rho\,\mathbf{v}\,J\,\mathrm{d}V_R$$

Konfiguracja odniesienia jest niezmienna w czasie, zatem możemy wejść ze znakiem pochodnej pod całkę:

$$\dot{\mathbf{P}} = \iiint_{V_R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\rho\,\mathbf{v}\,J\right]\mathrm{d}V_R$$

Korzystamy ze wzoru na pochodną iloczynu:

$$\dot{\mathbf{P}} = \iiint_{V_R}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\,J)\cdot\mathbf{v} + (\rho\,J)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}\right]\mathrm{d}V_R$$

WARUNKI CZWOROŚCIANU

Pochodna pędu: $$\dot{\mathbf{P}} = \iiint\limits_{V_R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho J)\cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}V_R + \iiint\limits_{V_R} (\rho J)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}\,\mathrm{d}V_R$$

Z zasady zachowania masy mamy $\rho J = \rho_R$, a przy tym $\rho_R(t) = const$, zatem:

$$\dot{\mathbf{P}} = \iiint\limits_{V_R} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_R)}_{=0}\cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}V_R + \iiint\limits_{V_R} \rho\cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}\,\underbrace{J\,\mathrm{d}V_R}_{\mathrm{d}V} = \iiint\limits_{V} \rho\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}V$$

Zasada pędu:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \iiint\limits_{V} \rho\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \mathbf{b}\,\mathrm{d}V + \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{t}\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_1} \mathbf{t}_1\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} \mathbf{t}_2\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_3} \mathbf{t}_3\,\mathrm{d}S$$

Dla każdej z całek możemy zastosować **twierdzenie o wartości średniej dla całek**, zgodnie z którym dla każdej całki oznaczonej na obszarze Ω o wielkości $|\Omega|$ z funkcji ciągłej $f(\mathbf{x})$ istnieje taki punkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, że

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\Omega = f(\mathbf{x}_0)|\Omega|$$

WARUNKI CZWOROŚCIANU

Zasada pędu:

$$\rho\,\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})\cdot V = \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}})\cdot V + \mathbf{t}(\check{\mathbf{x}})\cdot S + \mathbf{t_1}(\mathbf{x}')\cdot S_{23} + \mathbf{t_2}(\mathbf{x}'')\cdot S_{31} + \mathbf{t_3}(\mathbf{x}''')\cdot S_{12}$$

Uwzględniamy wzór na objętość czworościanu:

$$\rho\,\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})\cdot \frac{1}{3}hS = \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}})\cdot \frac{1}{3}hS + \mathbf{t}(\check{\mathbf{x}})\cdot S + \mathbf{t_1}(\mathbf{x}')\cdot S_{23} + \mathbf{t_2}(\mathbf{x}'')\cdot S_{31} + \mathbf{t_3}(\mathbf{x}''')\cdot S_{12}$$

Dzielimy przez S:

$$\rho\,\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})\cdot \frac{h}{3} = \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}})\cdot \frac{h}{3} + \mathbf{t}(\check{\mathbf{x}}) + \mathbf{t_1}(\mathbf{x}')\cdot \frac{S_{23}}{S} + \mathbf{t_2}(\mathbf{x}'')\cdot \frac{S_{31}}{S} + \mathbf{t_3}(\mathbf{x}''')\cdot \frac{S_{12}}{S}$$

Można udowodnić, że

$$\nu_1 = \frac{S_{23}}{S}, \qquad \nu_2 = \frac{S_{31}}{S}, \qquad \nu_3 = \frac{S_{12}}{S}$$

WARUNKI CZWOROŚCIANU

Zasada pędu:

