TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS

METODY ANALITYCZNE

METODY NUMERYCZNE

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS

METODY ANALITYCZNE

METODY NUMERYCZNE

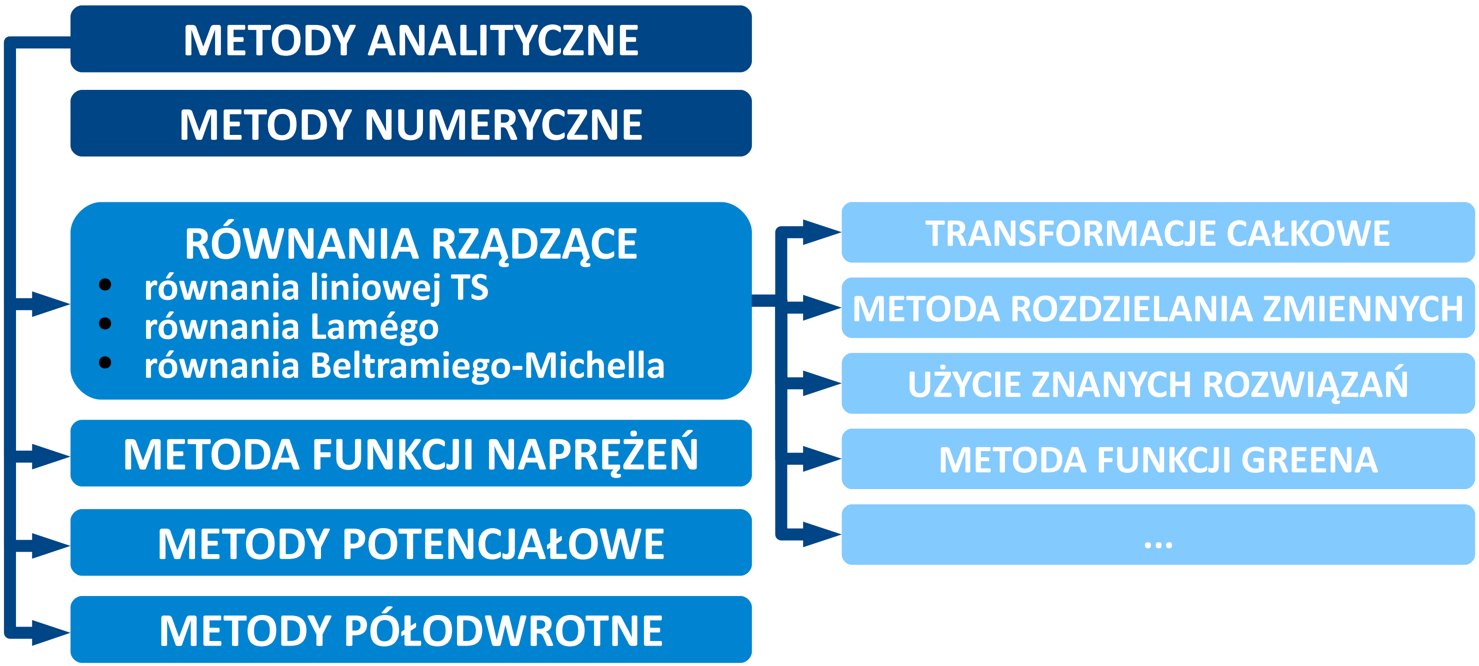
RÓWNANIA RZĄDZĄCE
- równania liniowej TS
- równania Lamégo
- równania Beltramiego-Michella

METODA FUNKCJI NAPRĘŻEŃ

METODY POTENCJAŁOWE

METODY PÓŁODWROTNE

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS



Rozwiązanie układu RRC 2 rzędu jest w ogólnym przypadku bardzo trudne. Dla pewnych zagadnień możliwe jest zastosowanie znanych skądinąd metod poszukiwania rozwiązania, np.:

- transformacje całkowe – zamiana równań **różniczkowych** na równania **algebraiczne** + **retransformacja**
- metoda rozdzielania zmiennych – zamiana równań **cząstkowych** na układ równań **zwyczajnych**
- przekształcenie równań tak, by miały **postać równań, dla których rozwiązanie** jest skądinąd **znane**.
- Jeśli znamy funkcję Greena zagadnienia, to **rozwiązania zagadnień powiązanych są jej całkami**.

