TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

ANIZOTROPOWE
MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

Materiał, którego odpowiedź na zadane wymuszenie zależy od kierunku tego wymuszenia (a ściślej: od orientacji kierunku wymuszenia względem kierunków charakterystycznych wewnętrznej struktury materiału) nazywamy materiałem anizotropowym.

Dla **materiałów liniowo sprężystych** wyróżnia się **8 klas symetrii sprężystych**, które do pewnego stopnia odpowiadają **układom krystalograficznym:**

- pełna anizotropia ← układ trójskośny
- symetria monokliniczna ← układ jednoskośny
- ortotropia ← układ rombowy
- symetria trygonalna ← układ trygonalny
- symetria tetragonalna ← układ tetragonalny
- symetria cylindryczna ← układ heksagonalny
- symetria kubiczna ← układ regularny
- izotropia ← [ciała bezpostaciowe]

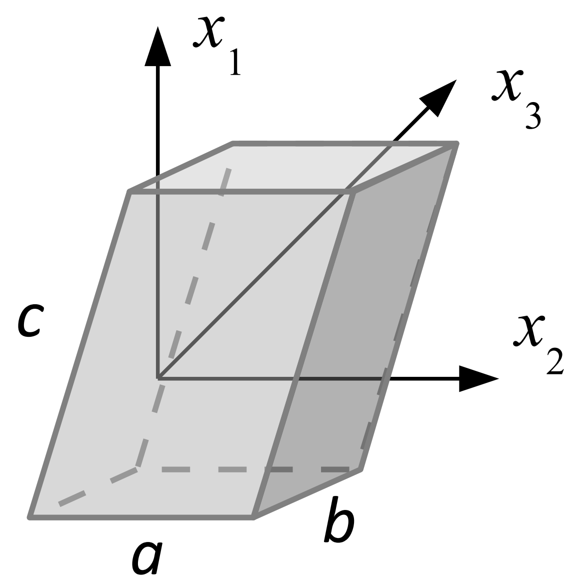
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

SYMETRIA TRÓJSKOŚNA (PEŁNA ANIZOTROPIA)

Elementy symetrii: -brak

Liczba niezależnych składowych: 21

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & \sqrt{2}S_{1123} & \sqrt{2}S_{1131} & \sqrt{2}S_{1112} \\ & S_{2222} & S_{2233} & \sqrt{2}S_{2223} & \sqrt{2}S_{2231} & \sqrt{2}S_{2212} \\ & & S_{3333} & \sqrt{2}S_{3323} & \sqrt{2}S_{3331} & \sqrt{2}S_{3312} \\ & & & 2S_{2323} & 2S_{2331} & 2S_{2312} \\ & \text{sym} & & & 2S_{3131} & 2S_{3112} \\ & & & & & 2S_{1212} \end{bmatrix}$$



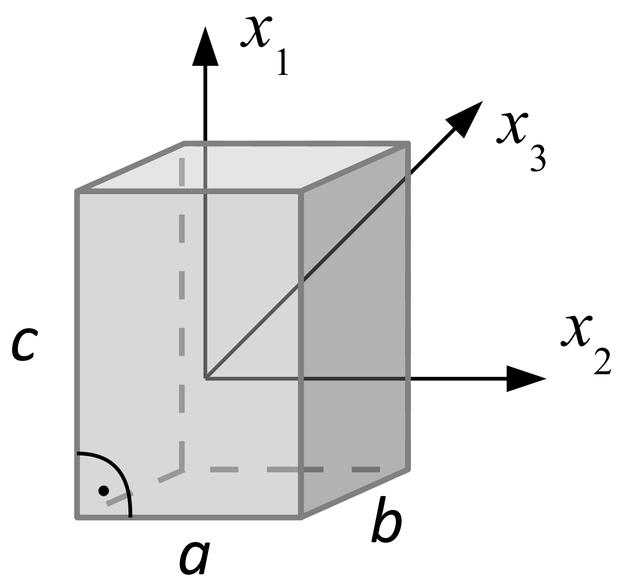
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

SYMETRIA JEDNOSKOŚNA

Elementy symetrii: -lustrzane odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do osi x_1

Liczba niezależnych składowych: 13

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & \sqrt{2}S_{1123} & 0 & 0 \\ & S_{2222} & S_{2233} & \sqrt{2}S_{2223} & 0 & 0 \\ & & S_{3333} & \sqrt{2}S_{3323} & 0 & 0 \\ & & & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2S_{3131} & 2S_{3112} \\ & & & & & 2S_{1212} \end{bmatrix}$$



