TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

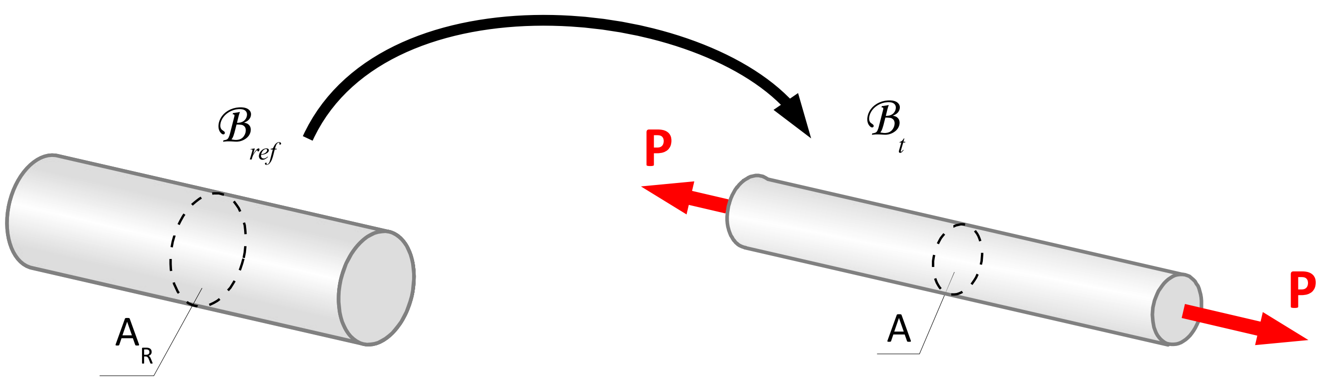
adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

DYNAMIKA W OPISIE MATERIALNYM

dr inż. Paweł Szeptyński

NAPRĘŻENIE NOMINALNE

- Chcielibyśmy dysponować **równaniami ruchu w opisie materialnym**.
- **Równania ruchu** są lokalnym **równaniem równowagi naprężeń, sił masowych i pozornych sił bezwładności**.
- Tensor naprężenia Cauchy'ego jest miarą **naprężeń rzeczywistych** – gęstości aktualnych wewnętrznych sił powierzchniowych odniesionych do zdeformowanej powierzchni ciała (konfiguracja aktualna). Nazywamy go tensorem naprężeń rzeczywistych.
- **W opisie materialnym dziedziną** w przestrzeni jest **konfiguracja odniesienia**. Potrzebujemy takiej miary sił wewnętrznych, którą będzie można użyć właśnie w takiej dziedzinie – chodzi o gęstość **aktualnych wewnętrznych sił powierzchniowych** odniesionych do **początkowych** (**niezdeformowaneych**) **elementów powierzchniowych**. Naprężenia takie nazywamy naprężeniami nominalnymi.



naprężenie rzeczywiste

$$t = \frac{P}{A}$$

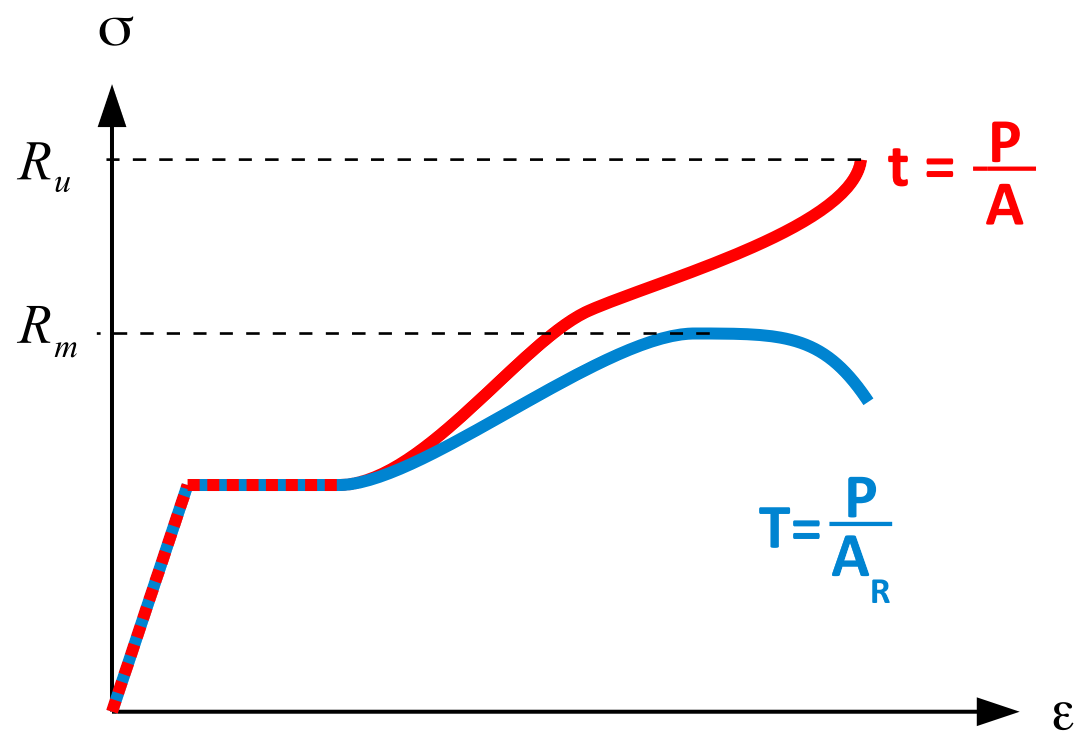
naprężenie nominalne

$$T = \frac{P}{A_R}$$

NAPRĘŻENIE NOMINALNE

R_u – rzeczywiste naprężenie zrywające

R_m – wytrzymałość na rozciąganie



UWAGI:

- We wzorach wytrzymałości materiałów nie uwzględniamy faktu, że pole powierzchni odniesienia w przekroju poprzecznym zmieniło się wskutek deformacji:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

- Te same wzory stanowią podstawę formułowania zaleceń normowych, zatem w **normach najczęściej posługujemy się naprężeniem nominalnym**.