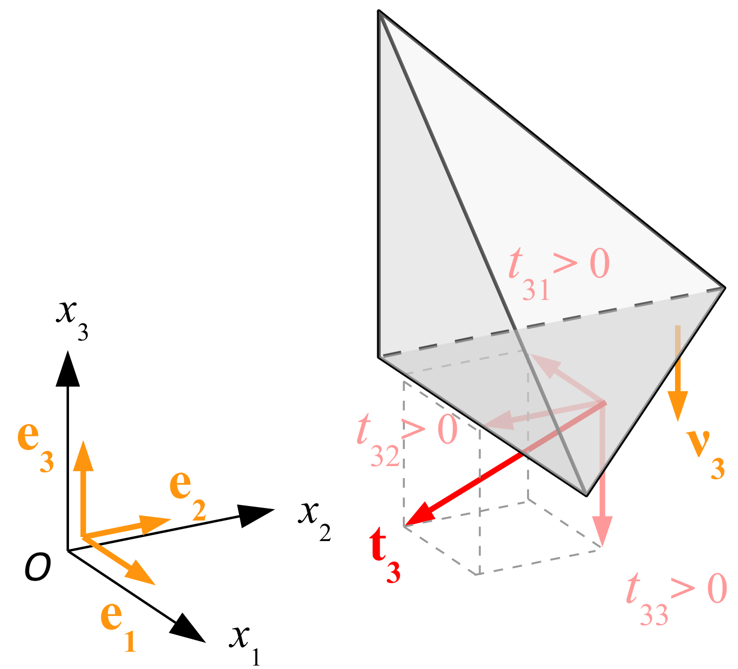
$$\rho\,\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})\cdot\frac{h}{3} = \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\frac{h}{3} + \mathbf{t}(\check{\mathbf{x}}) + \mathbf{t}_1(\mathbf{x}')\cdot\nu_1 + \mathbf{t}_2(\mathbf{x}'')\cdot\nu_2 + \mathbf{t}_3(\mathbf{x}''')\cdot\nu_3$$

W składowych (zapis wskaźnikowy):

$$\rho\,a_i(\hat{\mathbf{x}})\cdot\frac{h}{3} = b_i(\tilde{\mathbf{x}})\cdot\frac{h}{3} + t_i(\check{\mathbf{x}}) - t_{1i}(\mathbf{x}')\cdot\nu_1 - t_{2i}(\mathbf{x}'')\cdot\nu_2 - t_{3i}(\mathbf{x}''')\cdot\nu_3 \qquad i=1,2,3$$

Znaki „-” wynikają z przyjętej konwencji znakowania:

- normalne zewnętrzne ścianek są przeciwne do wersorów odpowiednich osi układu współrzędnych
- dodatnie składowe naprężenia są również przeciwne do tych osi
- scałkowane dodatnie naprężenia na tych ściankach dają siły skierowane przeciwnie do osi (ujemne).



WARUNKI CZWOROŚCIANU

Rozważmy **przejście graniczne** $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \rho\, a_i(\hat{\mathbf{x}})\cdot \frac{h}{3} = \lim_{h\to 0}\left[b_i(\tilde{\mathbf{x}})\cdot \frac{h}{3} + t_i(\check{\mathbf{x}}) - t_{1i}(\mathbf{x}')\cdot \nu_1 - t_{2i}(\mathbf{x}'')\cdot \nu_2 - t_{3i}(\mathbf{x}''')\cdot \nu_3 \right] \qquad i = 1,2,3$$

Wtedy składniki z siłami bezwładności oraz z siłami masowymi znikają, a punkty wartości średniej dla pozostałych całek zbiegają się do jednego punktu – wierzchołka czworościanu.

$$\hat{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{x}}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''' \quad \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \quad \mathbf{x}_A$$

Mamy wtedy:

$$t_i(\mathbf{x}_A) - t_{1i}(\mathbf{x}_A)\nu_1 - t_{2i}(\mathbf{x}_A)\nu_2 - t_{3i}(\mathbf{x}_A)\nu_3 = 0$$

co można zapisać następująco:

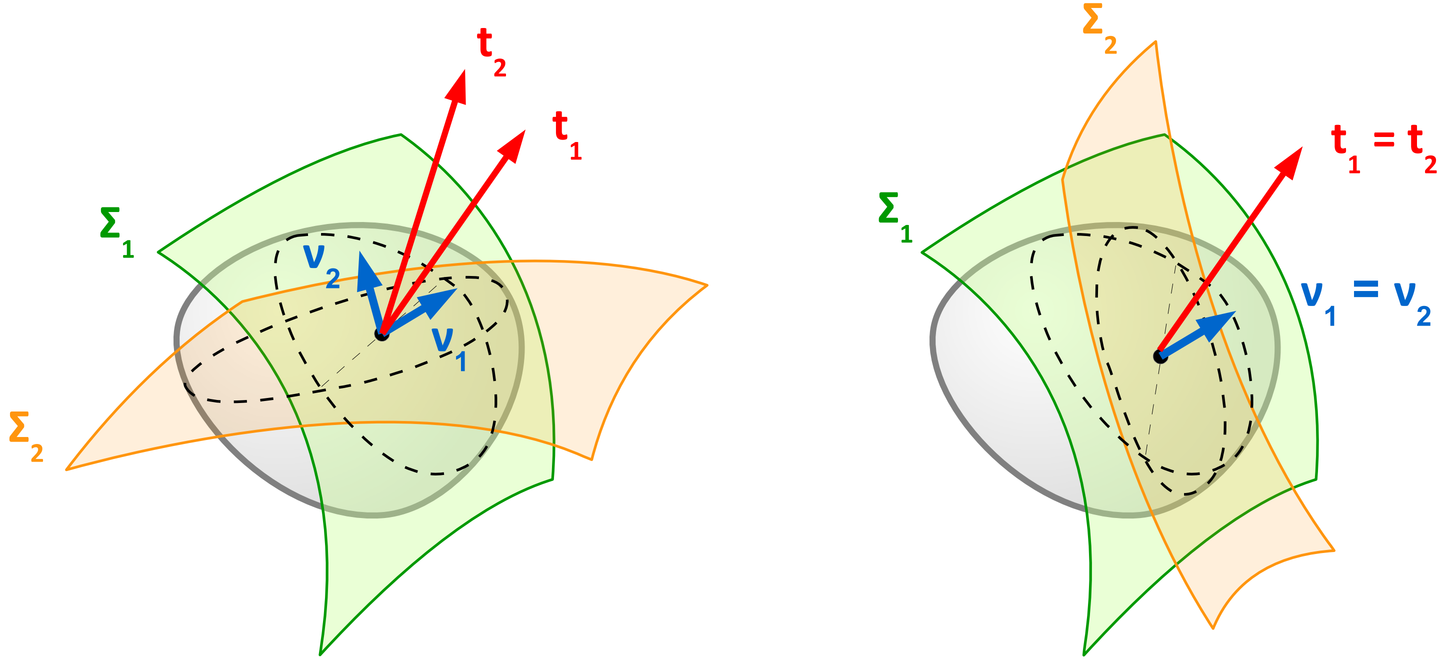
$$t_i = t_{ji}\nu_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} = (\mathbf{T}_\sigma)^{\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}$$

Można udowodnić, że obiekt $\mathbf{T}_\sigma$ jest **tensorem**. Nazywamy go tensorem naprężenia Cauchy'ego.

WARUNKI CZWOROŚCIANU

Wnioski płynące z warunków czworościanu:

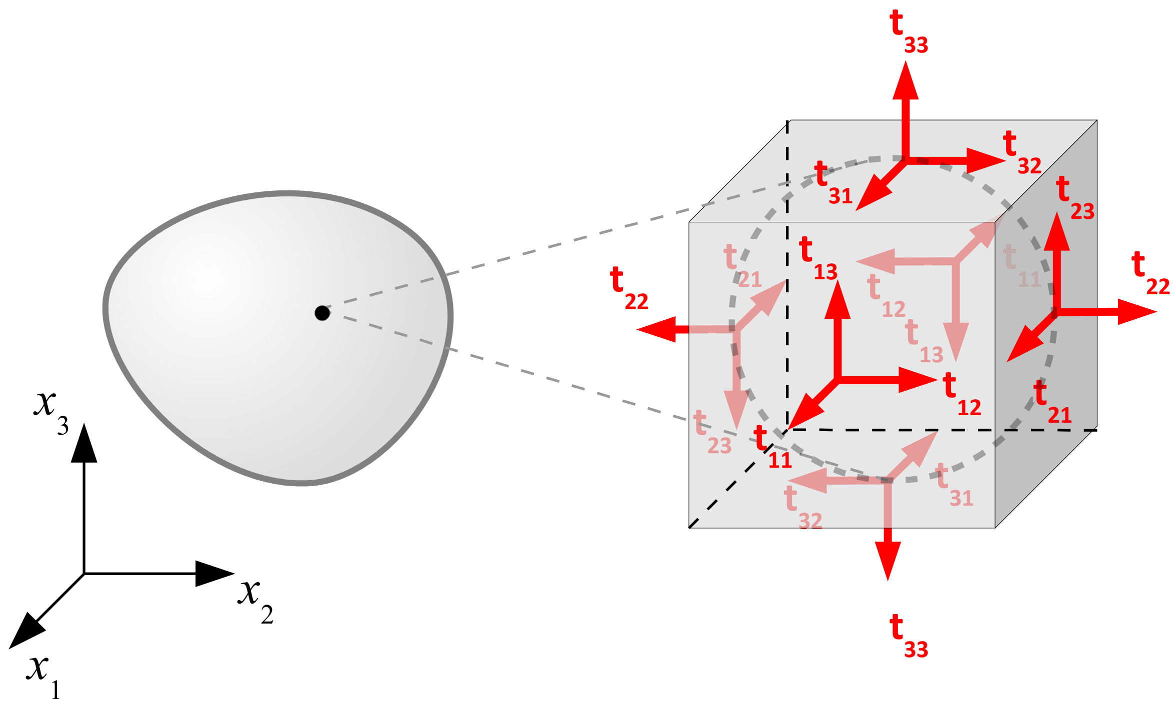
- **Wektor naprężenia** w danym punkcie i dla danej powierzchni cięcia **zależy wyłącznie od normalnej** tej płaszczyzny w rozpatrywanym punkcie, a nie od samej płaszczyzny