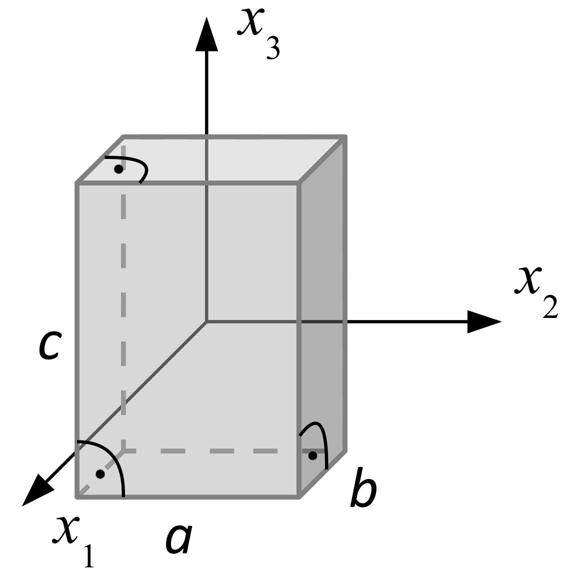
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

ORTOTROPIA

Elementy symetrii:
- lustrzane odbicie względem płaszczyzn prostopadłych do osi x_1 , x_2 , x_3
- obrót o 180° wokół osi x_1 , x_2 , x_3

Liczba niezależnych składowych: 9

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix} \mathsf{S}_{1111} & \mathsf{S}_{1122} & \mathsf{S}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & \mathsf{S}_{2222} & \mathsf{S}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathsf{S}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mathsf{S}_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2\mathsf{S}_{3131} & 0 \\ & & & & & 2\mathsf{S}_{1212} \end{bmatrix}$$



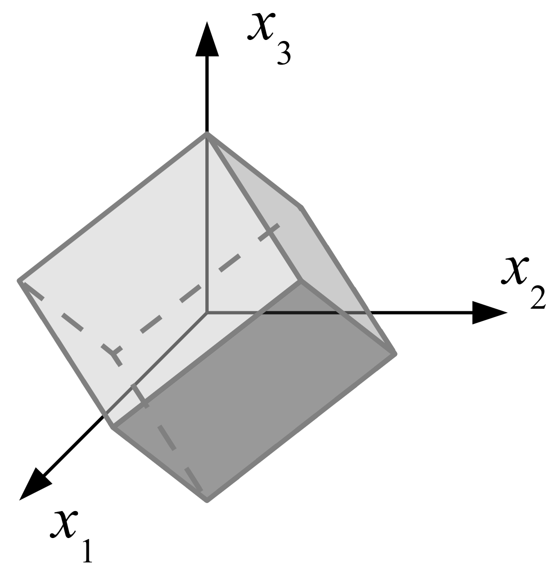
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

SYMETRIA TRYGONALNA

Elementy symetrii:
- lustrzane odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do osi x_1
- obrót o 120° wokół osi x_3

Liczba niezależnych składowych: 6

$$\mathsf{S} = \begin{bmatrix} \mathsf{S}_{1111} & \mathsf{S}_{1122} & \mathsf{S}_{1133} & \sqrt{2}\,\mathsf{S}_{1123} & 0 & 0 \\ & \mathsf{S}_{1111} & \mathsf{S}_{1133} & -\sqrt{2}\,\mathsf{S}_{1123} & 0 & 0 \\ & & \mathsf{S}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\,\mathsf{S}_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2\,\mathsf{S}_{2323} & 2\,\mathsf{S}_{1123} \\ & & & & & \mathsf{S}_{1111}-\mathsf{S}_{1122} \end{bmatrix}$$



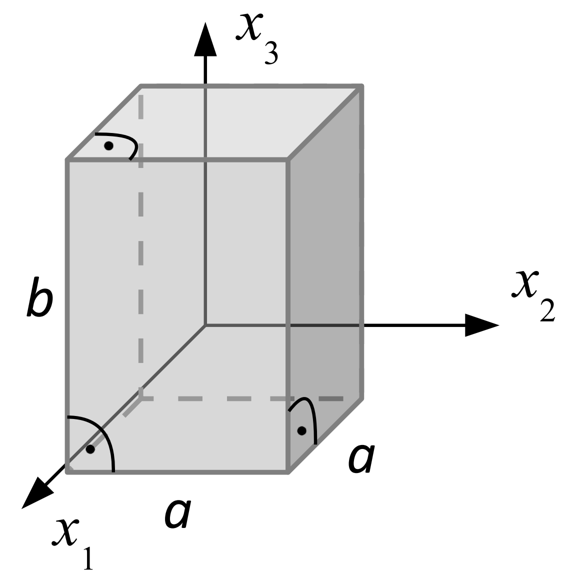
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