naprężenie rzeczywiste

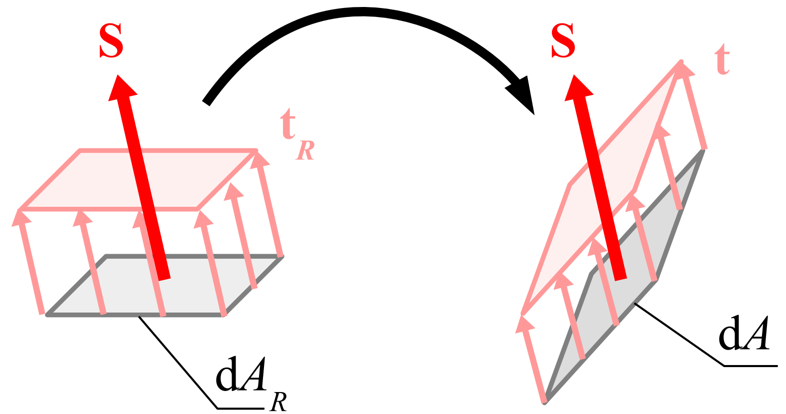
$$t = \frac{P}{A}$$

naprężenie nominalne

$$T = \frac{P}{A_R}$$

NAPRĘŻENIE NOMINALNE

Wprowadzamy wektor naprężenia nominalnego $\mathbf{t}_{\boldsymbol{R}}$ zdefiniowany w taki sposób, aby **suma naprężeń rzeczywistych zebranych z nieskończenie małego zdeformowanego elementu powierzchniowego** była równa **sumie naprężeń nominalnych zabranych z tego samego elementu przed deformacją**:



$$\mathbf{S} = \mathbf{t}\,\mathrm{d}A = \mathbf{t}_{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}A_R$$

Wyrażamy **wektor naprężenia rzeczywistego z**a pomocą **tensora naprężenia Cauchy'ego**:

$$\left(\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = \mathbf{t}_{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}A_R$$

Wektor $\mathbf{n}\,\mathrm{d}A$ przekształcamy za pomocą **wzoru Nansona**:

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = J\,\mathbf{N}\mathbf{F}^{-1}\mathrm{d}A_R \quad \Leftrightarrow \quad n_i\mathrm{d}A = J\,N_j f_{ji}\mathrm{d}A_R$$

$$\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = J\left(\mathbf{F}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\,\mathrm{d}A_R \quad \Leftrightarrow \quad n_i\mathrm{d}A = J\,f_{ji}N_j\mathrm{d}A_R$$

NAPRĘŻENIE NOMINALNE

W rezultacie otrzymujemy:

$$J\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}^{-\mathbf{T}}\mathbf{N}\,\mathrm{d}A_R = \mathbf{t}_{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}A_R$$

Związek ten ma zachodzić dla dowolnego elementu powierzchniowego $\mathrm{d}A_R$, stąd:

$$J\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{T}}\mathbf{F}^{\text{-}\mathbf{T}}\mathbf{N} = \mathbf{t}_{\boldsymbol{R}}$$

Przez analogię do związku tensora naprężenia Cauchy'ego i wektora naprężenia rzeczywistego, korzystając z **symetrii tensora naprężenia** $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}$ możemy napisać:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{R}}\mathbf{N} = \mathbf{t}_{\boldsymbol{R}} \qquad \text{gdzie} \qquad \mathbf{T}_{\boldsymbol{R}} = J\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{F}^{\text{-}\mathbf{T}}$$

$$T_{ij}N_j = T_i \qquad \text{gdzie} \qquad T_{ij} = J\,t_{ik}\,f_{jk}$$

Tensor $\mathbf{T}_{\boldsymbol{R}}$ nazywamy tensorem naprężenia Pioli – Kirchhoffa 1 rodzaju lub tensorem naprężeń nominalnych. Z uwagi na brak symetrii $\mathbf{F}^{-1}$ tensor ten jest **niesymetryczny**.

RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Rozważmy pewien podobszar konfiguracji początkowej ośrodka ciągłego.

- interakcję tego wycinka zresztą ośrodka zapewnia **obecność naprężeń**, które w **konfiguracji odniesienia** opisujemy **wektorem naprężenia nominalnego**

- Możemy znaleźć prosty **związek między siłami masowymi w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej**. Ich suma w obydwu konfiguracjach musi być równa:

$$\iiint_V b_i \,\mathrm{d}V = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R$$

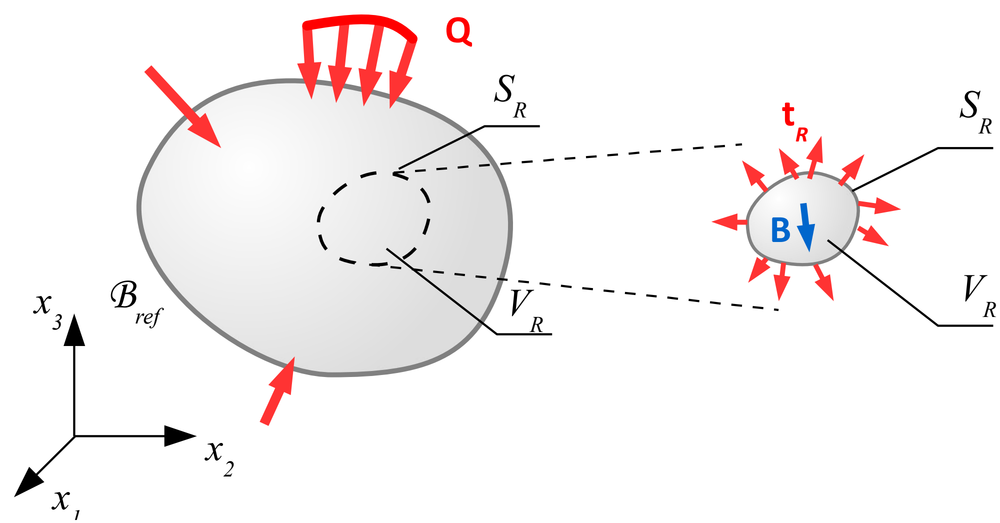
$$\iiint_{V_R} J\, b_i \,\mathrm{d}V_R = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R \qquad \forall_{V} \, R$$

$$J\, b_i = B_i$$

gdy mowa o obciążeniu grawitacyjnym:

$$b_i = \rho\, g_i$$

$$B_i = J\, b_i = J\, \rho\, g_i = \rho_R\, g_i$$



RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Zapiszmy zasadę pędu:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{S} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V_R} \rho_R v_i \,\mathrm{d}V_R = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R + \iint_{S_R} T_i \,\mathrm{d}S_R \qquad i=1,2,3$$

Obszar całkowania jest niezależny od czasu. Możemy wejść ze znakiem pochodnej pod całkę.