- **Aby wyznaczyć wektor naprężenia** w zadanym punkcie i dla zadanej normalnej, wystarczy znać rozkład naprężenia dla płaszczyzn prostopadłych do osi przyjętego układu, czyli **składowe tensora naprężenia**. Mówimy, że określa on stan naprężenia w ciele.

TENSOR NAPRĘŻENIA CAUCHY'EGO

Graficzna ilustracja interpretacji fizycznej składowych tensora naprężenia jest następująca:



- **składowe na przekątnej głównej** $t_{ij}\ (i=j)$ nazywać będziemy naprężeniami normalnymi – są to naprężenia rozciągające **(dodatnie)** lub ściskające **(ujemne),**
- **składowe spoza przekątnej głównej** $t_{ij}\ (i \neq j)$ nazywać będziemy naprężeniami stycznymi – są to naprężenia ścinające.

RÓWNANIA RUCHU OŚRODKA CIĄGŁEGO

RÓWNANIA RUCHU

Rozważmy niewielki wycinek ciała sprężystego i zapiszmy dla niego zasadę pędu:

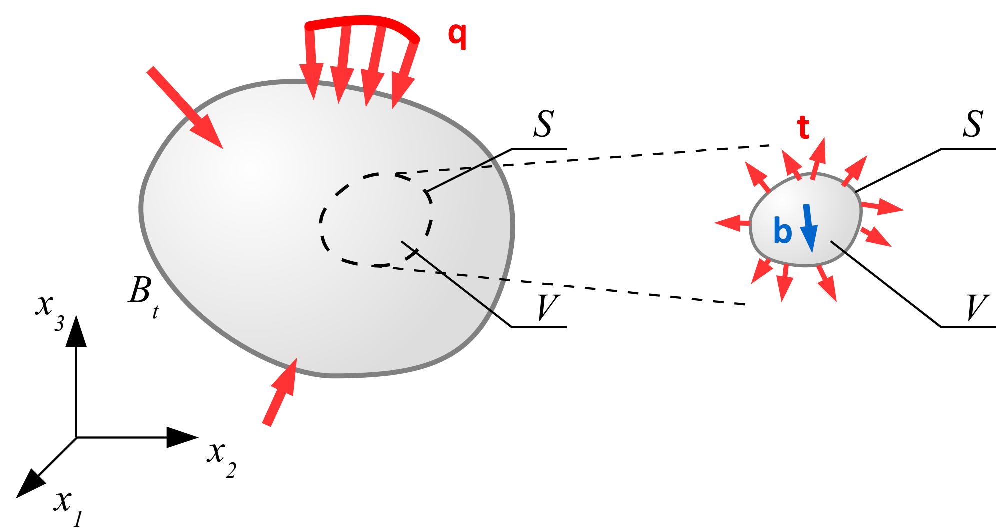
$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint\limits_V \rho \mathbf{v} \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \mathbf{b} \, \mathrm{d}V + \iint\limits_S \mathbf{t} \, \mathrm{d}S$$

Pochodną pędu obliczamy jak przy warunkach czworościanu. **Wektor naprężenia** wyrażamy za pomocą **tensora naprężenia i normalnej** do S. W zapisie wskaźnikowym:

$$\iiint\limits_V \rho a_i \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_V b_i \, \mathrm{d}V + \iint\limits_S t_{ji} \nu_j \, \mathrm{d}S$$

Do ostatniej całki stosujemy **twierdzenie Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iiint\limits_V \rho a_i \, \mathrm{d}V = \iiint\limits_V b_i \, \mathrm{d}V + \iiint\limits_V t_{ji,j} \, \mathrm{d}V$$



RÓWNANIA RUCHU

Suma całek to całka sumy:

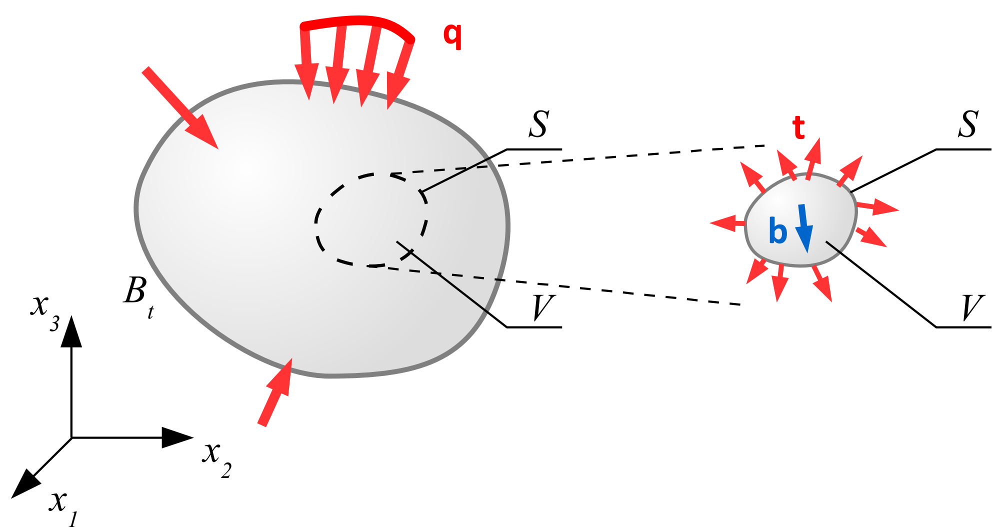
$$\iiint_V \left(\rho\,\ddot{u}_i - b_i - t_{ji,j}\right) \mathrm{d}V = 0$$

Ponieważ zależność ta ma zachodzić dla dowolnego obszaru V, zatem

$$\boxed{t_{ji,j} + b_i = \rho\,\ddot{u}_i \qquad i=1,2,3}$$

Jest to **układ** równań ruchu **ośrodka ciągłego** w opisie przestrzennym.

WNIOSEK: tensor naprężenia Cauchy'ego jest właściwy do opisu przestrzennego, skoro w Równaniach ruchu jest różniczkowany względem współrzędnych przestrzennych



RÓWNANIA RUCHU

Równania ruchu:

$$t_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial t_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial t_{31}}{\partial x_3} + b_1 = \rho \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial t_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial t_{32}}{\partial x_3} + b_2 = \rho \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial t_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial t_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial t_{33}}{\partial x_3} + b_3 = \rho \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{cases}$$

to **układ 3 równań różniczkowych cząstkowych rzędu 2**, na **9 składowych tensora naprężenia** oraz **3 składowe wektora przemieszczenia**.

Łącznie ze związkami geometrycznymi (lub równaniami nierozdzielności) wiążącymi 3 składowe wektora przemieszczenia i 6 składowych tensora odkształcenia mamy w sumie 9 równań na 18 niewiadomych.

Jeśli po prawej stronie równań damy 0 (**brak sił bezwładności** – zagadnienia **statyczne**), równania powyższe nazywamy równaniami równowagi Naviera.

RÓWNANIA RUCHU

Zapiszmy teraz zasadę krętu dla rozważanego wycinka ośrodka ciągłego, **przyjmując za biegun początek układu współrzędnych** ($\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$).

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{v}\times(-\mathbf{x})\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \mathbf{b}\times(-\mathbf{x})\,\mathrm{d}V + \iint\limits_S \mathbf{t}\times(-\mathbf{x})\,\mathrm{d}S$$

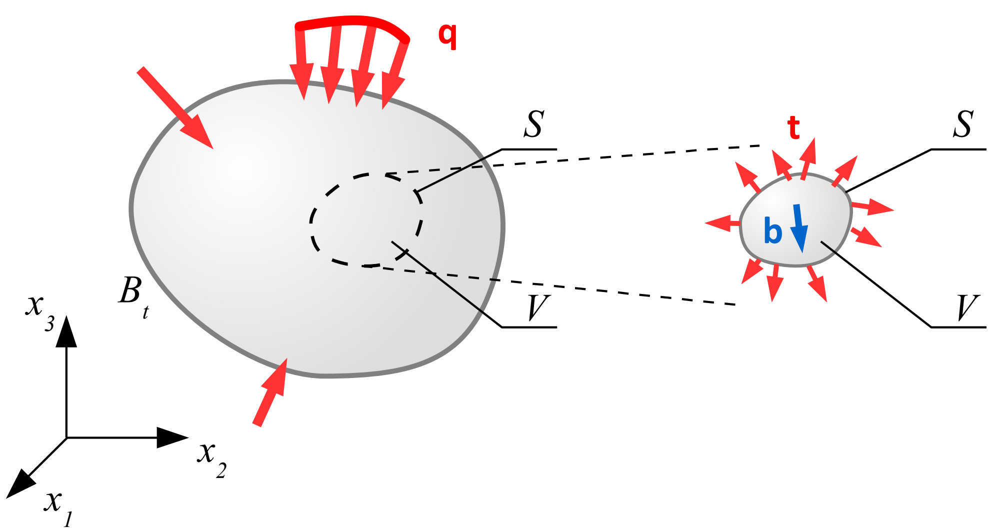
Pochodną względem czasu z całki po konfiguracji aktualnej obliczamy tak jak poprzednio:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{v}\times\mathbf{x}\,\mathrm{d}V = -\iiint\limits_V \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}\times\mathbf{x})\,\mathrm{d}V$$