SYMETRIA TETRAGONALNA

Elementy symetrii:
- lustrzane odbicie względem płaszczyzn prostopadłych do osi x_1 , x_2 , x_3
- obrót o 180° wokół osi x_1 , x_2
- obrót o 90° wokół osi x_3

Liczba niezależnych składowych: 6

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{1111} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2S_{2323} & 0 \\ & & & & & 2S_{1212} \end{bmatrix}$$



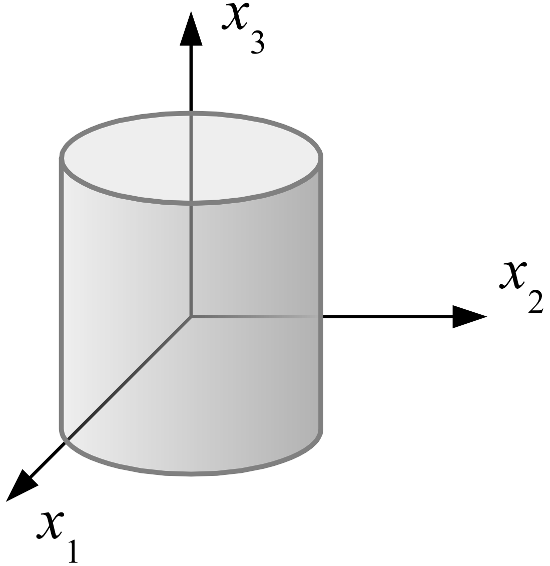
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

SYMETRIA CYLINDRYCZNA

Elementy symetrii:
- lustrzane odbicie względem płaszczyzn prostopadłych do osi x_1 , x_2 , x_3
- obrót o 180° wokół osi x_1 , x_2
- obrót o dowolny kąt wokół osi x_3

Liczba niezależnych składowych: 5

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{1111} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2S_{2323} & 0 \\ & & & & & S_{1111}-S_{1122} \end{bmatrix}$$



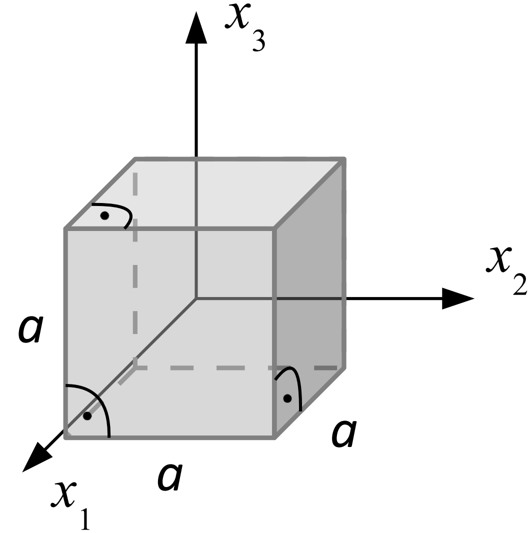
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

SYMETRIA KUBICZNA

Elementy symetrii:
- lustrzane odbicie względem płaszczyzn prostopadłych do osi x_1 , x_2 , x_3
- obrót o 90° wokół osi x_1 , x_2 , x_3

Liczba niezależnych składowych: 3

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{1111} & S_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2S_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & 2S_{2323} & 0 \\ & & & & & 2S_{2323} \end{bmatrix}$$



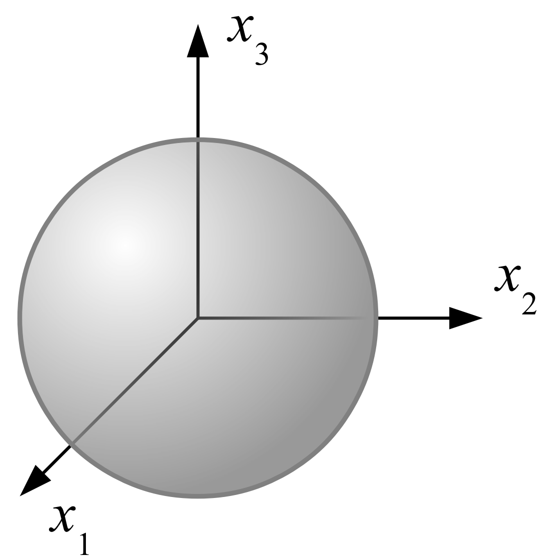
ANIZOTROPOWE MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

IZOTROPIA

Elementy symetrii: - dowolne obroty i dowolne odbicia lustrzane

Liczba niezależnych składowych: 2

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{1111} & S_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{1111}-S_{1122} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & S_{1111}-S_{1122} & 0 \\ & & & & & S_{1111}-S_{1122} \end{bmatrix}$$



IZOTROPOWE
MATERIAŁY LINIOWO SPRĘŻYSTE

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Materiał, którego odpowiedź na zadane wymuszenie nie zależy od kierunku tego wymuszenia jest nazywany izotropowym.