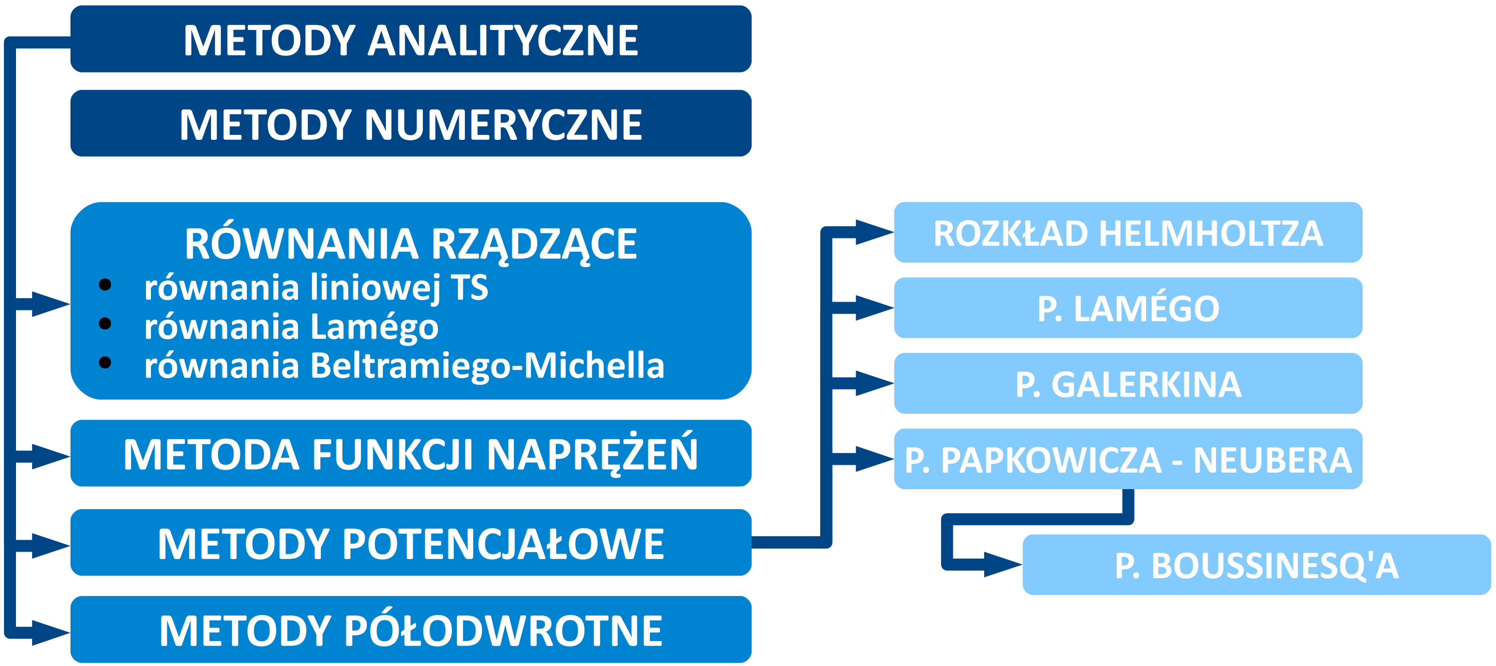
METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS

- **METODY ANALITYCZNE**
  - **RÓWNANIA RZĄDZĄCE**
    - równania liniowej TS
    - równania Lamégo
    - równania Beltramiego-Michella
  - **METODA FUNKCJI NAPRĘŻEŃ**
    - F.N. BELTRAMIEGO
    - F.N. AIRY'EGO
    - F.N. MAXWELLA
    - F.N. MORERY
    - F.N. PRANDTLA
    - F.N. KOLOSOWA-MUSCHELISZWILEGO
      - F.N. WESTERGAARDA
  - **METODY POTENCJAŁOWE**
  - **METODY PÓŁODWROTNE**
- **METODY NUMERYCZNE**

Składowe tensora naprężenia można wyrazić jako **kombinacje pochodnych maks. 6 nieznanych funkcji**, nazywanych **funkcjami naprężeń**.

- tak wyrażone naprężenia **zawsze spełniają równania równowagi**
- muszą zapewnić spełnienie **warunków nierozdzielności** – to daje nam **układ RRC na funkcje naprężeń**.
- dla pewnych zagadnień **można zmniejszyć liczbę funkcji naprężeń** – zadanie staje się łatwiejsze.

