TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

ZAGADNIENIA PŁASKIE

ZAGADNIENIA PŁASKIE

W pewnych szczególnych przypadkach geometrii zagadnienia teorii sprężystości oraz postawionych warunków brzegowych, **stan naprężenia może być polem tensorowym zależnym jedynie od dwóch zmiennych niezależnych** np. x_1 i x_2, i niezależnym od zmiennej x_3, a ponadto wszystkie składowe związane z kierunkiem mogą być zerowe:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1; x_2) & \sigma_{12}(x_1; x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1; x_2) & \sigma_{22}(x_1; x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mówimy wtedy o **zagadnieniu płaskim** lub **dwuwymiarowym** w płaszczyźnie (x_1, x_2). Taki stan naprężenia nazywamy płaskim stanem naprężenia.

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Z **uogólnionego prawa Hooke'a** dla płaskiego stanu naprężenia (PSN) wynika:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] & \frac{\sigma_{12}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{12}}{2G} & \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}[\sigma_{11} + \sigma_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1;x_2) & \varepsilon_{12}(x_1;x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1;x_2) & \varepsilon_{22}(x_1;x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1;x_2) \end{bmatrix}$$

- W **PSN stan odkształcenia również zależy jedynie od dwóch zmiennych** niezależnych, **nie jest jednak stanem płaskim** (nie jest dany tensorem dwuwymiarowym, reprezentowanym przez macierz 2 x 2).
- **Postać stanu odkształcenia** odpowiadającą **PSN** nazywamy stanem antypłaskim.

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Rozważać możemy również płaski stan odkształcenia (PSO):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1;x_2) & \varepsilon_{12}(x_1;x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1;x_2) & \varepsilon_{22}(x_1;x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wtedy **stan naprężenia** jest stanem antypłaskim:

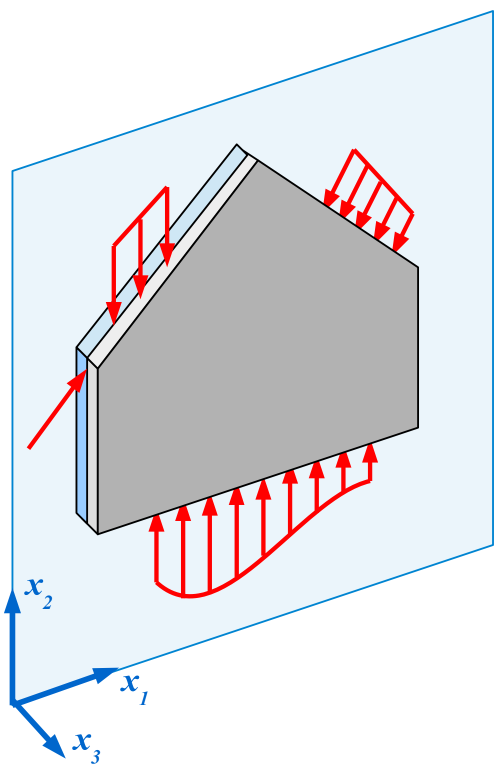
$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (2G+\lambda)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22} & 2G\varepsilon_{12} & 0 \\ 2G\varepsilon_{12} & (2G+\lambda)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1;x_2) & \sigma_{12}(x_1;x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1;x_2) & \sigma_{22}(x_1;x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1;x_2) \end{bmatrix}$$

ZAGADNIENIA PŁASKIE

ZAGADNIENIA PŁASKIE

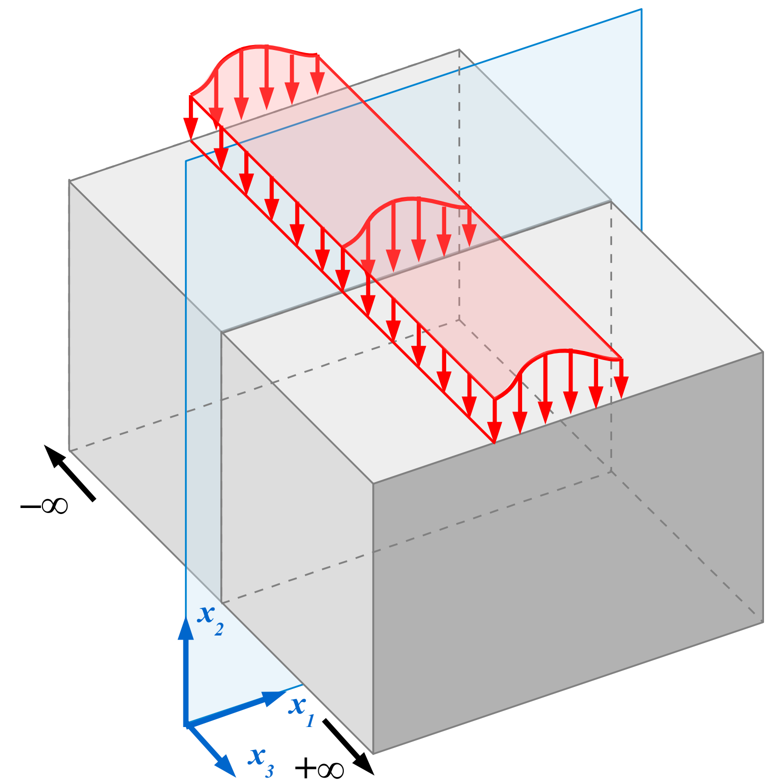
PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA

- obciążenie w płaszczyźnie
- swoboda deformacji poprzecznej



PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

- Odkształcenie poprzeczne skrępowane
- Obecność naprężeń normalnych, prostopadłych do płaszczyzny zagadnienia



ZAGADNIENIA PŁASKIE

Odkształcenia poprzeczne do płaszczyzny zagadnienia PSN są zależne od odkształceń w płaszczyźnie:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}] & \frac{\sigma_{12}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{12}}{2G} & \frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}[\sigma_{11}+\sigma_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1;x_2) & \varepsilon_{12}(x_1;x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1;x_2) & \varepsilon_{22}(x_1;x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1;x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}] \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}[\sigma_{11}+\sigma_{22}] = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}$$

- Jeśli w PSN znamy stan odkształcenia w płaszczyźnie, to znamy cały stan odkształcenia.
- Zagadnienie w istocie staje się dwuwymiarowe.

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Naprężenia prostopadłe do płaszczyzny zagadnienia PSO są zależne od naprężeń w płaszczyźnie:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (2G+\lambda)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22} & 2G\varepsilon_{12} & 0 \\ 2G\varepsilon_{12} & (2G+\lambda)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1;x_2) & \sigma_{12}(x_1;x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1;x_2) & \sigma_{22}(x_1;x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1;x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (2G+\lambda)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} = (2G+\lambda)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{(2G+\lambda)\sigma_{11} - \lambda\sigma_{22}}{4G(G+\lambda)} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{(2G+\lambda)\sigma_{22} - \lambda\sigma_{11}}{4G(G+\lambda)} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{33} = \lambda[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}] = \frac{\lambda}{2(G+\lambda)}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})}$$

- Jeśli w PSO znamy stan naprężenia w płaszczyźnie, to znamy cały stan naprężenia.
- Zagadnienie w istocie staje się dwuwymiarowe.

ZAGADNIENIA PŁASKIE

- **Wszystkie składowe tensora naprężenia i odkształcenia zależą jedynie od dwóch zmiennych niezależnych**.
- **Składowe jednoimienne tych tensorów na kierunku prostopadłym** do płaszczyzny zagadnienia **są znane** - są albo równe 0, albo można je wyznaczyć na podstawie składowych części płaskiej tych tensorów.
- **Składowe wektora przemieszczenia** otrzymamy w wyniku **całkowania składowych tensora odkształcenia**.
- Aby zadanie było całkowicie dwuwymiarowe, musimy jeszcze zbadać **równania równowagi**:

PSN: $$\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+b_1=0 \\ \sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+b_2=0 \\ b_3=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b_3=0$$

PSO: $$\sigma_{13}=\sigma_{23}=0\ , \quad \sigma_{33,3}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+b_1=0 \\ \sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+b_2=0 \\ b_3=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b_3=0$$

- Jeśli tylko wektor sił masowych ma postać $\mathbf{b}=[b_1;b_2;0]$, to zagadnienia mamy tylko 2 równania równowagi.

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Związki konstytutywne w **PSN**:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases} \xrightarrow{\sigma_{33}=0} \boxed{\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases}}$$

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Związki konstytutywne w **PSO**:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases} \xrightarrow{\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})} \boxed{\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{11} - \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1+\nu}{E}\left[\sigma_{22} - \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_{11}\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \end{cases}}$$

Jeśli wprowadzimy zmodyfikowane stałe materiałowe $\hat{E} = \dfrac{E}{1-\nu^2}$, $\hat{\nu} = \dfrac{\nu}{1-\nu}$, wtedy:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{\hat{E}}{2(1+\hat{\nu})} = \hat{G}$$

$$\boxed{\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{\hat{E}}[\sigma_{11} - \hat{\nu}\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{\hat{E}}[\sigma_{22} - \hat{\nu}\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\hat{\nu}}{\hat{E}}\sigma_{12} \end{cases}}$$

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Związki konstytutywne można zapisać w analogicznej identycznej zarówno dla PSO jak i PSN