Związek konstytutywny też musi być **izotropowy** – **funkcje izotropowe** zmiennej tensorowej można wyrazić jako **funkcje niezmienników swojego argumentu**. W szczególności funkcją taką musi być **potencjał sprężysty**:

$$\boxed{W(\mathbf{E}) = W\left(I_1(\mathbf{E}); I_2(\mathbf{E}); I_3(\mathbf{E})\right)}$$

gdzie:

- pierwszy niezmiennik
$$I_1(\mathbf{E}) = \mathrm{tr}(\mathbf{E}) = \mathbf{1}\cdot\mathbf{E} = \\ = E_{11}+E_{22}+E_{33}$$

- drugi niezmiennik
$$I_2(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{tr}(\mathbf{E})\right)^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{E}^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{1}\cdot\mathbf{E})^2 - \mathbf{1}\cdot(\mathbf{E}^2)\right] = \\ = (E_{22}E_{33}-E_{23}^2)+(E_{33}E_{11}-E_{31}^2)+(E_{11}E_{22}-E_{12}^2)$$

- trzeci niezmiennik
$$I_3(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{E}) = \\ = E_{11}E_{22}E_{33} + 2E_{23}E_{31}E_{12} - E_{11}E_{23}^2 - E_{22}E_{31}^2 - E_{33}E_{12}^2$$

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Potencjał sprężysty w materiale liniowo sprężystym (materiale Hooke'a) ma być jednorodną funkcją kwadratową składowych stanu odkształcenia:

- **Pierwszy niezmiennik** jest funkcją **1 stopnia** z uwagi na składowe $\mathbf{E}$. **Musi występować w 2 potędze.**
- **Drugi niezmiennik** jest funkcją **2 stopnia** z uwagi na składowe $\mathbf{E}$. **Musi występować w 1 potędze.**
- **Trzeci niezmiennik** jest funkcją **3 stopnia** z uwagi na składowe $\mathbf{E}$. **Nie może być obecny w potencjale.**

$$\boxed{W(\mathbf{E}) = W(I_1; I_2) = \alpha (I_1)^2 + \beta I_2}$$

Związek konstytutywny przyjmuje postać:

$$\mathbf{T}_S = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\boxed{\mathbf{T}_S = \alpha (2 I_1 \mathbf{1}) + \beta (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{E})}$$

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Związek konstytutywny dla izotropowego materiału Hooke'a:

$$\mathbf{T}_S = (2\alpha+\beta) I_1 \mathbf{1} - \beta \mathbf{E}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

- $\lambda = (2\alpha+\beta)$ - pierwszy parametr Lamégo
- $\mu = -\frac{1}{2}\beta$ - drugi parametr Lamégo

$$\mathbf{T}_S = 2\mu \mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad S_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ \text{sym} & & S_{33} \end{bmatrix} = 2\mu \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ & E_{22} & E_{23} \\ \text{sym} & & E_{33} \end{bmatrix} + \lambda (E_{11}+E_{22}+E_{33}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix}$$

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Związek konstytutywny dla izotropowego materiału Hooke'a:

$$\mathbf{T}_S = 2\mu\,\mathbf{E} + \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{E})\,\mathbf{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_{ij} = 2\mu\,E_{ij} + \lambda\,E_{kk}\,\delta_{ij}$$

Po rozpisaniu:

$$\begin{cases} S_{11} = (2\mu+\lambda)E_{11} + \lambda(E_{22}+E_{33}) \\ S_{22} = (2\mu+\lambda)E_{22} + \lambda(E_{33}+E_{11}) \\ S_{33} = (2\mu+\lambda)E_{33} + \lambda(E_{11}+E_{22}) \\ S_{23} = 2\mu\,E_{23} \\ S_{31} = 2\mu\,E_{31} \\ S_{12} = 2\mu\,E_{12} \end{cases}$$

Związki powyższe nazywa się niekiedy 1 postacią uogólnionego prawa Hooke'a.