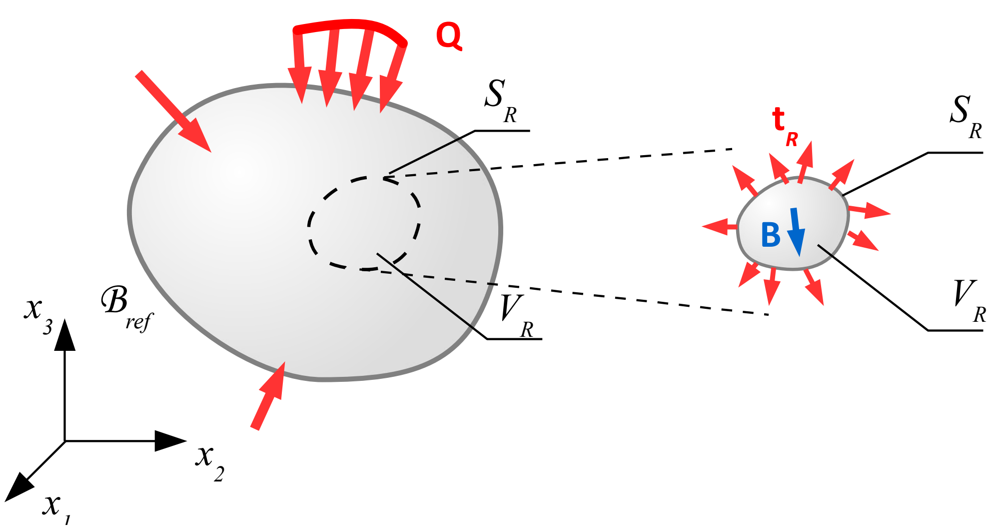
$$\iiint_{V_R} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rho_R v_i \,\mathrm{d}V_R = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R + \iint_{S_R} T_i \,\mathrm{d}S_R$$

Gęstość odniesienia nie zależy od czasu

$$\iiint_{V_R} \rho_R a_i \,\mathrm{d}V_R = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R + \iint_{S_R} T_i \,\mathrm{d}S_R$$

Wyrażamy naprężenie nominalne przez tensor PK1:

$$\iiint_{V_R} \rho_R a_i \,\mathrm{d}V_R = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R + \iint_{S_R} T_{ij} N_j \,\mathrm{d}S_R$$



RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Wykorzystujemy **tw. Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iiint_{V_R} \rho_R a_i \,\mathrm{d}V_R = \iiint_{V_R} B_i \,\mathrm{d}V_R + \iiint_{V_R} T_{ij,j} \,\mathrm{d}V_R$$

Suma całek, to całka sumy:

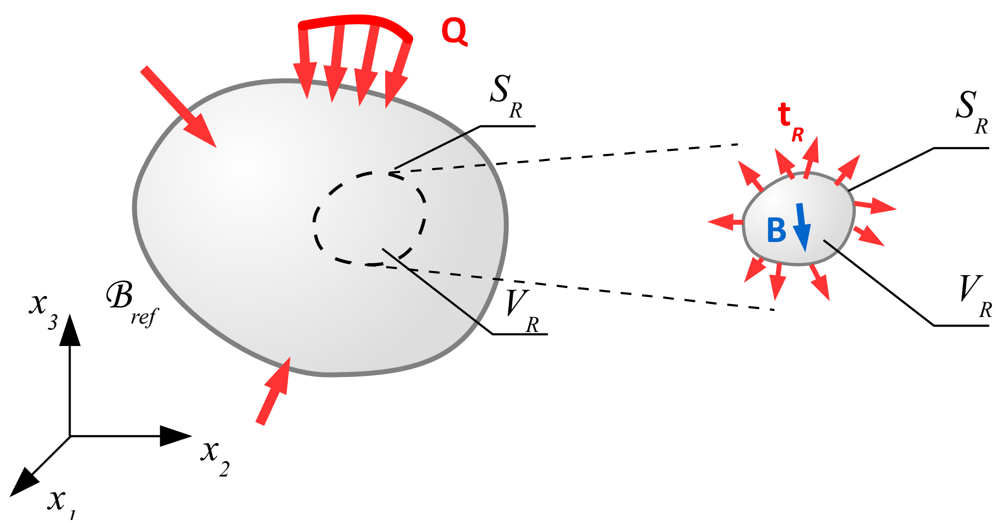
$$\iiint_{V_R} \left(\rho_R a_i - B_i - T_{ij,j}\right) \mathrm{d}V_R = 0$$

Związek ma zachodzić dla **dowolnego obszaru** V_R :

$$\boxed{T_{ij,j} + B_i = \rho_R \ddot{u}_i \qquad i=1,2,3}$$

Otrzymaliśmy równania ruchu **ośrodka ciągłego** w opisie materialnym.

Jest jednak pewien problem...



RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

- **Równania ruchu** gwarantują spełnienie **zasady pędu**.
- W **opisie przestrzennym** spełnienie **zasady krętu** było gwarantowane przez **symetrię tensora naprężenia Cauchy'ego.**
- W **opisie materialnym** posługujemy się **tensorem naprężeń nominalnych**, który **nie jest symetryczny**. Ma on 9 niezależnych składowych, a równań ruchu mamy tylko 3.
- Spełnienie zasady krętu zagwarantujemy zapisując warunek na symetrię tensora naprężeń rzeczywistych wyrażony przez tensor naprężeń nominalnych:

$$\mathbf{T}_R = J\,\mathbf{T}_\sigma \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{T}_\sigma = \frac{1}{J}\mathbf{T}_R \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

Z zasady krętu:

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\sigma^{\mathrm{T}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{J}\mathbf{T}_R \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{J}\left(\mathbf{T}_R \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{T}_R \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}\,\mathbf{T}_R^{\mathrm{T}}$$

$$\boxed{T_{ik}\frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} T_{jk} \qquad \begin{matrix} i,j=1,2,3 \\ i\neq j \end{matrix}}$$

RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Układ równań ruchu w opisie materialnym:

$$\begin{cases} T_{ij,j} + B_i = \rho_R \ddot{u}_i & i=1,2,3 \\ T_{ik} \dfrac{\partial x_j}{\partial X_k} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_k} T_{jk} & \begin{matrix} i,j=1,2,3 \\ i \neq j \end{matrix} \end{cases}$$

Warunki początkowe:

- położenie początkowe: $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{u_0}(\mathbf{X})$
- prędkość początkowa: $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{v_0}(\mathbf{X})$

Warunki brzegowe:

- kinematyczne warunki brzegowe: $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{0}(\mathbf{X}, t)$ dla $\mathbf{X} \in S_u$
- statyczne warunki brzegowe: $\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \mathbf{N}$ dla $\mathbf{X} \in S_q$

RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Liczbę niewiadomych możemy zredukować wprowadzając nową, symetryczną miarę naprężeń.