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{\hat{E}}\left[\sigma_{11} - \hat{\nu}\,\sigma_{22}\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{\hat{E}}\left[\sigma_{22} - \hat{\nu}\,\sigma_{11}\right] \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1+\hat{\nu}}{\hat{E}}\,\sigma_{12} \end{cases}$$

przy czym:

$$\hat{E} = \begin{cases} E & \Leftrightarrow \quad \text{PSN} \\ \dfrac{16\,E}{(7-\kappa)(\kappa+1)} = \dfrac{E}{1-\nu^2} & \Leftrightarrow \quad \text{PSO} \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \Leftrightarrow \quad \text{PSN} \\ \kappa = 3-4\nu & \Leftrightarrow \quad \text{PSO} \end{cases}$$

$$\hat{\nu} = \frac{3-\kappa}{\kappa+1} = \begin{cases} \nu & \Leftrightarrow \quad \text{PSN} \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & \Leftrightarrow \quad \text{PSO} \end{cases}$$

ZAGADNIENIA PŁASKIE

Równania rządzące zagadnieniami płaskimi:

- **Równania równowagi**:

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + b_1 = 0 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + b_2 = 0 \end{cases}$$

- **Związki konstytutywne**:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{\hat{E}}[\sigma_{11} - \hat{\nu}\sigma_{22}] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{\hat{E}}[\sigma_{22} - \hat{\nu}\sigma_{11}] \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\hat{\nu}}{\hat{E}}\sigma_{12} \end{cases}$$

- **Związki geometryczne**:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

Jeśli uwzględni się fakt, że $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_3} = 0$, to **równania nierozdzielności** są zawsze spełnione poza jednym:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0$$

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

Rozważmy jedyne **równanie nierozdzielności odkształceń**, którego spełnienie trzeba zagwarantować w **zagadnieniach płaskich**:

$$\varepsilon_{11,22}-2\varepsilon_{12,12}+\varepsilon_{22,11}=0$$

Wyraźmy odkształcenia za pomocą naprężeń:

$$\frac{1}{\hat{E}}[\sigma_{11}-\hat{\nu}\sigma_{22}]_{,22}-2\frac{\sigma_{12,12}}{2G}+\frac{1}{\hat{E}}[\sigma_{22}-\hat{\nu}\sigma_{11}]_{,11}=0$$

Obie strony równania można przemnożyć przez $\hat{E}$. Po przekształceniach mamy:

$$\sigma_{11,22}-\hat{\nu}\sigma_{22,22}+\sigma_{22,11}-\hat{\nu}\sigma_{11,11}-2(1+\hat{\nu})\sigma_{12,12}=0$$

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

Można to też zapisać następująco:

$$\nabla^2\sigma_{11}-\sigma_{11,11}-\hat{\nu}\sigma_{11,11}+\nabla^2\sigma_{22}-\sigma_{22,22}-\hat{\nu}\sigma_{22,22}-2(1+\hat{\nu})\sigma_{12,12}=0$$

gdzie: $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

Po przekształceniach:

$$\nabla^2\sigma_{11}-(1+\hat{\nu})\sigma_{11,11}+\nabla^2\sigma_{22}-(1+\hat{\nu})\sigma_{22,22}-2(1+\hat{\nu})\sigma_{12,12}=0$$

$$\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})-(1+\hat{\nu})\left[\sigma_{11,11}+\sigma_{22,22}+2\sigma_{12,12}\right]=0$$

$$\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})-(1+\hat{\nu})\left[(\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2})_{,1}+(\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2})_{,2}\right]=0$$

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

W równaniu

$$\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})-(1+\hat{\nu})\left[(\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2})_{,1}+(\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2})_{,2}\right]=0$$

można wykorzystać równania równowagi:

$$\begin{cases}\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+b_1=0\\ \sigma_{12,1}+\sigma_{22,2}+b_2=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}(\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2})_{,1}=-b_{1,1}\\ (\sigma_{12,1}+\sigma_{22,2})_{,2}=-b_{2,2}\end{cases}$$

Mamy zatem:

$$\boxed{\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})+(1+\hat{\nu})\left[b_{1,1}+b_{2,2}\right]=0}$$

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

Wprowadźmy teraz funkcję naprężeń Airy'ego, zdefiniowaną następująco:

$$F(x_1; x_2): \quad \begin{cases} F_{,11} = \sigma_{22} \\ F_{,22} = \sigma_{11} \\ F_{,12} = -\sigma_{12} - b_1 x_2 - b_2 x_1 \end{cases}$$

Jeśli zapiszemy **równania równowagi** z wykorzystaniem powyższych definicji, to przyjmą one postać:

$$\begin{cases} b_{1,2} x_2 + b_{2,2} x_1 = 0 \\ b_{1,1} x_2 + b_{2,1} x_1 = 0 \end{cases}$$