Powyższe związki można uważać za układ równań liniowych z uwagi na składowe stanu odkształcenia (niewiadome w układzie). Taki układ można rozwiązać.

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Związek konstytutywny dla izotropowego materiału Hooke'a:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\mathbf{T}_S - \nu\,\mathrm{tr}(\mathbf{T}_S)\mathbf{1}\right] \quad \Leftrightarrow \quad E_{ij} = \left[(1+\nu)S_{ij} - \nu S_{kk}\delta_{ij}\right]$$

Po rozpisaniu:

$$\begin{cases} E_{11} = \frac{1}{E}\left[S_{11} - \nu(S_{22}+S_{33})\right] \\ E_{22} = \frac{1}{E}\left[S_{22} - \nu(S_{33}+S_{11})\right] \\ E_{33} = \frac{1}{E}\left[S_{33} - \nu(S_{11}+S_{22})\right] \\ E_{23} = \frac{1}{2G}S_{23} \\ E_{31} = \frac{1}{2G}S_{31} \\ E_{12} = \frac{1}{2G}S_{12} \end{cases}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$ – moduł Younga (moduł sztywności podłużnej)

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$ – współczynnik Poissona (wsp. rozszerzalności poprzecznej)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu$$ – moduł Kirchhoffa (moduł sztywności poprzecznej)

Związki powyższe nazywa się niekiedy 2 postacią uogólnionego prawa Hooke'a.

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Każdy **tensor 2 rzędu można rozłożyć na sumę tensora izotropowego** (kulistego, aksjatora) oraz **dewiatora** (tensora bezśladowego). W szczególności:

- aksjator tensora naprężenia: $$\mathbf{A}_T = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{T}_S)\mathbf{1} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ & p & 0 \\ \mathrm{sym} & & p \end{bmatrix} \qquad \underbrace{p = \frac{1}{3}(S_{11}+S_{22}+S_{33})}_{\text{naprężenie hydrostatyczne}}$$

- dewiator tensora naprężenia: $$\mathbf{D}_T = \mathbf{T}_S - \mathbf{A}_T$$

- aksjator tensora odkształcenia: $$\mathbf{A}_E = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 \\ & \theta & 0 \\ \mathrm{sym} & & \theta \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\theta = E_{11}+E_{22}+E_{33}}_{\text{dylatacja (względne odkształcenie objętościowe)}}$$

- dewiator tensora odkształcenia: $$\mathbf{D}_E = \mathbf{E} - \mathbf{A}_E$$

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Podstawiamy do **1 postaci prawa Hooke'a:**

$$\mathbf{A}_T + \mathbf{D}_T = 2\mu(\mathbf{A}_E + \mathbf{D}_E) + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{1}$$

$$\underbrace{\mathbf{A}_T}_{\text{aksjator}} + \underbrace{\mathbf{D}_T}_{\text{dewiator}} = \underbrace{(2\mu + 3\lambda)\mathbf{A}_E}_{\text{aksjator}} + \underbrace{2\mu\mathbf{D}_E}_{\text{dewiator}}$$

Dwa tensory są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne części kuliste i identyczne części dewiatorowe:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_T = 3K\,\mathbf{A}_E & \text{– prawo zmiany objętości} \\ \mathbf{D}_T = 2G\,\mathbf{D}_E & \text{– prawo zmiany postaci} \end{cases}$$

$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – moduł Helmholtza (moduł sztywności objętościowej)

$G = \mu$ – moduł Kirchhoffa (moduł sztywności poprzecznej)

Związek powyższy nazywa się niekiedy 3 postacią uogólnionego prawa Hooke'a.

Prawo zmiany objętości można też zapisać jako **równanie skalarne**: $p = K\theta$

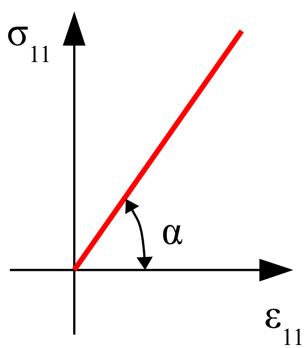
IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Materiał	Moduł Younga [GPa]	Współczynnik Poissona [-]	Moduł Kirchhoffa [GPa]
Żelazo	200	0,28	65
Miedź	120	0,36	45
Aluminium (glin)	70	0,33	26
Cyna	50	0,33	18
Cynk	108	0,33	43
Ołów	16	0,43	5,6
Stal konstrukcyjna	200	0,30	80
Żeliwo szare	120	0,21	50
Brąz	100	0,34	45
Mosiądz	100	0,33	40
Drewno świerkowe	12	-	-
Granit	75	0,25	28
Marmur	60	0,30	23
Beton	30	0,20	12,5
Polichlorek winylu (PCV)	1,5	0,42	0,6
Teflon (PTFE)	0,5	0,46	0,2
Polietylen (PE)	0,14	0,40	0,05
Polistyren (PS)	3,8	0,40	1
Guma	0,05	0,50	0,0005

