TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

ROZWIĄZANIA FUNDAMENTALNE W UKŁADACH LINIOWYCH

ZASADA SUPERPOZYCJI

Równania liniowej teorii sprężystości stanowią układ równań liniowych (różniczkowych i algebraicznych).

W układach liniowych obowiązuje zasada superpozycji, zgodnie z którą:

Skutek kombinacji przyczyn jest odpowiednią kombinacją skutków od każdej z przyczyn z osobna:

$$\left.\begin{array}{l} L(x_1) = y_1 \\ L(x_2) = y_2 \\ \quad \dots \\ L(x_p) = y_p \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_p y_p$$

x_i - przyczyny – **siły zewnętrzne** (objętościowe i powierzchniowe), **wymuszenia kinematyczne** (niejednorodne składniki równania,warunki brzegowe)

y_i - skutki – **przemieszczenia, odkształcenia, naprężenia**

L - operator liniowy reprezentujący matematyczną strukturę zagadnienia – **równania rządzące**

ZASADA SUPERPOZYCJI

ZAGADNIENIE (1)

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1)} + b_i^{(1)} = 0 \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}\right) \\ \sigma_{ij}^{(1)} = 2G\,\varepsilon_{ij}^{(1)} + \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}^{(1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{ij}^{(1)} n_j = q_i^{(1)} & \text{na} \quad S_q \\ u_i^{(1)} = \hat{u}_i^{(1)} & \text{na} \quad S_u \end{cases}$$

ZAGADNIENIE(2)

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(2)} + b_i^{(2)} = 0 \\ \varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(2)} + u_{j,i}^{(2)}\right) \\ \sigma_{ij}^{(2)} = 2G\,\varepsilon_{ij}^{(2)} + \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}^{(2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{ij}^{(2)} n_j = q_i^{(2)} & \text{na} \quad S_q \\ u_i^{(2)} = \hat{u}_i^{(2)} & \text{na} \quad S_u \end{cases}$$

ZAGADNIENIE (1+2) = ZAGADNIENIE (1) + ZAGADNIENIE (2)

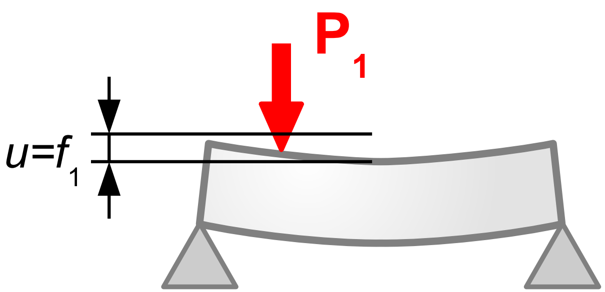
$$\begin{cases} u_i^{(1+2)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \\ \varepsilon_{ij}^{(1+2)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \\ \sigma_{ij}^{(1+2)} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \\ \\ b_i^{(1+2)} = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} \\ \hat{u}_i^{(1+2)} = \hat{u}_i^{(1)} + \hat{u}_i^{(2)} \\ q_i^{(1+2)} = q_i^{(1)} + q_i^{(2)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1+2)} + b_i^{(1+2)} = 0 \\ \varepsilon_{ij}^{(1+2)} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(1+2)} + u_{j,i}^{(1+2)}\right) \\ \sigma_{ij}^{(1+2)} = 2G\,\varepsilon_{ij}^{(1+2)} + \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}^{(1+2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{ij}^{(1+2)} n_j = q_i^{(1+2)} & \text{na} \quad S_q \\ u_i^{(1+2)} = \hat{u}_i^{(1+2)} & \text{na} \quad S_u \end{cases}$$