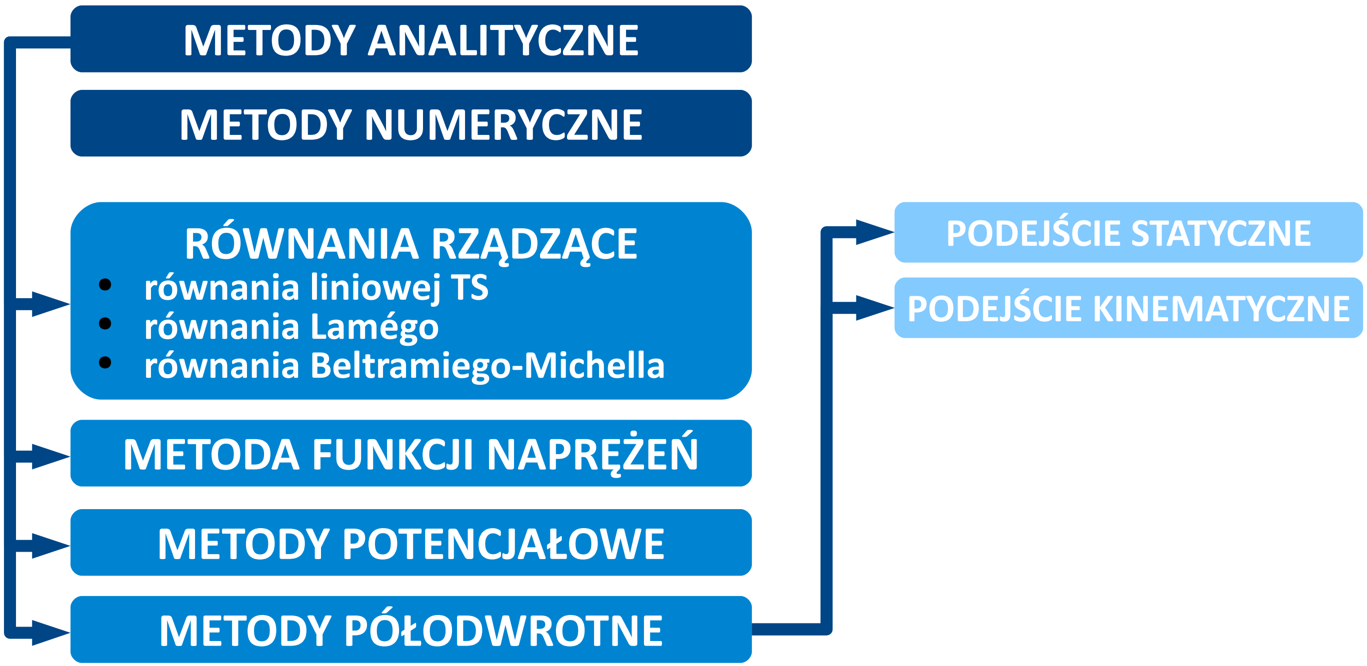
METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS



Składowe wektora przemieszczenia mogą być wyrażone poprzez **pochodne pewnych funkcji** – potencjałów skalarnych lub **składowych** potencjałów wektorowych.

- poprzez odpowiedni dobór związku między składowymi $\mathbf{u}$ a potencjałami możemy zapewnić spełnienie **równań liniowej TS**, jeśli tylko **potencjały spełniają pewne prostsze równania**, których **rozwiązania są znane**.
- **rozwiązania te należy dobrać tak, aby spełnione były warunki brzegowe**.