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

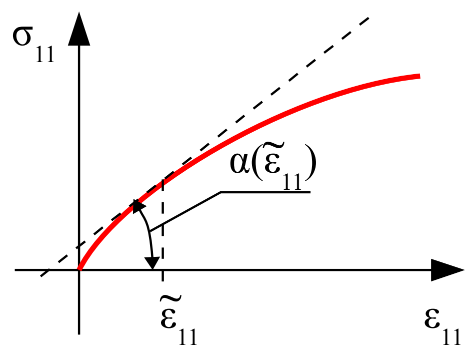
Jednoosiowy stan naprężenia (czyste rozciąganie)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\sigma}{E} \end{bmatrix}$$



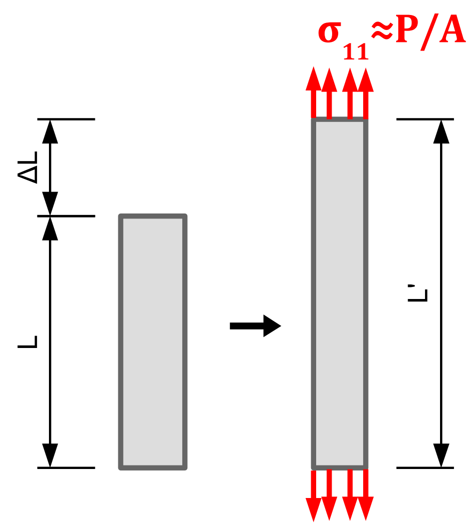
$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Moduł Younga
dla materiałów
liniowo-sprężystych



$$E(\tilde{\varepsilon}_{11}) = \left.\frac{d\,\sigma_{11}}{d\,\varepsilon_{11}}\right|_{\tilde{\varepsilon}_{11}} = \mathrm{tg}\,\alpha(\tilde{\varepsilon}_{11})$$

Styczny moduł Younga
dla materiałów
nieliniowych



$$\varepsilon_{11} \approx \frac{\Delta L}{L}$$

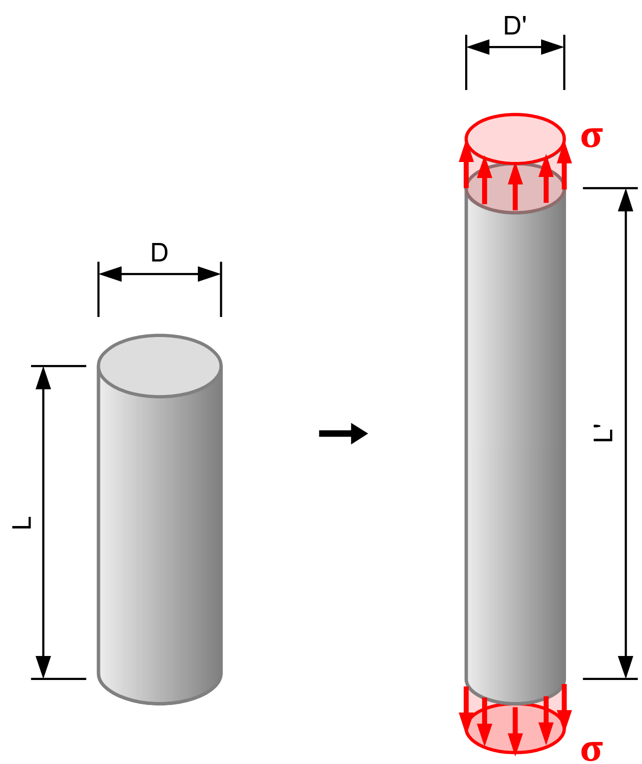
$\sigma_{11} \approx P/A$

$$\boxed{E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \approx \frac{P}{A}\cdot\frac{L}{\Delta L}}$$

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Jednoosiowy stan naprężenia (czyste rozciąganie)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\sigma}{E} \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon_{11} \approx \frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L}$$