Definiujemy tensor naprężenia Pioli – Kirchhoffa 2 rodzaju (tensor naprężeń materialnych) następująco:

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_R = J\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_\sigma\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad S_{ij} = f_{ik}T_{kj} = J\,f_{ik}t_{kl}f_{jl}$$

Wyrażając składowe tensora PK2 przez składowe tensora Cauchy'ego otrzymamy:

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}_S)^\mathrm{T} &= J\left(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_\sigma\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right)^\mathrm{T} = J\left[\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{T}_\sigma\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right)\right]^\mathrm{T} = J\left(\mathbf{T}_\sigma\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right)^\mathrm{T}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \\ &= J\left(\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}\right)^\mathrm{T}\mathbf{T}_\sigma{}^\mathrm{T}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = J\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_\sigma\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} = \mathbf{T}_S\end{aligned}$$

A zatem tensor jest symetryczny. Jeśli wyrazimy tensor PK1 przez tensor PK2 i podstawimy do związku wynikającego z zasady krętu, otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{T}_R\mathbf{F}^\mathrm{T} &= \mathbf{F}\,\mathbf{T}_R^\mathrm{T} \\ \mathbf{T}_R &= \mathbf{F}\,\mathbf{T}_S\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\,\mathbf{T}_S\mathbf{F}^\mathrm{T} = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}\,\mathbf{T}_S\right)^\mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\,\mathbf{T}_S\mathbf{F}^\mathrm{T} = \mathbf{F}\,\mathbf{T}_S^\mathrm{T}\mathbf{F}^\mathrm{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\,\mathbf{T}_S\mathbf{F}^\mathrm{T} = \mathbf{F}\,\mathbf{T}_S\mathbf{F}^\mathrm{T}$$

Warunek jest tożsamościowo spełniony.

RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Związek między tensorami PK1 i PK2 w zapisie wskaźnikowym:

$$T_{ij} = F_{ik} S_{kj} = x_{i,k} S_{kj} = (X_i + u_i)_{,k} S_{kj} = (X_{i,k} + u_{i,k}) S_{kj} = (\delta_{ik} + u_{i,k}) S_{kj} = S_{ij} + u_{i,k} S_{kj}$$

Równania ruchu w opisie materialnym wyrażone przez tensor PK2:

$$T_{ij,j} + B_i = \rho_R \ddot{u}_i$$

$$\left[S_{ij} + u_{i,k} S_{kj} \right]_{,j} + B_i = \rho_R \ddot{u}_i$$

$$\boxed{S_{ij,j} + u_{i,kj} S_{kj} + u_{i,k} S_{kj,j} + B_i = \rho_R \ddot{u}_i}$$

- Równania są dużo bardziej rozbudowane
- Są to równania na 3 składowe przemieszczenia i 6 składowych tensora naprężenia
- Wymagają postawienia **warunków początkowych** i **brzegowych**.
- Statyczne warunki brzegowe:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \mathbf{N} = \mathbf{F} \mathbf{T}_S \mathbf{N} \quad \text{dla} \quad \mathbf{X} \in S_q$$

Jest jednak pewien problem...

RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

Tensor naprężenia Pioli – Kirchhoffa 2 rodzaju **nie ma klarownej, bezpośredniej interpretacji fizycznej**.

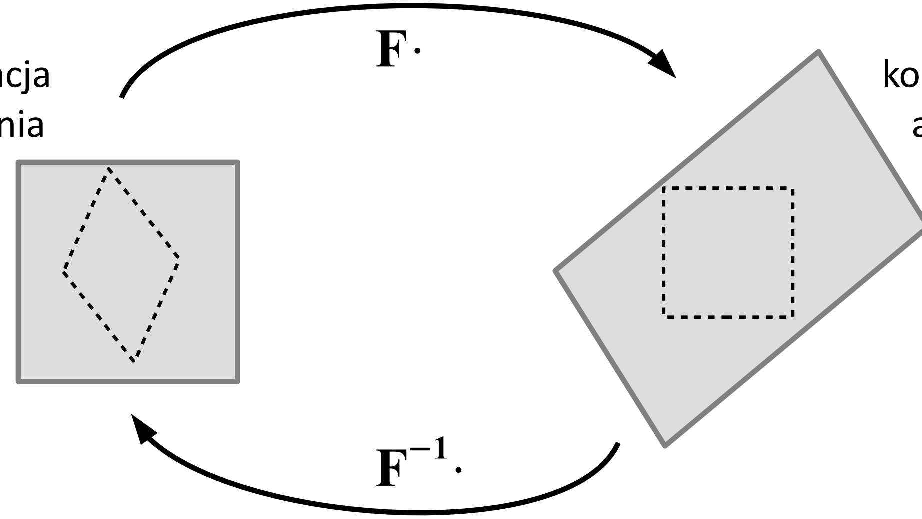
Gdybyśmy wyznaczyli wektor naprężenia analogicznie jak w przypadku pozostałych tensorów naprężenia, wtedy:

$$\mathbf{t}_S = \mathbf{T}_S \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_R \mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{t}_R$$

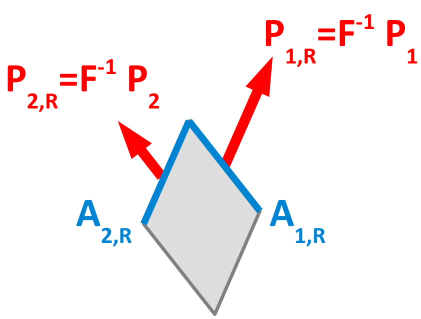
- wiemy, że gradient deformacji i jego odwrotność wiążą ze sobą wektory opisujące nieskończenie małe włókna materialne przed i po deformacji.
- Naprężenie jest miarą wektorową, której kierunek i zwrot interpretujemy jako kierunek i zwrot siły odniesionej do pola powierzchni, a długość to stosunek wielkości siły i tego pola.
- Wektory $\mathbf{t}_R$ i $\mathbf{t}_S$ są odniesione do tego samego pola. Odwzorowanie między tymi wektorami można interpretować, jako odwzorowanie między pewnymi siłami,
- Gdyby traktować wektory naprężenia i wektory sił jak włókna materialne, wtedy wektor naprężenia $\mathbf{t}_R$ byłby „zdeformowanym” wektorem $\mathbf{t}_S$ – albo inaczej – wektor $\mathbf{t}_S$ byłby **wektorem naprężenia nominalnego „sprowadzonym” do konfiguracji odniesienia** – naprężenie takie nazywamy naprężeniem materialnym.