Dla jednorodnego rozkładu sił masowych (np. jednorodne pole grawitacyjne, stała gęstość), **równania równowagi są spełnione tożsamościowo**. Dla jednorodnych sił masowych **równanie nierozdzielności** przyjmuje postać:

$$\boxed{\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0}$$

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

Równanie rządzące zagadnieniem płaskim to:

$$\boxed{\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = 0}$$

Dla **PSN**, gdy $\sigma_{33} = 0$, wyrażenie w nawiasie jest proporcjonalne do naprężenia hydrostatycznego. W takim przypadku **naprężenie hydrostatyczne** musi być **funkcją harmoniczną** (spełniającą **równanie Laplace'a –** w niektórych przypadkach znamy to rozwiązanie).

Jeśli wyrazimy naprężenia przez funkcję Airy'ego, wtedy:

$$\nabla^2(F_{,22}+F_{,11}) = \nabla^2(\nabla^2 F) = \nabla^4 F = 0$$

Zatem **funkcja naprężeń Airy'ego**, której pochodne określają stan naprężenia zagadnienia płaskiego, **spełniający równania równowagi** dla **jednorodnego rozkładu sił masowych**, musi być **funkcją biharmoniczną** (spełniającą **równanie biharmoniczne** – znamy niektóre jego rozwiązania)

$$\boxed{\nabla^4 F = F_{,1111}+2F_{,1122}+F_{,2222} = 0}$$

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

UWAGI:

- **Równanie biharmoniczne** jest równaniem **4 rzędu** z uwagi na funkcję Airy'ego.

- Aby rozwiązanie było jednoznaczne, potrzebujemy **warunków brzegowych na samą funkcję niewiadomą**.

- **Naprężenia i odkształcenia wyrażają się przez drugie pochodne** funkcji Airy'ego, a **przemieszczenia przez pierwsze pochodne**.

- **Rozwiązanie jest zatem niejednoznaczne** – istnieje nieskończenie wiele funkcji Airy'ego spełniających równania równowagi, równania nierozdzielności oraz zadane statyczne i kinematyczne warunki brzegowe.

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

UWAGI:

- **Zależne od naprężeń równanie rządzące** zagadnieniem płaskim **nie zależy od stałych materiałowych**, podobnie i **statyczne warunki brzegowe**.

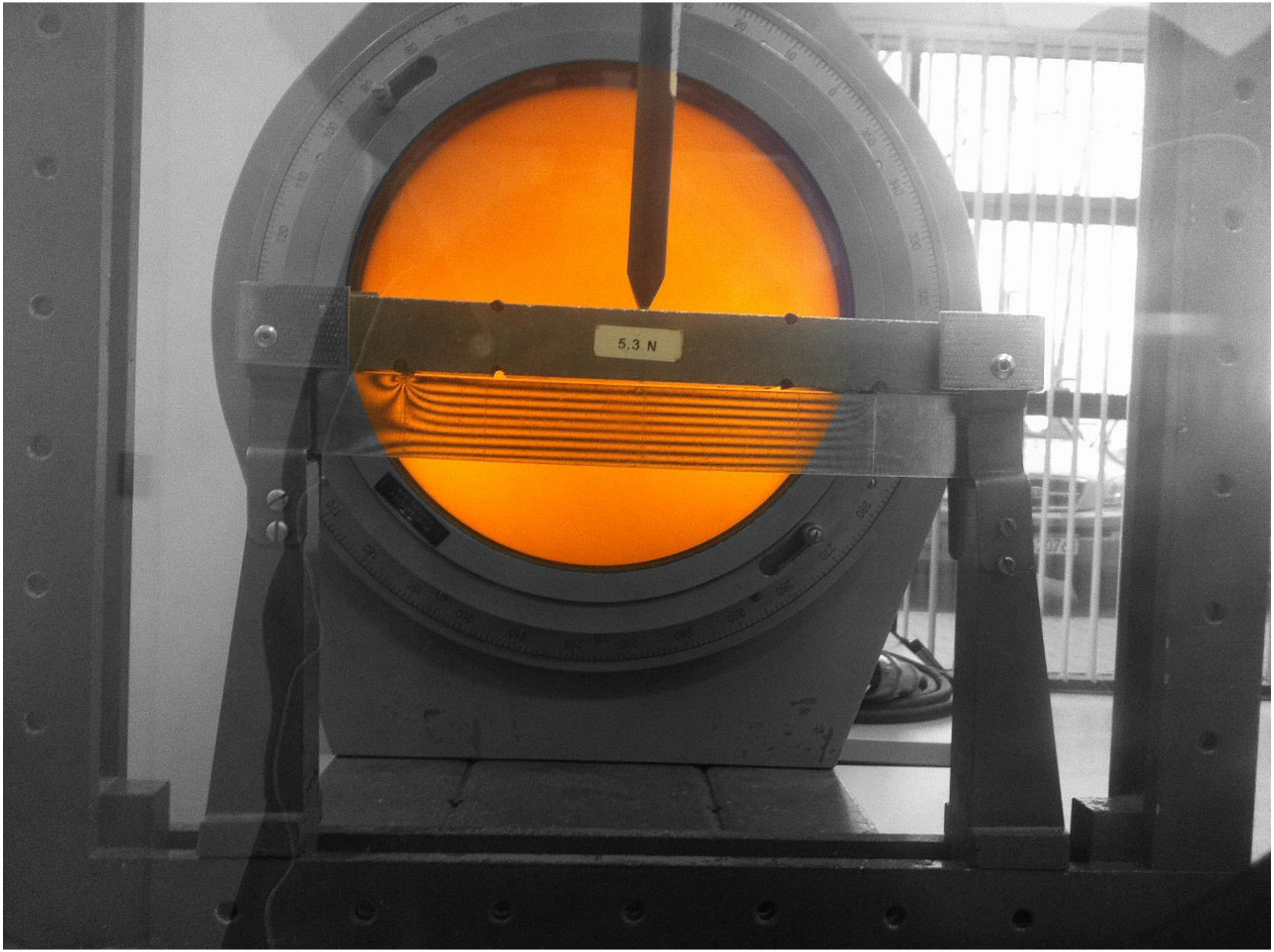
- Kinematyczne warunki brzegowe zależą od przemieszczeń, do wyznaczenia których konieczna jest znajomość stałych materiałowych