Ze **wzoru na pochodną iloczynu**:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = -\iiint\limits_V \rho\,(\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{x} + \underbrace{\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{x}}}_{=\,\mathbf{v}\times\mathbf{v}\,=\,\mathbf{0}})\,\mathrm{d}V$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O = -\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{a}\times\mathbf{x}\,\mathrm{d}V$$



RÓWNANIA RUCHU

Zasada krętu:

$$\iiint_V \rho \mathbf{a} \times \mathbf{x} \, \mathrm{d}V = \iiint_V \mathbf{b} \times \mathbf{x} \, \mathrm{d}V + \iint_S \mathbf{t} \times \mathbf{x} \, \mathrm{d}S$$

W zapisie wskaźnikowym:

$$\iiint_V \rho \epsilon_{ijk} a_j x_k \, \mathrm{d}V = \iiint_V \epsilon_{ijk} b_j x_k \, \mathrm{d}V + \iint_S \epsilon_{ijk} t_j x_k \, \mathrm{d}S \qquad i=1,2,3$$

Uwzględniamy warunki czworościanu:

$$\iiint_V \rho \epsilon_{ijk} a_j x_k \, \mathrm{d}V = \iiint_V \epsilon_{ijk} b_j x_k \, \mathrm{d}V + \iint_S \epsilon_{ijk} t_{lj} \nu_l x_k \, \mathrm{d}S$$

Stosujemy twierdzenie Greena – Gaussa – Ostrogradskiego:

$$\iiint_V \rho \epsilon_{ijk} a_j x_k \, \mathrm{d}V = \iiint_V \epsilon_{ijk} b_j x_k \, \mathrm{d}V + \iiint_V \left(\epsilon_{ijk} t_{lj} x_k \right)_{,l} \mathrm{d}V$$

Zajmijmy się ostatnią całką.

RÓWNANIA RUCHU

Symbol permutacyjny w funkcji podcałkowej **nie podlega różniczkowaniu**. Do reszty funkcji podcałkowej stosujemy **wzór na pochodną iloczynu**:

$$\left(\epsilon_{ijk} t_{lj} x_k\right)_{,l} = \epsilon_{ijk}\left(t_{lj} x_k\right)_{,l} = \epsilon_{ijk}\left(t_{lj,l} x_k + t_{lj} x_{k,l}\right) = \epsilon_{ijk}\left(t_{lj,l} x_k + t_{lj}\delta_{kl}\right) = \epsilon_{ijk}\left(t_{lj,l} x_k + t_{kj}\right)$$

Podstawiamy uzyskany wynik do zasady krętu:

$$\iiint_V \rho\,\epsilon_{ijk} a_j x_k \,\mathrm{d}V = \iiint_V \epsilon_{ijk} b_j x_k \,\mathrm{d}V + \iiint_V \left(\epsilon_{ijk} t_{lj,l} x_k + \epsilon_{ijk} t_{kj}\right)\mathrm{d}V$$

Pierwszą całkę po prawej stronie przenosimy na lewą stronę. Suma całek to całka sumy:

$$\iiint_V \epsilon_{ijk} x_k \underbrace{\left(\rho a_j - b_j - t_{lj,l}\right)}_{0} \mathrm{d}V = \iiint_V \epsilon_{ijk} t_{kj} \,\mathrm{d}V$$