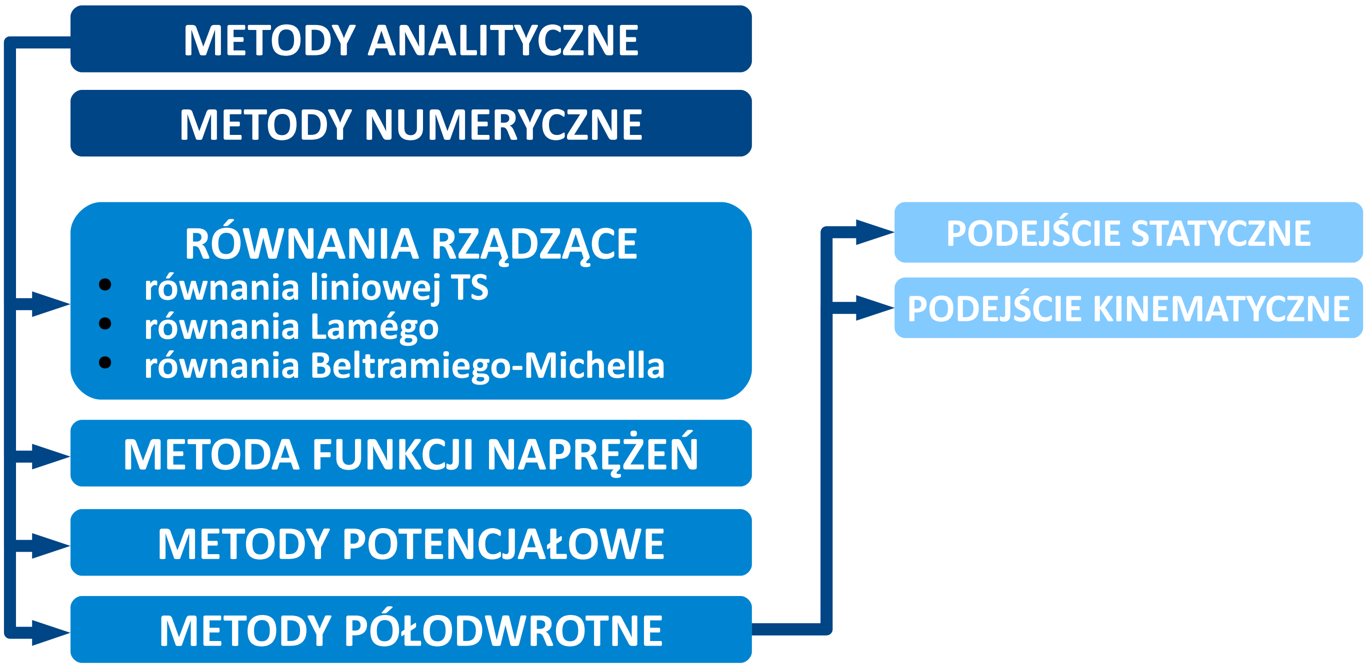
METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS



W metodach półodwrotnych **zakłada się ogólną postać rozwiązania**, a następnie tak dobiera się funkcje lub parametry tej postaci, aby spełnione były wszystkie równania i warunki:

- podejście statyczne – **zakładamy postać stanu naprężenia spełniającą równania równowagi** i **statyczne warunki brzegowe**, wyznaczamy pole odkształcenia, a jeśli spełnia ono warunki nierozdzielności, to możemy wyznaczyć pole przemieszczenia. Tak **dobieramy szczegółową postać rozwiązania**, aby **spełnione były kinematyczne warunki brzegowe**.

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS



W metodach półodwrotnych **zakłada się ogólną postać rozwiązania**, a następnie tak dobiera się funkcje lub parametry tej postaci, aby spełnione były wszystkie równania i warunki:

- podejście kinematyczne – **zakładamy postać pola przemieszczenia spełniającego kinematyczne warunki brzegowe.** Wyznaczamy stan odkształcenia i stan naprężenia. Tak **dobieramy szczegółową postać rozwiązania**, aby **spełnione były równania równowagi i statyczne warunki brzegowe**.

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS

- **METODY ANALITYCZNE**
- **METODY NUMERYCZNE**
  - **METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH**
  - **METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH**
  - **METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH**
  - **METODA ELEMENTÓW DYSKRETNYCH**
  - **METODA OBJĘTOŚCI SKOŃCZONYCH**
  - **...**

Większość najczęściej stosowanych numerycznych metod rozwiązywania zagadnień TS sprowadza się do:

- wyprowadzenia **równań algebraicznych**, **których spełnienie w niewielkim obszarze** gwarantuje **spełnienie w przybliżeniu równań rządzących zagadnieniem**.
- podzielenia dziedziny zagadnienia na niewielkie podobszary (**dyskretyzacji**)
- **zastąpienia układu RRC bardzo dużym układem równań algebraicznych** zapisanych dla tych podobszarów.