- Można zatem sformułować **twierdzenie Lévy'ego:**

> **jeżeli warunki brzegowe są tylko typu statycznego, to rozkład naprężeń w izotropowym ciele sprężystym w PSN i PSO nie zależy od materiału, z jakiego ciało jest wykonane.**

- Możemy wykonać model obiektu fizycznego, który spełnia założenia tego twierdzenia. Naprężenia w tym modelu będą takie same jak naprężenia w obiekcie rzeczywistym wykonanym z innego materiału. Model możemy wykonać z **przezroczystych żywic lub kryształów**, które **w różnym stopniu przepuszczają spolaryzowane światło**, w **zależności od wielkości i kierunków naprężeń**. Na tych zjawiskach bazuje **nieniszcząca metoda analizy stanu naprężenia** zwana elastooptyką.

FUNKCJA NAPRĘŻEŃ AIRY'EGO

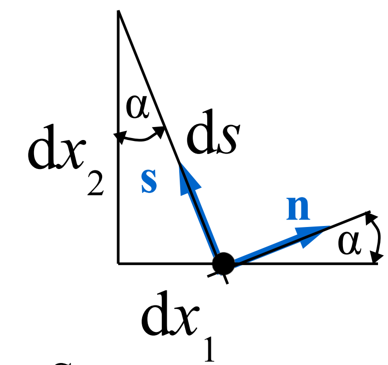


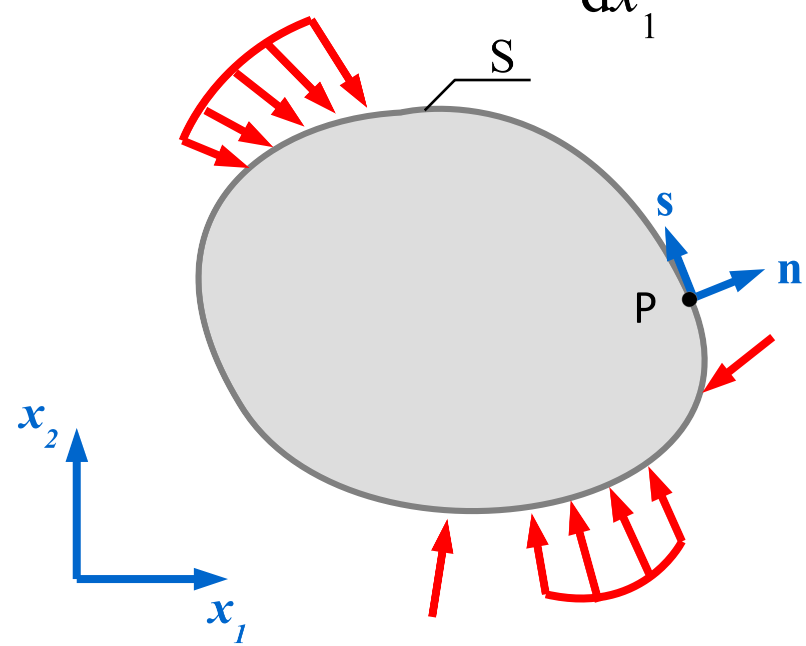
WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