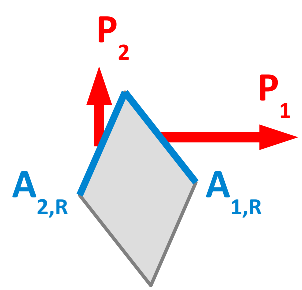
RÓWNANIA RUCHU W OPISIE MATERIALNYM

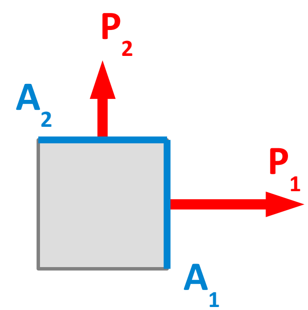
konfiguracja odniesienia



konfiguracja aktualna







$$S_{11} = \frac{P_{1,R}}{A_{1,R}}$$

naprężenie materialne

$$T_{11} = \frac{P_{1}}{A_{1,R}}$$

naprężenie nominalne

$$t_{11} = \frac{P_{1}}{A_{1}}$$

naprężenie rzeczywiste

ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE

ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE

Do opisu deformacji ośrodka ciągłego wykorzystujemy:

- 3 składowe wektora przemieszczenia
- **6 składowych** symetrycznego tensora odkształcenia
- **6 składowych** (9 składowych) symetrycznego (niesymetrycznego) tensora naprężenia

Mamy łącznie 15 (18) funkcji niewiadomych. Do tej pory określiliśmy następujące zależności, na podstawie których próbować będziemy wyznaczać te niewiadome:

- 6 związków geometrycznych lub **6** równań nierozdzielności – zależności między **odkształceniem** a **przemieszczeniem.**
  - Jeśli spełnione są związki geometryczne, wtedy równania nierozdzielności są spełnione tożsamościowo.
  - Jeśli spełnione są warunki nierozdzielności, wtedy związki geometryczne są całkowalne i posiadają jednoznaczne rozwiązanie

- 3 równania ruchu wynikające z **zasady pędu** – zależność między **naprężeniem** a **przyspieszeniem**
  - **dodatkowe 3 związki** na składowe **niesymetrycznego tensora naprężenia** wynikające z **zasady krętu**. Dla symetrycznych tensorów Cauchy'ego i Pioli - Kirchhoffa 2 rodzaju są one spełnione tożsamościowo.

Mamy 15 (18) niewiadomych i 9 (12) równań. Brakuje na 6 związków między naprężeniem i odkształceniem.

ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE

Związki między składowymi tensora naprężenia i tensora odkształcenia nazywamy związkami konstytutywnymi.

Formułuje się 3 tzw. postulaty materiałowe, które związki takie muszą spełniać.

- ZASADA DETERMINIZMU
- ZASADA LOKALNOŚCI
- ZASADA OBIEKTYWNOŚCI MATERIALNEJ

POSTULATY MATERIAŁOWE

ZASADA DETERMINIZMU

Stan naprężenia w danej cząstce $\mathbf{X}$ i w danej chwili t jest **zdeterminowany** (określony) przez **wybór tej cząstki** oraz przez **historię ruchu wszystkich cząstek** należących do ciała.

$$\mathbf{T}(\mathbf{X};t) = f\left(\mathbf{X}, \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t-\tau)\right), \quad \boldsymbol{\xi} \in B_{ref}, \quad \tau \in \langle 0 \,;\, \infty)$$

to oznacza:

- Jeśli znamy przebieg procesu (historię) deformacji ciała, to związki konstytutywne muszą być takie, że wiedza ta wystarczy do wyznaczenia stanu naprężenia.
- Zakładamy, że na stan naprężenia w danym punkcie i danej chwili nie wpływają inne czynniki, jak tylko historia deformacji.

UWAGA: $\mathbf{T}$ oznacza pewną wybraną przez nas miarę naprężenia.

POSTULATY MATERIAŁOWE

ZASADA LOKALNOŚCI

Naprężenie w danej cząstce $\mathbf{X}$ i w danej chwili t zależy **od historii ruchu cząstek ciała, znajdujących się w dowolnie małym otoczeniu tej cząstki**.

$$\mathbf{T}(\mathbf{X};t) = f\left(\mathbf{X},\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t-\tau)\right), \quad \boldsymbol{\xi}\in B_{ref}, \quad \tau\in\langle 0\,;\,\infty)$$

$$|\boldsymbol{\xi}-\mathbf{X}| < \varepsilon \to 0$$

to oznacza:

- Stan naprężenia w cząstce zależy w sposób bezpośredni jedynie od ruchu cząstek sąsiednich – inne cząstki wpływają na stan naprężenia jedynie pośrednio (poprzez „łańcuch” bezpośrednich oddziaływań między cząsteczkami sąsiednimi)

- Związek konstytutywny nie może określać związku pomiędzy stanem naprężenia w danej cząstce a deformacją cząstek odległych.

dr inż. Paweł Szeptyński

POSTULATY MATERIAŁOWE

ZASADA OBIEKTYWNOŚCI MATERIALNEJ

Związki konstytutywne, określające wewnętrzne warunki układu fizycznego oraz oddziaływania pomiędzy poszczególnymi jego częściami, muszą być niezależne od wyboru układu odniesienia.

to oznacza:

- Związki konstytutywne muszą być sformułowane matematycznie w sposób, który określonej lokalnej historii deformacji przyporządkuje zawsze ten sam stan naprężenia, niezależnie od tego, jakim posługujemy się układem odniesienia, tj. niezależnie od wyboru punktu odniesienia w przestrzeni, wyboru miary i kierunków pomiaru odległości oraz wyboru miary tempa upływu czasu.

POSTULATY MATERIAŁOWE

Wśród typowych materiałów konstrukcyjnych powszechnie wykorzystuje się materiały jednorodne i niejednorodne oraz izotropowe i anizotropowe:

- JEDNORODNOŚĆ – materiał jednorodny to taki, w którym **własności mechaniczne materiału są takie same w każdym punkcie** (np. metale, stopy, ceramika, polimery).

- NIEJEDNORODNOŚĆ – w materiałach niejednorodnych **własności mechaniczne materiału zależą od wyboru cząstki** (zmieniają się w obrębie konfiguracji ciała). Są to wszelkie materiały kompozytowe (np. beton) lub takie, które posiadają wewnętrzną mikrostrukturę (np. drewno).

    - Nawet materiały niejednorodne (np. drewno, beton, kompozyty), ale takie, w których wielkości cząstek różnych faz są istotnie mniejsze od wymiarów całego ciała, mogą być opisywane modelem jednorodnym.

- IZOTROPIA – w materiałach izotropowych **własności mechaniczne materiału nie zależą od kierunku działania wymuszenia**, np.. sztywność lub wytrzymałość materiału jest taka sama, niezależnie od kierunku przyłożenia obciążenia (np. metale, stopy, beton, ceramika, polimery).