METODY ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ LINIOWEJ TS

Rozwiązania zagadnień TS mogą być przedstawione w postaci:

- zamkniętego wzoru – np. przemieszczenie punktów przestrzeni sprężystej od siły skupionej:

$$u_i = \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\delta_{i1} + \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{x_i x_1}{\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2\right]^{3/2}}\right]$$

- szeregu – np. ugięcie cienkiej prostokątnej płyty sprężystej pod obciążeniem jednorodnym:

$$w(x,y) = \frac{48q(1-\nu^2)}{\pi^6 E h^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\cos(m\pi))(1-\cos(n\pi))}{mn\left(\frac{m^2}{L_x^2}+\frac{n^2}{L_y^2}\right)^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)\right]$$

- całki – np. przemieszczenie punktów półpłaszczyzny sprężystej obciążonej na krawędzi:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\pi E}\displaystyle\int_{-L}^{L} p(\xi)\left[(1+\hat{\nu})\frac{(x_1-\xi)x_2}{(x_1-\xi)^2+x_2^2} - (1-\hat{\nu})\operatorname{arctg}\frac{x_1-\xi}{x_2}\right]\mathrm{d}\xi \\ u_2 = -\dfrac{1}{\pi E}\displaystyle\int_{-L}^{L} p(\xi)\left[\ln\left[(x_1-\xi)^2+x_2^2\right] + (1+\hat{\nu})\frac{(x_1-\xi)^2}{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right]\mathrm{d}\xi \end{cases}$$

RÓWNANIA NAPRĘŻENIOWE BELTRAMIEGO – MICHELLA

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

Rozważmy równania nierozdzielności odkształceń ($i, j, k, l = 1,2,3$):

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} - \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

Podstawmy **związki fizyczne**:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{nn}$$

Otrzymamy:

$$\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{ik,jl} - \sigma_{jk,il} - \sigma_{il,jk} + \sigma_{jl,ik}\right] - \frac{\nu}{E}\left[\delta_{ik}\sigma_{nn,jl} - \delta_{jk}\sigma_{nn,il} - \delta_{il}\sigma_{nn,jk} + \delta_{jl}\sigma_{nn,ik}\right] = 0$$

Dokonajmy **zwężenia** (sumowania) **względem wskaźników** i oraz k:

$$\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{ii,jl} - \sigma_{ji,il} - \sigma_{il,ji} + \sigma_{jl,ii}\right] - \frac{\nu}{E}\left[\delta_{ii}\sigma_{nn,jl} - \delta_{ji}\sigma_{nn,il} - \delta_{il}\sigma_{nn,ji} + \delta_{jl}\sigma_{nn,ii}\right] = 0$$

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

Uwzględniamy **symbole Kroneckera**:

$$\frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{ii,jl}-\sigma_{ji,il}-\sigma_{il,ji}+\sigma_{jl,ii}\right]-\frac{\nu}{E}\left[3\sigma_{nn,jl}-\sigma_{nn,jl}-\sigma_{nn,jl}+\delta_{jl}\sigma_{nn,ii}\right]=0$$

Można to przekształcić do następującej postaci:

$$\sigma_{jl,ii}+\left[1-\frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma_{nn,jl}-\sigma_{ji,il}-\sigma_{li,ij}-\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{jl}\sigma_{nn,ii}=0$$

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

Zajmijmy się teraz równaniami równowagi:

$$\sigma_{ji,i} + b_j = 0$$

Możemy zróżniczkować tę zależność względem zmiennej x_l, a następnie zapisać to samo wyrażenie, tylko z zamianą miejscami wskaźników wolnych l oraz j. Mamy wtedy:

$$-\sigma_{ji,il} = b_{j,l} \qquad\qquad -\sigma_{li,ij} = b_{l,j}$$

Równania nierozdzielności dały nam wcześniej:

$$\sigma_{jl,ii} + \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma_{nn,jl} - \sigma_{ji,il} - \sigma_{li,ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{jl}\sigma_{nn,ii} = 0$$

Podstawiamy przekształcone **równania równowagi**:

$$\sigma_{jl,ii} + \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma_{nn,jl} + \left(b_{j,l} + b_{l,j}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{jl}\sigma_{nn,ii} = 0$$

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

Wyprowadzamy kolejną **zależność pomocniczą**. Dokonujemy **zwężenia** (sumowania) **względem wskaźników** l oraz j :

$$\sigma_{kk,ii} + \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma_{nn,kk} + \left(b_{k,k} + b_{k,k}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{kk}\sigma_{nn,ii} = 0$$

Wskaźniki nieme (względem których sumujemy), **można zamieniać**:

$$\sigma_{nn,kk} + \left[1 - \frac{\nu}{1+\nu}\right]\sigma_{nn,kk} + 2\,b_{k,k} - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma_{nn,kk} = 0$$

Można to uprościć do postaci:

$$\sigma_{nn,kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}b_{k,k}$$

Wynik ten podstawiamy do równania, na którym dokonaliśmy zwężenia względem l oraz j .