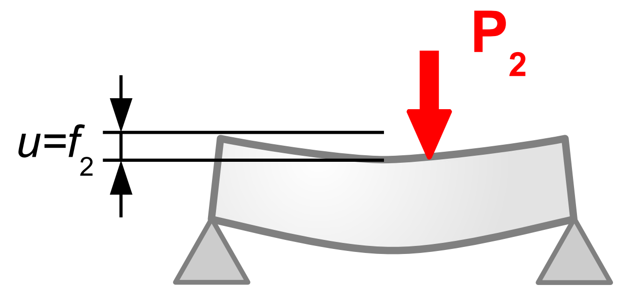
dr inż. Paweł Szeptyński

ZASADA SUPERPOZYCJI

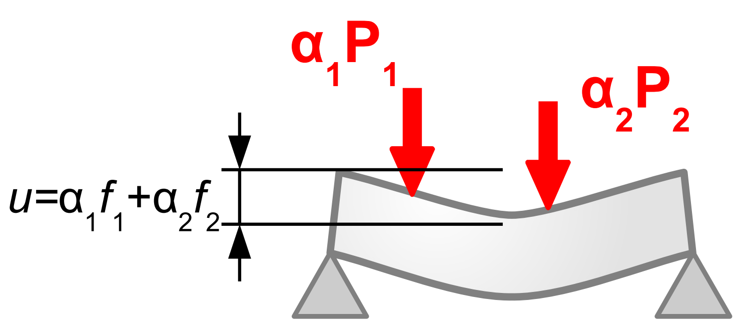
ZAGADNIENIE („1”)

ZAGADNIENIE(„2”)





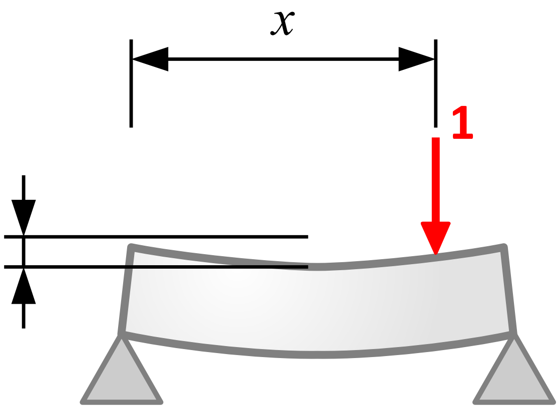
ZAGADNIENIE (α_1 ·„1” + α_2·„2”) = α_1 · ZAGADNIENIE („1”) + α_1 · ZAGADNIENIE („2”)



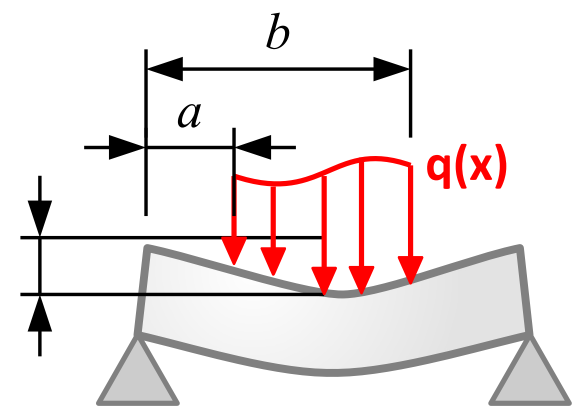
ZASADA SUPERPOZYCJI

W szczególności można rozważać ciągły (**nieskończony** i **nieprzeliczalny**) zbiór przyczyn – skutek takiego zbioru przyczyn będzie dany **sumą nieskończonej i nieprzeliczanej liczby skutków**, czyli ich całką:

$$u = f(x)$$



$$u = \int_a^b q(x) f(x) \, \mathrm{d}x$$



FUNKCJA GREENA

Jeśli zagadnienie dane poprzez pewien liniowy operator różniczkowy L:

$$L[\,u(x)\,]=q(x)$$

to funkcję G będącą **jądrem odwrotnego do niego liniowego operatora całkowego** nazywamy funkcją Greena. Możemy przyjąć, że:

- funkcja Greena **jest rozwiązaniem** zagadnienia różniczkowego, w którym **składnik niejednorodny dany jest** dystrybucją delta Diraca („funkcja impulsowa”):