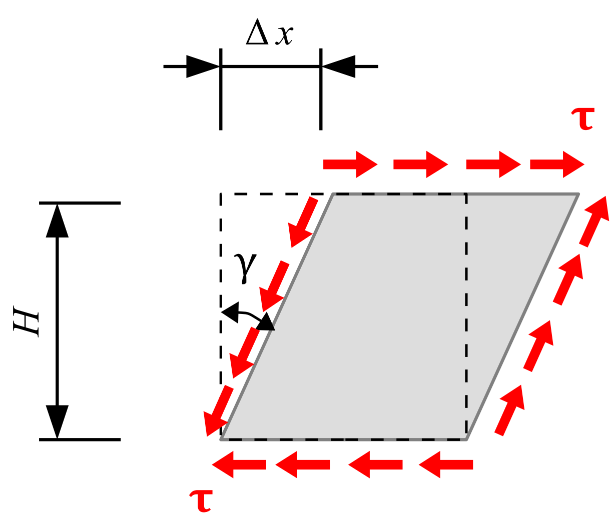
$$\varepsilon_{22} \approx \frac{\Delta D}{D} = \frac{D' - D}{D}$$

$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \approx -\frac{\Delta D}{D} \cdot \frac{L}{\Delta L}}$$

IZOTROPOWE MATERIAŁY HOOKE'A

Stan prostego ścinania

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau}{2G} & 0 \\ \frac{\tau}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\gamma = 2\varepsilon_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \approx \frac{\Delta x}{H}$$

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{H}$$

$$\tau = G\gamma \approx G \frac{\Delta x}{H}$$

dr inż. Paweł Szeptyński

LINIOWA TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI

LINEARYZACJA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Komplet równań nieliniowej teorii sprężystości w opisie materialnym dla **materiału hipersprężystego**:

- 3 równania ruchu: $\left[S_{ij}+S_{kj}u_{i,k}\right]_{,j}+B_i=\rho_R\ddot{u}_i$
- 6 związków konstytutywnych: $S_{ij}=\dfrac{\partial W}{\partial E_{ij}}$
- 6 związków geometrycznych: $E_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right)$

  lub (alternatywnie) 6 równań nierozdzielności: $\epsilon_{pqi}F_{jq,p}=0$

15 równań na 15 niewiadomych:

- 3 składowe wektora przemieszczenia: u_1, u_2, u_3
- 6 składowych tensora odkształcenia: $E_{11},\ E_{22},\ E_{33},\ E_{23},\ E_{31},\ E_{12}$
- 6 składowych tensora naprężenia: $S_{11},\ S_{22},\ S_{33},\ S_{23},\ S_{31},\ S_{12}$

LINEARYZACJA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Dla wielu zagadnień **liniowych** udowadnia się, że:

- **rozwiązanie zagadnienia istnieje**
- **rozwiązanie zagadnienia jest jednoznaczne**

Dla **złożonych zagadnień nieliniowych twierdzenia takie najczęściej nie istnieją**, tj.:

- rozwiązanie zagadnienia może nie istnieć
- rozwiązań może być kilka

Każde źródło nieliniowości w teorii sprawia nam trudność:

- Równania ruchu w opisie przestrzennym są liniowe.
- **Równania na składowe** tensora naprężenia **PK1** wynikające **zasady krętu** są **nieliniowe**.
- **Równania ruchu w opisie materialnym** z wykorzystaniem tensora naprężenia **PK2** są **nieliniowe**.
- **Związki geometryczne** dla **teorii dużych odkształceń** są **nieliniowe**
- **Związki konstytutywne** dla **dowolnego materiału hipersprężystego** mogą być **nieliniowe**.

LINEARYZACJA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

MAŁE ODKSZTAŁCENIA

$$u_{i,m} \ll 1$$

- Związki geometryczne są w przybliżeniu liniowe

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \varepsilon_{ij}$$

- Elementy zdeformowane niewiele różnią się od pierwotnych:

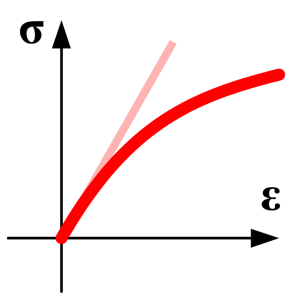
$$\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}} \approx \mathbf{T}_{\boldsymbol{R}} \approx \mathbf{T}_{\boldsymbol{S}}$$