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

Otrzymujemy układ równań Beltramiego – Michella (**warunki zgodności naprężeń**)

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \left(b_{i,j} + b_{j,i}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} b_{k,k} = 0$$

Po rozpisaniu:

$$\begin{cases}
\nabla^2\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{11,11}+\sigma_{22,11}+\sigma_{33,11}\right) + 2b_{1,1} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(b_{1,1}+b_{2,2}+b_{3,3}\right) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{11,22}+\sigma_{22,22}+\sigma_{33,22}\right) + 2b_{2,2} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(b_{1,1}+b_{2,2}+b_{3,3}\right) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{11,33}+\sigma_{22,33}+\sigma_{33,33}\right) + 2b_{3,3} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(b_{1,1}+b_{2,2}+b_{3,3}\right) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{11,23}+\sigma_{22,23}+\sigma_{33,23}\right) + \left(b_{2,3} + b_{3,2}\right) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{31} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{11,31}+\sigma_{22,31}+\sigma_{33,31}\right) + \left(b_{3,1} + b_{1,3}\right) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}\left(\sigma_{11,12}+\sigma_{22,12}+\sigma_{33,12}\right) + \left(b_{1,2} + b_{2,1}\right) = 0
\end{cases}$$

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

Jeśli **siły masowe są jednorodne** (stałe), równania Beltramiego-Michella przyjmują następującą postać:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} = 0$$

Po rozpisaniu:

$$\begin{cases}
\nabla^2\sigma_{11} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11,11}+\sigma_{22,11}+\sigma_{33,11}) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{22} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11,22}+\sigma_{22,22}+\sigma_{33,22}) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{33} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11,33}+\sigma_{22,33}+\sigma_{33,33}) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{23} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11,23}+\sigma_{22,23}+\sigma_{33,23}) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{31} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11,31}+\sigma_{22,31}+\sigma_{33,31}) = 0 \\
\nabla^2\sigma_{12} + \frac{1}{1+\nu}(\sigma_{11,12}+\sigma_{22,12}+\sigma_{33,12}) = 0
\end{cases}$$

RÓWNANIA BELTRAMIEGO-MICHELLA

UWAGI:

- Laplasjan zdefiniowany jest następująco: $$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

- **Równania Beltramiego – Michella** zostały wyprowadzone
  - z warunków nierozdzielności
  - przy **założeniu, że spełnione są** równania równowagi.

- **Nie każde rozwiązanie równań Beltramiego – Michella jest rozwiązaniem zagadnienia liniowej TS**. Takie rozwiązanie **musi dodatkowo spełniać równania równowagi**.

- Równania Beltramiego – Michella są w zasadzie **warunkami nierozdzielności odkształceń wyrażonymi przez naprężenia**. Dlatego nazywa się je również **warunkami zgodności naprężeń**. Spełnienie tych równań (wraz z równaniami równowagi) gwarantuje całkowalność związków geometrycznych, zatem:
  - jeśli mamy pole naprężeń spełniające ten komplet równań, to z prawa Hooke'a możemy wyznaczyć pole odkształceń.
  - skoro spełnione są warunki nierozdzielności, to z warunków geometrycznych możliwe jest wyznaczenie pola przemieszczeń z wyznaczonego pola odkształceń.

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

Rozważmy pewne **trójwymiarowe symetryczne pole tensorowe 2 rzędu** $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, które nazywać będziemy **tensorem naprężenia Beltramiego**. O składowych tego pola $\Phi_{ij}(\mathbf{x})$ zakładamy, że są co najmniej **dwukrotnie różniczkowalne**. Wyznaczmy teraz stan naprężenia zgodnie z poniższą zależnością:

$$\boxed{\sigma_{ij} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Phi_{kl,mn}}$$

Podstawmy tak określony stan naprężenia do **równań równowagi Naviera, z pominięciem sił masowych**.