Zerowanie się lewej strony wynika z konieczności spełnienia równań ruchu (zasady pędu). Mamy zatem:

$$\iiint_V \epsilon_{ijk} t_{kj} \,\mathrm{d}V = 0$$

RÓWNANIA RUCHU

Zależność ta ma być spełniona dla dowolnego obszaru V, zatem:

$$\epsilon_{ijk} t_{kj} = 0$$

Możemy rozpisać powyższe wyrażenie:

$$\begin{aligned}
i=1: &\quad \epsilon_{1jk} t_{kj} = t_{32} - t_{23} = 0 \quad &\Rightarrow \quad t_{23} = t_{32} \\
i=2: &\quad \epsilon_{2jk} t_{kj} = t_{13} - t_{31} = 0 \quad &\Rightarrow \quad t_{31} = t_{13} \\
i=3: &\quad \epsilon_{3jk} t_{kj} = t_{21} - t_{12} = 0 \quad &\Rightarrow \quad t_{12} = t_{21}
\end{aligned}$$

WNIOSEK: Konsekwencją spełnienia **zasady momentu pędu** jest symetria tensora naprężenia Cauchy'ego:

$$\boxed{t_{ij} = t_{ji}}$$

WARUNKI GRANICZNE DLA RÓWNAŃ RUCHU

WARUNKI GRANICZNE

- Układ równań ruchu to układ **równań różniczkowych** – aby **rozwiązanie było jednoznaczne**, konieczne jest podanie dodatkowych **warunków granicznych**.

- To układ równań cząstkowych z uwagi na zmienną czasową (pochodne rzędu 2) oraz zmienne przestrzenne (pochodne rzędu 1). Konieczne jest zatem podanie:

  - 2 warunków początkowych (związane z różniczkowaniem względem **zmienną czasową**)
    - położenie początkowe – warunek na przemieszczenie (**funkcję niewiadomą**) w chwili początkowej
    - prędkość początkowa – warunek na **1-szą pochodną funkcji niewiadomej** w chwili początkowej

  - warunków brzegowych na całym brzegu ciała (związane z różniczkowaniem względem **zmiennych przestrzennych**). Jeśli chodzi o warunki brzegowe, to wyróżniamy 2 ich rodzaje:
    - kinematyczne warunki brzegowe – ustalone przemieszczenia punktów na brzegu ciała
    - statyczne warunki brzegowe – ustalone obciążenie powierzchniowe w punktach na brzegu ciała. To warunki na pochodne przemieszczenia względem zmiennych przestrzennych – pochodnymi tymi są odkształcenia, które da się wyrazić przez naprężenia, które z kolei wiążą się z obciążeniem.

UWAGA: Jeśli podamy warunki tylko na pochodne (prędkość, naprężenia), wtedy rozwiązanie będzie niejednoznaczne.

WARUNKI GRANICZNE

WARUNKI POCZĄTKOWE

- położenie początkowe każdej cząstki w chwili t_0: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u_0}(\mathbf{x})$

- prędkość początkowa każdej cząstki w chwili t_0: $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v_0}(\mathbf{x})$

KINEMATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

- ustalone przemieszczenie cząstek w każdej chwili na brzegu chwili S_u:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, t) \qquad \mathbf{x} \in S_u$$

WARUNKI GRANICZNE

Aby wyznaczyć statyczne warunki brzegowe, zapiszmy zasadę pędu **dla całego ciała**.

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{S} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{B_t} \rho \mathbf{v} \, \mathrm{d}V = \iiint_{B_t} \mathbf{b} \, \mathrm{d}V + \iint_{S_t} \mathbf{q} \, \mathrm{d}S$$

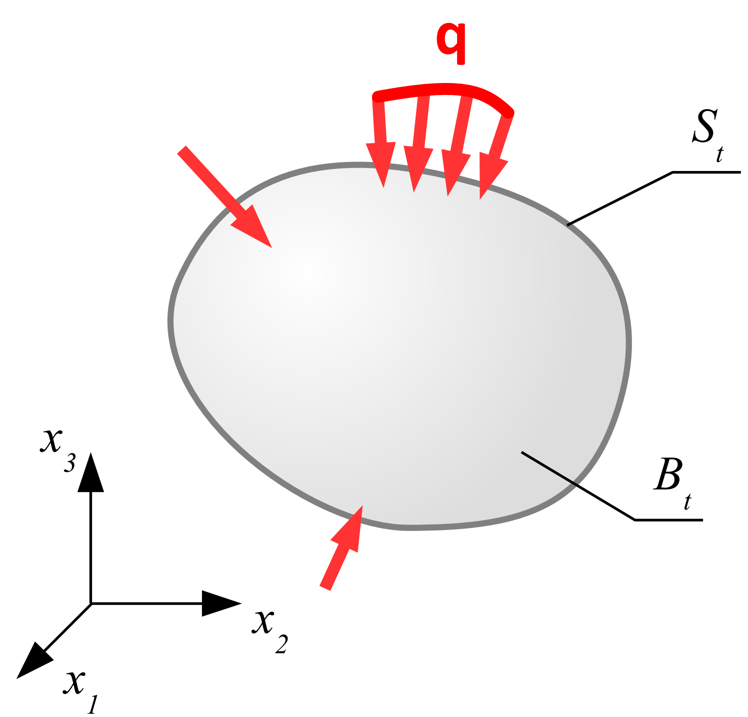
Pochodną względem czasu z całki po konfiguracji aktualnej obliczamy jak poprzednio.
W zapisie wskaźnikowym:

$$\iiint_{B_t} \rho \ddot{u}_i \, \mathrm{d}V = \iiint_{B_t} b_i \, \mathrm{d}V + \iint_{S_t} q_i \, \mathrm{d}S$$

Wektor sił masowych możemy wyrazić poprzez równania ruchu:

$$t_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad \Rightarrow \quad b_i = \rho \ddot{u}_i - t_{ji,j}$$

$$\iiint_{B_t} \rho \ddot{u}_i \, \mathrm{d}V = \iiint_{B_t} (\rho \ddot{u}_i - t_{ji,j}) \, \mathrm{d}V + \iint_{S_t} q_i \, \mathrm{d}S$$



WARUNKI GRANICZNE

Pierwszą całkę po prawej stronie przenosimy na lewą stronę i korzystamy z **addytywności całki:**

$$\iiint_{B_t} t_{ji,j} \,\mathrm{d}V = \iint_{S_t} q_i \,\mathrm{d}S$$

Do całki po lewej stronie stosujemy **twierdzenie Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iint_{S_t} t_{ji} \nu_j \,\mathrm{d}S = \iint_{S_t} q_i \,\mathrm{d}S \qquad \Rightarrow \qquad \iint_{S_t} (t_{ji} \nu_j - q) \,\mathrm{d}S = 0$$

Zależność ta ma zachodzić **dla dowolnej powierzchni** S_t, zatem:

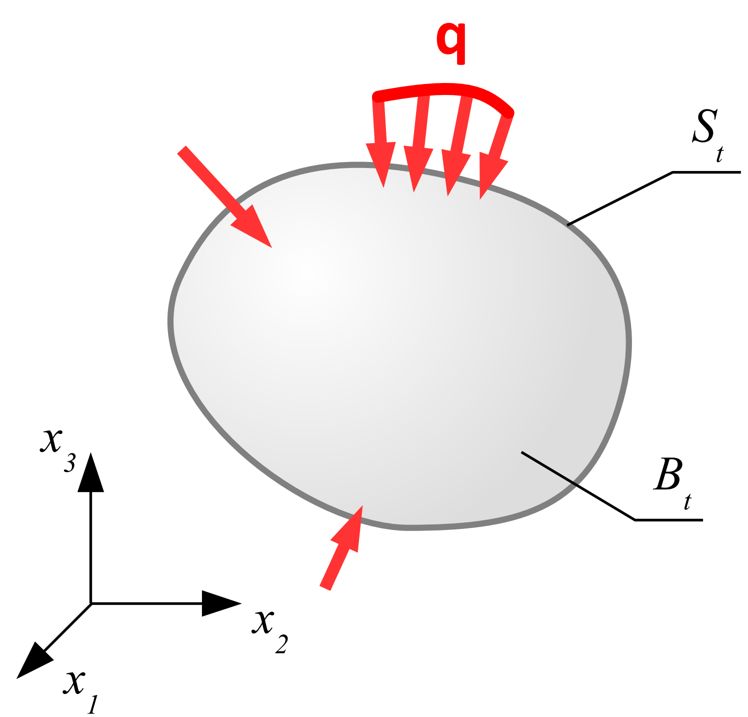
$$t_{ji} \nu_j - q = 0$$

Otrzymujemy:

STATYCZNE WARUNKI BRZEGOWE

- Ustalone obciążenie na brzegu S_t**:**

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in S_t$$



WARUNKI GRANICZNE

UWAGI:

- Brzeg dowolnego ośrodka ciągłego można podzielić na dwie części
  - część S_u , na której zadane są **ustalone przemieszczenia** w każdej chwili (podparcie lub wymuszenie kinematyczne)
  - część S_q , na której zadane są **ustalone obciążenia** w każdej chwili
- Jeśli na jakiejś części brzegu „nic się nie dzieje” (**brzeg swobodny**), to należy tam zadać **jednorodne** (**zerowe**) **statyczne warunki brzegowe**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