- ANIZOTROPIA – w materiałach anizotropowych **odpowiedź materiału na zadana wymuszenie zależy od kierunku jego działania**. Odpowiedź zależy od orientacji wymuszenia względem osi lub płaszczyzn symetrii wewnętrznej struktury materiału (np. kryształy, drewno, kompozyty)

TEORIA PIERWSZEGO GRADIENTU

Z zasady lokalności, możemy stwierdzić, że funkcja określająca stan naprężenia w cząstce $\mathbf{X}$, zależeć będzie od historii deformacji tylko cząstek sąsiednich, tj. $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X} + \mathrm{d}\,\mathbf{X}$

Położenie takiej sąsiedniej cząstki $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ możemy przybliżyć rozwijając związek deformacyjny w szereg Taylora. Dla czytelności zapisu pominiemy przy tym zależność każdego ze składników od czasu:

$$x_i(\mathbf{X}+\mathrm{d}\,\mathbf{X}) = x_i(\mathbf{X}) + \frac{1}{1\,!}\left.\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\right|_{\mathbf{X}} \mathrm{d}\,X_k + \frac{1}{2\,!}\left.\frac{\partial^2 x_i}{\partial X_k \partial X_l}\right|_{\mathbf{X}} \mathrm{d}\,X_k \,\mathrm{d}\,X_l + \frac{1}{3\,!}\frac{\partial^3 x_i}{\partial X_k \partial X_l \partial X_m} \mathrm{d}\,X_k \,\mathrm{d}\,X_l \,\mathrm{d}\,X_m + \ldots$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}+\mathrm{d}\,\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) + \frac{1}{1\,!}\nabla\mathbf{x}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X} + \frac{1}{2\,!}\nabla^2\mathbf{x}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X} + \frac{1}{3\,!}\nabla^3\mathbf{x}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X}\;\mathrm{d}\,\mathbf{X} + \ldots$$

Współczynniki w drugim składniku tego rozwinięcia to **składowe** materialnego gradientu deformacji $\nabla\mathbf{x}=\mathbf{F}$. Kolejne składniki to gradienty wyższych rzędów (np. drugi gradient deformacji, to gradient gradientu deformacji – tensor 3 rzędu). Lokalny związek konstytutywny możemy napisać w ogólnej postaci:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{X};t) &= f\left(\mathbf{X}\;;\;\mathbf{x}(\mathbf{X}+\mathrm{d}\,\mathbf{X};t-\tau)\right)\\ &= f\left(\mathbf{X}\;;\;\mathbf{x}(\mathbf{X};t-\tau)\;;\;\nabla\mathbf{x}(\mathbf{X};t-\tau)\;;\;\nabla^2\mathbf{x}(\mathbf{X};t-\tau);\ldots\right)\end{aligned}$$

TEORIA PIERWSZEGO GRADIENTU

Mamy zatem:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X};t) = f(t-\tau, \mathbf{X} \; ; \; \mathbf{x} \; ; \; \nabla \mathbf{x} \; ; \; \nabla^2 \mathbf{x} ; \ldots)$$

Z **zasady obiektywności materialnej** wynika, że **funkcja** f **nie może zależeć** od $\mathbf{x}$**.** Gdyby tak było, to przy tej samej deformacji (określonej przez kolejne gradienty) ale w różnych położeniach bryły stan naprężenia mógłby być inny, tj. stan naprężenia zależałby od wyboru układu odniesienia, od położenia bryły w przestrzeni lub od przesunięcia równoległego (translacji) bez deformacji – to przeczy intuicji i wynikom doświadczalnym. Przyjmujemy zatem:

$$\mathbf{T}(\mathbf{X};t) = f(t-\tau, \mathbf{X} \; ; \; \nabla \mathbf{x} \; ; \; \nabla^2 \mathbf{x} ; \ldots)$$

Szeroką klasę materiałów sprężystych można opisać **funkcjami zależnymi wyłącznie położenia** $\mathbf{X}$, **czasu oraz pierwszego gradientu deformacji**:

$$\boxed{\mathbf{T}(\mathbf{X};t) = f(t-\tau, \mathbf{X}, \mathbf{F}(\mathbf{X}))}$$

Teorie wykorzystujące takie modele konstytutywne nazywamy teoriami pierwszego gradientu.

TEORIA PIERWSZEGO GRADIENTU

Z rozkładu biegunowego gradientu deformacji możemy wyznaczyć **tensor rozciągnięcia**: $\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{V}\,\mathbf{R}$

Gradient deformacji pozwala nam wyznaczyć **tensor deformacji**: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$

Tensor deformacji pozwala nam wyznaczyć **tensor odkształcenia**: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \mathbf{1}\right)$

- Funkcja f mogłaby zależeć od jednej z tych alternatywnych miar deformacji.
- Podobnie, możemy wybrać różne miary naprężenia.

MIĘDZY JAKIMI MIARAMI NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA NALEŻY SFORMUŁOWAĆ ZWIĄZEK KONSTYTUTYWNY?

TEORIA PIERWSZEGO GRADIENTU

Istnieje pewna przesłanka dotycząca najwłaściwszego wyboru takiej pary tensorów. Okazuje się bowiem, że **określone pary tensorowych miar naprężenia i odkształcenia** mają tę własność, że ich **iloczyn skalarny jest równy gęstości mocy odkształcenia sprężystego**. - pary takie nazywamy energetycznie sprzężonymi. Są nimi np.:

tensor naprężenia Cauchy'ego

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

symetryczna część przestrzennego gradientu przemieszczenia

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{h}+\mathbf{h}^{\mathrm{T}}\right]$$

tensor naprężenia Pioli – Kirchhoffa 1 rodzaju

$$\mathbf{T}_R = J\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$$

materialny gradient deformacji

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial\,\mathbf{X}}$$

tensor naprężenia Pioli – Kirchhoffa 2 rodzaju

$$\mathbf{T}_S = J\,\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$$

materialny tensor odkształcenia

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{1}\right)$$

TEORIA PIERWSZEGO GRADIENTU

Zajmiemy się związkiem pomiędzy **tensorem naprężeń materialnych** a **tensorem odkształcenia**

- właściwe dla opisu materialnego
- obydwa są symetryczne

$$\boxed{\mathbf{T}_S(t,\mathbf{X}) = f\big(t-\tau,\mathbf{X},\mathbf{E}(\mathbf{X},t)\big)}$$

UWAGA:

- Jeśli materiał jest jednorodny, to związek konstytutywny **nie zależy w sposób jawny od wyboru cząstki**:

$$\mathbf{T}_S(t,\mathbf{X}) = f\big(t-\tau,\mathbf{E}(\mathbf{X},t)\big)$$

Zależność stanu naprężenia od wyboru cząstki wynika ze zmienności stanu odkształcenia

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Materiał nazywamy sprężystym (**w sensie Cauchy'ego**), gdy:

- aktualny stan naprężenia zależy jedynie od aktualnego stanu odkształcenia, a **nie zależy od historii odkształcenia**:

$$\mathbf{T}_S(t,\mathbf{X}) = f\left(\mathbf{X},\mathbf{E}(\mathbf{X},t)\right)$$