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Phi_{kl,mnj} = 0$$

Korzystając z własności symbolu permutacyjnego Levi-Civity można pokazać, że **zależność powyższa jest spełniona tożsamościowo dla dowolnego symetrycznego pola tensorowego** $\Phi_{ij}(\mathbf{x})$ **klasy** C^2, a zatem **tensor naprężenia Beltramiego zawsze spełnia równania równowagi** (**bez sił masowych**).

Jeśli ponadto będzie **spełniał równania Beltramiego – Michella**, to będzie on **rozwiązaniem zagadnienia liniowej teorii sprężystości**.

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

Dla uproszczenia zapisu przedstawmy tensor naprężenia Beltramiego w następującej postaci:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{bmatrix}$$

Wtedy składowe **stanu naprężenia**, obliczamy zgodnie ze związkiem: $\sigma_{ij} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \Phi_{kl,mn}$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 D}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \qquad \sigma_{23} = \frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 B}{\partial x_3 \partial x_1}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 C}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} \qquad \sigma_{31} = \frac{\partial^2 B}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 B}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} \qquad \sigma_{12} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 B}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_3}$$

Składowe A, B, … są funkcjami $\mathbf{x}$. Nazywamy je funkcjami naprężeń Beltramiego. Równania Beltramiego – Michella stanowią **układ równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu** na te funkcje. Są bardzo rozbudowane, ale **liniowe** i mają **stałe współczynniki**.

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

W przypadku niektórych zagadnień teorii sprężystości możliwe jest **uwzględnienie cech symetrii zagadnienia** wynikających z **geometrii** ciała oraz z **warunków brzegowych**.

W takich sytuacjach możliwe jest przedstawienie rozwiązania zagadnienia za pomocą **uproszczonej postaci tensora naprężenia Beltramiego**, tj. takiej, w której niektóre składowe są np. równe 0.

PRZYKŁAD:

Funkcje naprężeń Maxwella:
$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 D}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \qquad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} \qquad \sigma_{31} = -\frac{\partial^2 D}{\partial x_3 \partial x_1}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

FUNKCJE NAPRĘŻEŃ

Najczęściej stosowaną funkcją naprężeń jest funkcja naprężeń Airy'ego, o której zakładamy, że zależy jedynie od dwóch zamiennych niezależnych (np. x_1, x_2 – **zagadnienie płaskiego stanu naprężenia**)

Funkcja naprężeń Airy'ego:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\sigma_{33} = 0 \qquad \sigma_{23} = 0 \qquad \sigma_{31} = 0$$

Jeśli **dodamy do siebie pierwsze i drugie równanie Beltramiego – Michella** zapisane dla stanu naprężenia wyrażonego przez funkcję naprężeń Airy'ego, to taka zależność będzie spełniona, gdy funkcja Airye'go będzie funkcją biharmoniczną (spełniać będzie **równanie biharmoniczne**)

$$\nabla^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0$$

METODY POTENCJAŁOWE

METODY POTENCJAŁOWE

Nazwa „potencjał" wiąże się z analogiczną wielkością znaną z elektrostatyki. **Potencjałem elektrycznym** V nazywamy taką **funkcję o wartościach skalarnych**, której **gradient** (wektor) jest przeciwny do **wektora natężenia pola elektrycznego** $\mathbf{E}$.

$$\nabla V = -\mathbf{E}$$

Zgodnie z **prawem Gaussa** (dla pola elektrycznego) **potencjał spełnia równanie Poissona**:

$$\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Gdzie ρ to gęstość objętościowa ładunku elektrycznego, a ϵ to przenikalność elektryczna ośrodka.

Ogólnie, potencjałem nazywać będziemy taką **funkcję** (**skalarną** lub **wektorową**), że:

- **działanie pewnego operatora różniczkowego** na tę funkcję **daje rozwiązanie** postawionego zagadnienia matematycznego.
- **funkcja ta spełnia pewne równanie różniczkowe**, którego **rozwiązanie jest często znane**.

METODY POTENCJAŁOWE

PRZYKŁADY:

- Potencjał odkształceniowy Lamégo:
  - pole przemieszczeń: $$u_i = \frac{1}{G}\phi_{,i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{1}{G}\nabla\phi = \left[\frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\ ;\ \frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\ ;\ \frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right]$$
  - potencjał spełnia **równanie Poissona**: $$\nabla^2\phi = C = const.$$
  - **rozwiązanie** równania Poissona dla pewnych zagadnień jest znane – np. dla przestrzeni sprężystej:

$$\phi(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[C\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}}\right)\right]\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2$$

UWAGI:

- Jeśli potencjał spełnia równanie Poissona, to wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ dany tym potencjałem **spełnia równania przemieszczeniowe Lamégo dla statyki i z pominięciem sił masowych**.
- **Ten potencjał nie opisuje wszystkich możliwych rozwiązań**, a jedynie te, dla których tensor małych obrotów jest zerowy!