- rozważmy dowolną **tarczę sprężystą** o grubości h, znajdującą się w **PSN**.
- **brzeg tej tarczy** nie będzie dany **krzywą płaską**.
- **w każdym punkcie tego brzegu** określić możemy wektor normalny $\mathbf{n}$ oraz wektor styczny $\mathbf{s}$ do brzegu.

$$\mathbf{n} = [n_1 \, ; n_2] = [\cos\alpha \; ; \; \sin\alpha]$$

$$\mathbf{s} = [s_1 \, ; s_2] = [-\sin\alpha \; ; \; \cos\alpha]$$





- Funkcje trygonometryczna kąta obrotu tych wektorów można wyrazić przez pochodne

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,s} \qquad \sin\alpha = -\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,s}$$

gdzie s jest parametrem naturalnym krzywej.

WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

- Zapiszmy statyczne warunki brzegowe:

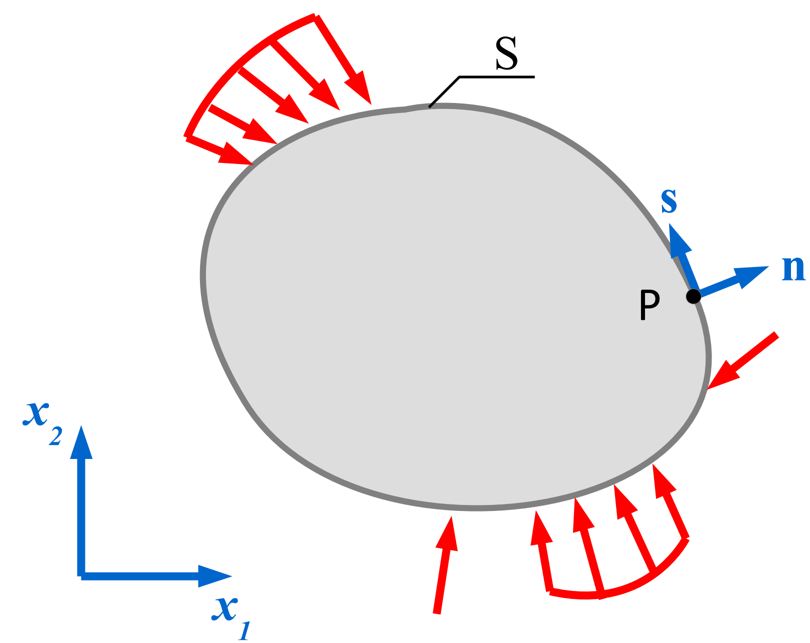
$$\sigma_{ij} n_j = q_i \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = q_1 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = q_2 \end{cases}$$

- **Naprężenia** wyrażamy przez **funkcję Airy'ego**.
  Składowe **normalnej** wyrażamy przez **pochodne**.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \dfrac{\mathrm{d} x_2}{\mathrm{d} s} + \left(- \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \left(- \dfrac{\mathrm{d} x_1}{\mathrm{d} s} \right) = q_1 \\ \left(- \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \dfrac{\mathrm{d} x_2}{\mathrm{d} s} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \left(- \dfrac{\mathrm{d} x_1}{\mathrm{d} s} \right) = q_2 \end{cases}$$

- Wykorzystujemy wzór na **pochodną funkcji złożonej**:

$$\begin{cases} q_1 = \left[\dfrac{\mathrm{d} x_1}{\mathrm{d} s} \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\mathrm{d} x_2}{\mathrm{d} s} \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right] \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2} \right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} s} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2} \right) \\ q_2 = - \left[\dfrac{\mathrm{d} x_1}{\mathrm{d} s} \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\mathrm{d} x_2}{\mathrm{d} s} \dfrac{\partial}{\partial x_2} \right] \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1} \right) = - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} s} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1} \right) \end{cases}$$