- **związek konstytutywny** jest odwracalny:

$$\exists\, f^{-1}: \qquad \mathbf{E}(t,\mathbf{X}) = f^{-1}\left(\mathbf{X},\mathbf{T}_S(\mathbf{X},t)\right)$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Materiał sprężysty (w sensie Cauchy'ego) nazywamy hipersprężystym (**sprężystym w sensie Greena**), gdy :

- **istnieje funkcja skalarna** W **argumentu tensorowego,** nazywana potencjałem sprężystym, taka że:

$$\mathbf{T}_s=\frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_{ij}=\frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \qquad i,j=1,2,3$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Rozważmy pewien materiał hipersprężysty. Jeśli rozpatrywany **zakres odkształceń jest mały** (tensor odkształcenia jest bliski tensorowi zerowemu $\mathbf{E} \approx \mathbf{0}$), to **potencjał sprężysty** można **rozwinąć w szereg Taylora** w otoczeniu $\mathbf{0}$:

$$W(\mathbf{E}) \approx W(\mathbf{0}) + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \right|_{\mathbf{0}} E_{ij} + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} E_{kl}} \right|_{\mathbf{0}} E_{ij} E_{kl} + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 W}{\partial E_{ij} E_{kl} E_{mn}} \right|_{\mathbf{0}} E_{ij} E_{kl} E_{mn} + \ldots$$

Stan naprężenia wyznaczamy jako pochodną potencjału względem stanu odkształcenia:

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \approx \left. \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \right|_{\mathbf{0}} + \left. \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} E_{kl}} \right|_{\mathbf{0}} E_{kl} + \ldots$$

Niezerowa wartość pierwszego składnika tego rozwinięcia sugerowałaby, że nawet w ciele nieodkształconym ($E_{kl}=0$) istnieje zawsze jakieś niezerowe naprężenie. To przeczy doświadczeniu, zatem przyjmiemy, że składnik ten jest zerowy. Jeśli z kolei odrzucimy wszystkie składniki 2 stopnia i wyższego, to związek konstytutywny przyjmie postać

$$\boxed{S_{ij} \approx \mathsf{S}_{ijkl} E_{kl} \quad \text{gdzie} \quad \mathsf{S}_{ijkl} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}}}$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Materiał hipersprężysty (**sprężystym w sensie Greena**) nazywamy materiałem Hooke'a lub materiałem liniowo-sprężystym, gdy

- **potencjał sprężysty jest jednorodną kwadratową funkcją stanu odkształcenia**, tj. jest on kombinacją kwadratów składowych tensora odkształcenia lub iloczynów dwóch pierwszych potęg różnych składowych tensora odkształcenia

$$W = \frac{1}{2}\mathsf{S}_{ijkl}E_{ij}E_{kl} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathsf{S}_{1111}E_{11}E_{11} + \mathsf{S}_{1112}E_{11}E_{12} + \mathsf{S}_{1113}E_{11}E_{13} + \mathsf{S}_{1121}E_{11}E_{21} + \ldots + \mathsf{S}_{3333}E_{33}E_{33}\right]$$

$$\mathbf{T}_S = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}\mathbf{E} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = \mathsf{S}_{ijkl}E_{kl}$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Związek konstytutywny dla materiałów liniowo-sprężystym nazywamy uogólnionym prawem Hooke'a i można zapisać go następująco:

$$
\begin{aligned}
S_{11} = \mathsf{S}_{1111} E_{11} &+ \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1112}+\mathsf{S}_{1211}) E_{12} + \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1113}+\mathsf{S}_{1211}) E_{13} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1121}+\mathsf{S}_{2111}) E_{21} + \mathsf{S}_{1122} E_{22} + \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1123}+\mathsf{S}_{2311}) E_{23} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1131}+\mathsf{S}_{3111}) E_{31} + \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1132}+\mathsf{S}_{3211}) E_{32} + \mathsf{S}_{1133} E_{33}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{12} = \mathsf{S}_{1112} E_{11} &+ \mathsf{S}_{1212} E_{12} + \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1213}+\mathsf{S}_{1312}) E_{13} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1221}+\mathsf{S}_{2112}) E_{21} + \mathsf{S}_{1222} E_{22} + \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1223}+\mathsf{S}_{2312}) E_{23} + \\
&+ \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1231}+\mathsf{S}_{3112}) E_{31} + \tfrac{1}{2}(\mathsf{S}_{1232}+\mathsf{S}_{3212}) E_{32} + \mathsf{S}_{1233} E_{33}
\end{aligned}
$$

$$\dots$$

Każda **składowa tensora naprężenia** obliczana jest jako **kombinacja liniowa** wszystkich **składowych tensora odkształcenia** – współczynnikami tej kombinacji są stałe materiałowe.

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

- Macierz S_{ijkl} jest macierzą odwzorowania liniowego między dwoma tensorami, jest więc reprezentacją **tensora 4 rzędu**. Tensor S nazywamy **tensorem sztywności.**

- Aby tensor sztywności był **odwracalny,** jego wyznacznik musi być różny od 0.

- **Odwrotność tensora sztywności** nazywamy **tensorem podatności** i oznaczamy przez **C:**

$$\mathbf{T}_S = \mathsf{S} \cdot \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad S_{ij} = \mathsf{S}_{ijkl} E_{kl}$$

$$\mathbf{E} = \mathsf{C} \cdot \mathbf{T}_S \quad \Leftrightarrow \quad E_{ij} = \mathsf{C}_{ijkl} S_{kl}$$

- Tensory sztywności i podatności nazywamy **tensorami sprężystości** lub **tensorami Hooke'a.** Są to tensory trójwymiarowe 4-go rzędu, mają zatem **3^4=81 składowych**, które nazywamy **stałymi materiałowymi**.

- Stałe materiałowe nie są do końca stałe...
  - W materiałach niejednorodnych każda składowa tensorów sprężystości (stała materiałowa) jest w ogólności funkcją cząstki, tj. $\mathsf{S}_{ijkl} = \mathsf{S}_{ijkl}(\mathbf{X})$
  - Nawet w materiałach jednorodnych zmiana układu współrzędnych powoduje zmianę składowych tensora. Stałe materiałowe nie są w takim razie „stałe”, w sensie: nie są niezmiennicze.