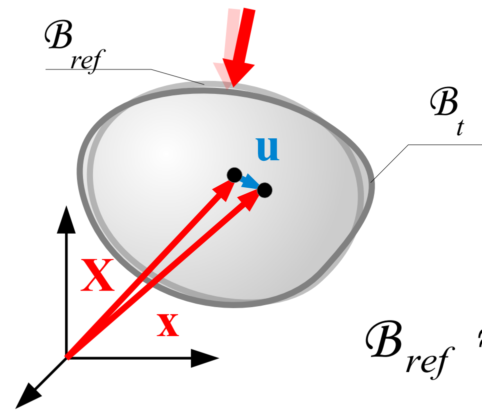
- W zakresie małych odkształceń każdy związek konstytutywny można przybliżyć związkiem liniowym

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \approx$$

$$\approx \underbrace{\frac{\partial^2 W}{\partial E_{ij}\,\partial E_{kl}}}_{S_{ijkl}} E_{kl}$$



MAŁE PRZEMIESZCZENIA



$$\mathcal{B}_{ref} \approx \mathcal{B}_t$$

- Konfiguracja aktualna jest bliska konfiguracji odniesienia.
- Różnica między współrzędnymi materialnymi i współrzędnymi przestrzennymi jest mała
- opis materialny ≈ opis przestrzenny
- liniowe równania ruchu

LINIOWA TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI

LINEARYZACJA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Komplet równań liniowej teorii sprężystości:

- równania ruchu: $\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i$
- związki konstytutywne: $\sigma_{ij} = \mathsf{S}_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- związki geometryczne: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$

  lub (alternatywnie) równania nierozdzielności: $\epsilon_{pri}\epsilon_{qsj}\varepsilon_{pq,rs} = 0$

15 równań na 15 niewiadomych:

- 3 składowe wektora przemieszczenia: u_1, u_2, u_3
- 6 składowych tensora odkształcenia: $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}$
- 6 składowych tensora naprężenia: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}$

LINEARYZACJA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

UWAGI:

- Tensor małych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ utożsamiamy z **materialnym tensorem odkształcenia** $\mathbf{E}$
- Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ utożsamiamy z **tensorem naprężeń rzeczywistych Cauchy'ego** $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\sigma}}$
- Można udowodnić:

TWIERDZENIE KIRCHHOFFA

***Jeśli warunki brzegowe zadane są na całej powierzchni zewnętrznej ciała i są w całości albo warunkami statycznymi** (zadane obciążenia)**, albo kinematycznymi** (zadane przemieszczenia)**, to rozwiązanie zagadnienia liniowej teorii sprężystości jest dane jednoznacznie**.*

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI DLA MATERIAŁÓW IZOTROPOWYCH

RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE LAMÉGO

Rozważmy **równania ruchu**: $\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i$

Wykorzystujemy **związki konstytutywne**: $\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$

Otrzymamy:

$$\left[2G\varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}\right]_{,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

$$2G\varepsilon_{ij,j} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

Wyraźmy odkształcenia przez przemieszczenia zgodnie ze **zw. geometrycznymi**: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$

$$2G \cdot \frac{1}{2}\left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right) + \lambda \delta_{ij} \frac{1}{2}\left(u_{k,kj} + u_{k,kj}\right) + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

$$G\left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right) + \lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

$$G\left(u_{i,jj} + u_{j,ij}\right) + \lambda u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

RÓWNANIA PRZEMIESZCZENIOWE LAMÉGO

Otrzymujemy:

$$G\,u_{i,jj}+(G+\lambda)u_{j,ji}+b_i=\rho\,\ddot{u}_i\,,\qquad i=1,2,3$$

Po rozpisaniu:

$$\begin{cases} G\nabla^2 u_1+(G+\lambda)(u_{1,11}+u_{2,21}+u_{3,31})+b_1=\rho\,\ddot{u}_1\\ G\nabla^2 u_2+(G+\lambda)(u_{1,12}+u_{2,22}+u_{3,32})+b_2=\rho\,\ddot{u}_2\\ G\nabla^2 u_3+(G+\lambda)(u_{1,13}+u_{2,23}+u_{3,33})+b_3=\rho\,\ddot{u}_3 \end{cases}$$

W zapisie absolutnym:

$$G\,\Delta\mathbf{u}+(G+\lambda)\left[\nabla(\mathbf{u}\cdot\nabla)\right]+\mathbf{b}=\rho\,\ddot{\mathbf{u}}$$

Równania powyższe noszą nazwę równań przemieszczeniowych Lamégo.

- To **układ** 3 **liniowych równań różniczkowych cząstkowych 2 rzędu**.
- **Warunki początkowe** i **kinematyczne warunki brzegowe** są warunkami na funkcje niewiadome
- **Statyczne warunki brzegowe** trzeba wyrazić przez **pochodne przemieszczeń**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