dr inż. Paweł Szeptyński

WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

- Otrzymaliśmy zależności

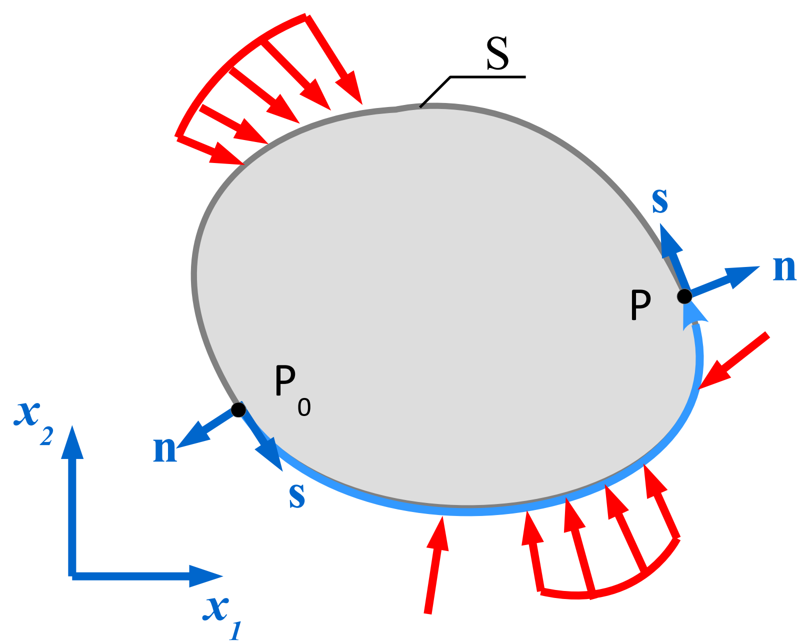
$$q_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) \qquad q_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$$

- Wybierzmy na brzegu tarczy pewien punkt $P_0 = (x_1^{P_0}; x_2^{P_0})$
  Przyjmiemy, że jest to punktu ustalony, **nieruchomy**.

- Wybierzmy na brzegu pewien inny punkt $P = (x_1^P; x_2^P)$
  Jego położenie będziemy zmieniać w toku analizy

- Rozważmy teraz **fragment brzegu skierowany od punktu P_0 do punktu P** w taki sposób, że obserwator skierowany zgodnie z orientacją tego fragmentu ma **wnętrze tarczy po lewej stronie**.

- Zsumujmy (scałkujmy) obciążenie przyłożone do tego fragmentu brzegu.



WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

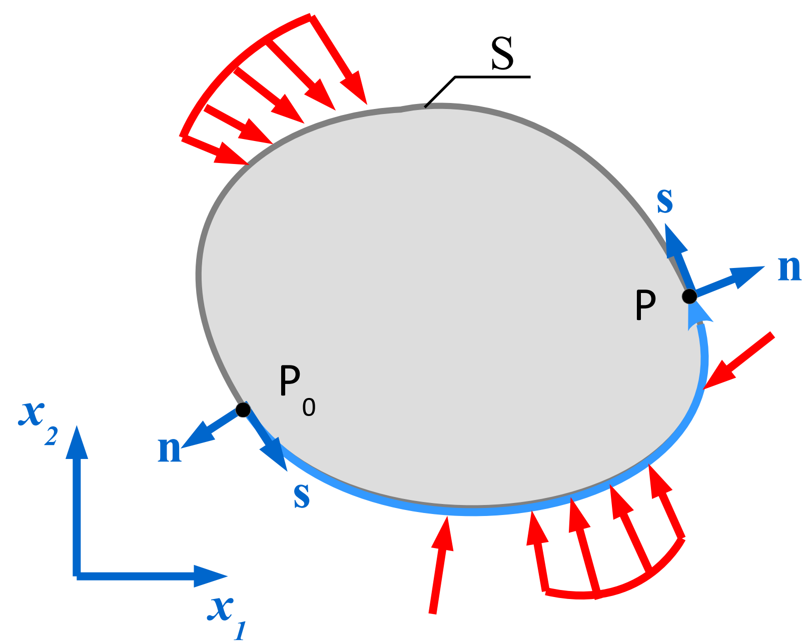
- Suma obciążeń:

$$\begin{cases} Q_1 = \iint\limits_A q_1 \,\mathrm{d}A = h\int\limits_{P_0}^{P} q_1 \,\mathrm{d}s = h\int\limits_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}s = h\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0}^{P} \\ Q_2 = \iint\limits_A q_2 \,\mathrm{d}A = h\int\limits_{P_0}^{P} q_2 \,\mathrm{d}s = -h\int\limits_{P_0}^{P} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}s = -h\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0}^{P} \end{cases}$$

UWAGA:

- obciążenie zewnętrzne: $[q]=\mathrm{N/m^2}$.
- suma obciążenia: $[Q]=\mathrm{N}$

- Całkujemy po całej powierzchni bocznej brzegu, zatem również względem zmiennej x_3. Rozkład obciążeń po grubości tarczy musi być stały. Stąd całka podwójna oraz wynik całkowania po grubości, tj. grubość h.



WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

- Moment obciążenia przyłożonego na fragmencie brzegu P_0P względem bieguna P:

$$M = h\int_{P_0}^{P}\left[q_1(x_2^P - x_2) - q_2(x_1^P - x_1)\right]\mathrm{d}s = h\left[x_2^P\int_{P_0}^{P} q_1\,\mathrm{d}s - x_1^P\int_{P_0}^{P} q_2\,\mathrm{d}s + \int_{P_0}^{P}(q_2 x_1 - q_1 x_2)\,\mathrm{d}s\right]$$

- Składowe obciążenia wyrażamy przez pochodne: $q_1 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)$ $\quad q_2 = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)$

$$M = h\left[x_2^P\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0}^{P} + x_1^P\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0}^{P} - \int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)x_1\,\mathrm{d}s - \int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)x_2\,\mathrm{d}s\right]$$

- Całki w powyższym wyrażeniu to całki z pewnej pochodnej oraz z pewnej innej funkcji. Możemy je **scałkować przez części**.

WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

$$M = h\left[x_2^P\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P - \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0}\right) + x_1^P\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P - \left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0}\right) - \int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)x_1\,\mathrm{d}s - \int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)x_2\,\mathrm{d}s\right]$$

Całkowanie przez części: $\int_a^b (f'g)\,\mathrm{d}x = [f\,g]_a^b - \int_a^b (f\,g')\,\mathrm{d}x$

pierwsza całka $\int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)x_1\,\mathrm{d}s = \left(x_1^P\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P - x_1^{P_0}\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0}\right) - \int_{P_0}^{P}\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s$

druga całka $\int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)x_2\,\mathrm{d}s = \left(x_2^P\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P - x_2^{P_0}\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0}\right) - \int_{P_0}^{P}\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s$

Po podstawieniu:

$$M = h\left[(x_2^P - x_2^{P_0})\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0} + (x_1^P - x_1^{P_0})\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0} + \int_{P_0}^{P}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s\right]$$

WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

Wyrażenie pod całką to pochodna **zupełna funkcji Airy'ego względem parametru naturalnego**:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{P_0}^{P}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\int_{P_0}^{P}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=F(P)-F(P_0)$$

Mamy zatem:

$$M=h\left[(x_2^P-x_2^{P_0})\left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0}+(x_1^P-x_1^{P_0})\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0}+F(P)-F(P_0)\right]$$

Wspomniano, że **istnieje nieskończenie wiele funkcji Airy'ego, które są rozwiązaniem zagadnienia**. Różnią się one o stałą oraz o dowolne funkcje liniowe względem zmiennych niezależnych, zatem **do każdej funkcji Airy'ego można dodać** wyrażenie $a_0+a_1x_1+a_2x_2$, którego **współczynniki można wybrać dowolnie**, na przykład tak, aby:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_{P_0}=0\ , \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_{P_0}=0\ , \qquad F|_{P_0}=0$$

WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

Mamy wtedy:

$$F(P)=\frac{1}{h}M(P)\,,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P=-\frac{1}{h}Q_2(P)\,,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P=\frac{1}{h}Q_1(P)$$

Wartości brzegowe funkcji Airy'ego i jej pochodnych mogą być określone wyłącznie za pomocą obciążenia brzegowego (jego całki – sił, oraz całki sił – momentów) – w ten sposób **obciążenie zewnętrzne określa warunki brzegowe na funkcję Airy'ego**.

W szczególności rozważanym układem współrzędnych może być układ, którego osie są równoległe do wektora normalnego i stycznego w punkcie P. Wtedy warunki brzegowe można zapisać następująco:

$$F(P)=\frac{1}{h}M(P)\,,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_P=-\frac{1}{h}Q_s(P)\,,\qquad \left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_P=\frac{1}{h}Q_n(P)$$

WARUNKI BRZEGOWE NA FUNKCJĘ AIRY'EGO

UWAGI:

- To drugie sformułowanie niesie ważniejsze wnioski. Warunki brzegowe możemy bowiem określić dla wartości:
    - **funkcji** – **warunki brzegowe typu** Dirichleta**.**
    - **pochodnej kierunkowej** na kierunku normalnej zewnętrznej - **warunki brzegowe typu** Neumanna.

- Rozwiązania równania biharmonicznego dla tak postawionych warunków w niektórych przypadkach są znane.

- Jeśli znamy **rozkład funkcji Airy'ego wzdłuż brzegu** (rozkład **momentów**), to przez zwykłe różniczkowanie możemy wyznaczyć **rozkład jej pochodnej kierunkowej na kierunku stycznym** do brzegu (rozkład **sił prostopadłych do brzegu**). Zatem jeśli tylko jesteśmy w stanie sformułować warunek typu:

$$F(P) = \frac{1}{h} M(P)$$

to warunek

$$\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_P = \frac{1}{h} Q_n(P)$$

jest zbędny (jest zależny – wynika z poprzedniego).

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