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

- Nie wszystkie składowe tensorów sprężystości są niezależne:

$$S_{ij} = \mathsf{S}_{ijkl} E_{kl}$$

  - z **symetrii tensora naprężenia**: $S_{ij} = S_{ji} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{S}_{ijkl} = \mathsf{S}_{jikl}$
  - z **symetrii tensora odkształcenia**: $E_{kl} = E_{lk} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{S}_{ijkl} = \mathsf{S}_{ijlk}$
  - z definicji składowych tensora naprężenia jako **pochodnych potencjału sprężystego** oraz z **przemienności kolejności różniczkowania**

$$\mathsf{S}_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \frac{\partial W}{\partial E_{kl}}\bigg|_{\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial E_{kl}} \frac{\partial W}{\partial E_{ij}}\bigg|_{\mathbf{0}} = \mathsf{S}_{klij}$$

- Tensory sprężystości charakteryzują się zatem następującymi symetriami wewnętrznymi:

$$\boxed{\begin{gathered} \mathsf{S}_{ijkl} = \mathsf{S}_{jikl} = \mathsf{S}_{ijlk} = \mathsf{S}_{klij} \\ \mathsf{C}_{ijkl} = \mathsf{C}_{jikl} = \mathsf{C}_{ijlk} = \mathsf{C}_{klij} \end{gathered}}$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

- Ostatecznie **tensory sprężystości** dla całkowicie **anizotropowego** materiału mają **21 niezależnych składowych.**

- Wśród tych **21 parametrów opisujących materiał** wyróżniamy:

  - 6 niezmienników o wymiarze fizycznym naprężenia – **wartości własne tensora sztywności**, nazywane modułami Kelvina. Są one współczynnikami proporcjonalności między stanami naprężenia i odkształcenia będącymi wektorami własnymi tensorów sprężystości. **Wartości własne tensora podatności** to **odwrotności modułów Kelvina**.

  - 12 bezwymiarowych niezmienników, nazywanych dystrybutorami sztywności, które **określają postać wektorów własnych** tensorów sprężystości, tj. **postać stanu naprężenia** (odkształcenia) **będącego odpowiedzią na zadany stan odkształcenia** (naprężenia).

  - 3 bezwymiarowe parametry, które w sposób jednoznaczny orientują **wewnętrzną strukturę materiału względem przyjętego układu odniesienia** (np. kąty Eulera, składowe 3 wzajemnie prostopadłych wersorów).

- Zatem tylko 18 parametrów charakteryzuje materiał sam w sobie, bez odniesienia do jego orientacji w przestrzeni.

- Jeśli struktura materiału ma płaszczyzny lub osie symetrii (symetrie zewnętrzne), to liczba niezależnych składowych spada.

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Uwzględniając symetrie wewnętrzne, uogólnione prawo Hooke'a i można zapisać w następującej postaci:

$$S_{11} = \mathsf{S}_{1111}E_{11} + \mathsf{S}_{1122}E_{22} + \mathsf{S}_{1133}E_{33} + 2\mathsf{S}_{1123}E_{23} + 2\mathsf{S}_{1131}E_{31} + 2\mathsf{S}_{1112}E_{12}$$

$$S_{22} = \mathsf{S}_{2211}E_{11} + \mathsf{S}_{2222}E_{22} + \mathsf{S}_{2233}E_{33} + 2\mathsf{S}_{2223}E_{23} + 2\mathsf{S}_{2231}E_{31} + 2\mathsf{S}_{2212}E_{12}$$

$$S_{33} = \mathsf{S}_{3311}E_{11} + \mathsf{S}_{3322}E_{22} + \mathsf{S}_{3333}E_{33} + 2\mathsf{S}_{3323}E_{23} + 2\mathsf{S}_{3331}E_{31} + 2\mathsf{S}_{3312}E_{12}$$

$$S_{23} = \mathsf{S}_{2311}E_{11} + \mathsf{S}_{2322}E_{22} + \mathsf{S}_{2333}E_{33} + 2\mathsf{S}_{2323}E_{23} + 2\mathsf{S}_{2331}E_{31} + 2\mathsf{S}_{2312}E_{12}$$

$$S_{31} = \mathsf{S}_{3111}E_{11} + \mathsf{S}_{3122}E_{22} + \mathsf{S}_{3133}E_{33} + 2\mathsf{S}_{3123}E_{23} + 2\mathsf{S}_{3131}E_{31} + 2\mathsf{S}_{3112}E_{12}$$

$$S_{12} = \mathsf{S}_{1211}E_{11} + \mathsf{S}_{1222}E_{22} + \mathsf{S}_{1233}E_{33} + 2\mathsf{S}_{1223}E_{23} + 2\mathsf{S}_{1231}E_{31} + 2\mathsf{S}_{1212}E_{12}$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Uogólnione prawo Hooke'a i można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{31} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{S}_{1111} & \mathsf{S}_{1122} & \mathsf{S}_{1133} & \mathsf{S}_{1123} & \mathsf{S}_{1131} & \mathsf{S}_{1112} \\ & \mathsf{S}_{2222} & \mathsf{S}_{2233} & \mathsf{S}_{2223} & \mathsf{S}_{2231} & \mathsf{S}_{2212} \\ & & \mathsf{S}_{3333} & \mathsf{S}_{3323} & \mathsf{S}_{3331} & \mathsf{S}_{3312} \\ & & & \mathsf{S}_{2323} & \mathsf{S}_{2331} & \mathsf{S}_{2312} \\ & \text{sym} & & & \mathsf{S}_{3131} & \mathsf{S}_{3112} \\ & & & & & \mathsf{S}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \\ 2E_{12} \end{bmatrix}$$

MATERIAŁY SPRĘŻYSTE

Obecnie za właściwszą uznaje się tzw. notację Mandela:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{31} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{S}_{1111} & \mathsf{S}_{1122} & \mathsf{S}_{1133} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{1123} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{1131} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{1112} \\ & \mathsf{S}_{2222} & \mathsf{S}_{2233} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{2223} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{2231} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{2212} \\ & & \mathsf{S}_{3333} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{3323} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{3331} & \sqrt{2}\mathsf{S}_{3312} \\ & & & 2\mathsf{S}_{2323} & 2\mathsf{S}_{2331} & 2\mathsf{S}_{2312} \\ & \mathrm{sym} & & & 2\mathsf{S}_{3131} & 2\mathsf{S}_{3112} \\ & & & & & 2\mathsf{S}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{31} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{31} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{C}_{1111} & \mathsf{C}_{1122} & \mathsf{C}_{1133} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{1123} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{1131} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{1112} \\ & \mathsf{C}_{2222} & \mathsf{C}_{2233} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{2223} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{2231} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{2212} \\ & & \mathsf{C}_{3333} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{3323} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{3331} & \sqrt{2}\mathsf{C}_{3312} \\ & & & 2\mathsf{C}_{2323} & 2\mathsf{C}_{2331} & 2\mathsf{C}_{2312} \\ & \mathrm{sym} & & & 2\mathsf{C}_{3131} & 2\mathsf{C}_{3112} \\ & & & & & 2\mathsf{C}_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{31} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix}$$

Notacja taka jest symetryczna a po odpowiednim zdefiniowaniu operatora obrotu, normy tensorów i obroty tensorów realizuje się w ramach rachunku macierzowego w identyczny sposób jak długości wektorów i obroty wektorów w przestrzeni trójwymiarowej.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