METODY POTENCJAŁOWE

PRZYKŁADY:

- Potencjał wektorowy Galerkina:
  - pole przemieszczeń: $$u_i = \frac{1}{G} g_{i,jj} - \frac{\lambda + G}{G(\lambda + 2G)} g_{j,ji}$$
  - potencjał spełnia **niejednorodne równanie biharmoniczne**: $$\nabla^4 g_i = -b_i$$

UWAGI:

- Dla pewnych dziedzin (kształtów ciała) oraz warunków brzegowych rozwiązanie tego równania jest znane.
- Jeśli **potencjał wektorowy Galerkina spełnia niejednorodne równanie biharmoniczne**, to wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ dany tym potencjałem **spełnia** równania przemieszczeniowe Lamégo **dla** statyki**.**

METODY POTENCJAŁOWE

PRZYKŁADY:

- Potencjały Papkowicza - Neubera:
  - pole przemieszczeń: $$u_i = \frac{1}{G}\left[\psi_i + \frac{1}{4(1-\nu)}\left(\phi - \psi_j x_j\right)_{,i}\right]$$
  - potencjał **wektorowy** spełnia **równanie Poissona:** $$\nabla^2 \psi_i = -b_i$$
  - potencjał **skalarny** spełnia **równanie Poissona**: $$\nabla^2 \phi = -b_k x_k$$

UWAGI:

- Rozwiązanie równania Poissona dla pewnych dziedzin i warunków brzegowych jest znane.
- Jeśli potencjały Papkowicza – Neubera spełniają odpowiednie równania, to wektor przemieszczenia $\mathbf{u}$ dany tym potencjałem **spełnia** równania przemieszczeniowe Lamégo dla statyki.
- **Każde pole przemieszczeń będące rozwiązaniem zagadnienia liniowej teorii sprężystości da się wyrazić za pomocą odpowiednich potencjałów Papkowicza – Neubera.**

METODY POTENCJAŁOWE

PRZYKŁADY:

- Potencjały Boussinesq'a - to szczególne przypadki potencjałów Papkowicza – Neubera:
  - Potencjał A $\psi = [0;0;0], \quad \phi = 2(1-\nu)\phi_A$ gdzie $\nabla^2 \phi_A = 0$
  - Potencjał B $\psi = -2(1-\nu)[0;0;\phi_B] \quad \phi = 0$ gdzie $\nabla^2 \phi_B = 0$
  - Potencjał C $\psi = -2(1-\nu)[0;\phi_C;0] \quad \phi = 0$ gdzie $\nabla^2 \phi_C = 0$
  - Potencjał D $\psi = -2(1-\nu)[\phi_D;0;0] \quad \phi = 0$ gdzie $\nabla^2 \phi_D = 0$
  - Potencjał E $\psi = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \phi_E}{\partial x_2}; -\frac{1}{2}\frac{\partial \phi_E}{\partial x_1}; 0\right] \quad \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_E}{\partial x_2}x_1 - \frac{\partial \phi_E}{\partial x_1}x_2\right)$ gdzie $\nabla^2 \phi_E = 0$
  - Potencjał F $\psi = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial \phi_F}{\partial x_3}; 0; \frac{1}{2}\frac{\partial \phi_F}{\partial x_1}\right] \quad \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_F}{\partial x_1}x_3 - \frac{\partial \phi_F}{\partial x_3}x_1\right)$ gdzie $\nabla^2 \phi_F = 0$
  - Potencjał G $\psi = \left[0; \frac{1}{2}\frac{\partial \phi_G}{\partial x_3}; -\frac{1}{2}\frac{\partial \phi_G}{\partial x_2}\right] \quad \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_G}{\partial x_3}x_2 - \frac{\partial \phi_G}{\partial x_2}x_3\right)$ gdzie $\nabla^2 \phi_G = 0$

UWAGA: Potencjały Boussinesq'a opisują rozwiązania zagadnień z **pominięciem sił masowych**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