$$L[G(x,\xi)]=\delta(\xi-x)$$

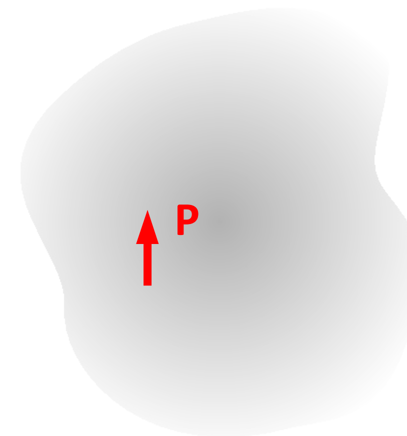
- rozwiązanie zagadnienia o dowolnym składniku niejednorodnym wyznaczyć można wtedy jako splot (całka z iloczynu funkcji – operator całkowy) **składnika niejednorodnego z funkcją Greena** (jądrem tego operatora):

$$u(x)=\int G(x,\xi)\,q(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

ZAGADNIENIE KELVINA

ZAGADNIENIE KELVINA

Przestrzeń sprężysta obciążona siłą skupioną.



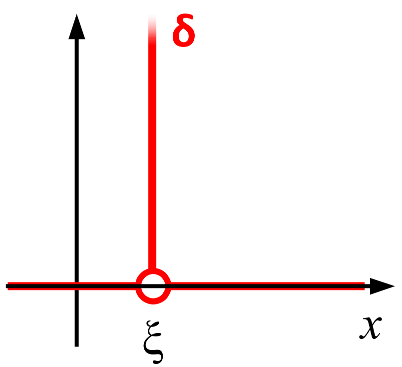
- cała **przestrzeń trójwymiarowa** jest traktowana jako nieskończenie **duże ciało sprężyste**. Można przestrzeń tę interpretować jako otoczenie **punktu wewnątrz ciała**, który jest bardzo **odległy od brzegu**, samo zaś otoczenie jest znacznie mniejsze od całego ciała.

- ciało to wykonane jest z **jednorodnego**, **izotropowego materiału Hooke'a**, scharakteryzowanego stałymi $\lambda,\ G$

- **obciążenie zewnętrzne** stanowi **siła skupiona** modelowana **dystrybucją delta Diraca**:

$$\delta(x,\xi)=\begin{cases}0 & \Leftrightarrow \quad x\neq\xi \\ \infty & \Leftrightarrow \quad x=\xi\end{cases},\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x,\xi)\,\mathrm{d}x=1 \qquad \Rightarrow$$

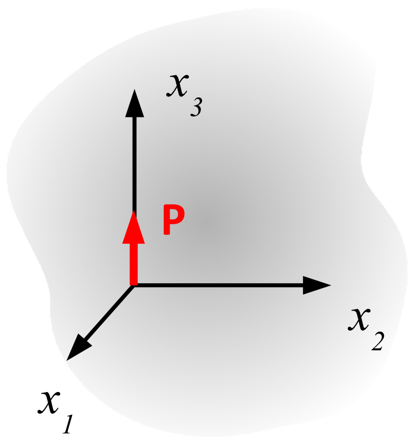
$$\Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x,\xi)\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=f(x)$$



- **warunki brzegowe** określone są w **nieskończoności** – żądamy, aby **przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w nieskończoności dążyły do 0**.

ZAGADNIENIE KELVINA

Przestrzeń sprężysta obciążona siłą skupioną.



- przyjmujemy **układ kartezjański o początku w punkcie przyłożenia siły,** oś x_3 skierowana jest zgodnie z kierunkiem siły skupionej.

- wykorzystamy równania przemieszczeniowe Lamégo:

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)\, u_{k,ik} + b_i = 0$$

- wektor sił masowych:

$$\mathbf{b} = [0\,; 0\,; P\,\delta_{\mathbf{0}}]$$

- warunki brzegowe:

$$\lim_{R\to\infty} u_i = 0, \qquad i = 1,2,3$$

$$\lim_{R\to\infty} u_{i,j} = 0, \qquad i\,,j = 1,2,3 \qquad \text{gdzie} \qquad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ZAGADNIENIE KELVINA

Rozwiążemy zagadnienie poprzez zastosowanie transformacji całkowej Fouriera.

W przypadku funkcji $f(x)$ jednej zmiennej niezależnej **transformacja** zadana jest wzorem:

$$\mathscr{F}\{f(x)\}(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x$$

transformacja odwrotna zaś:

$$\mathscr{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \mathrm{d}x$$

Funkcję $\hat{f}(\omega)$ nazywamy transformatą funkcji $f(x)$, a funkcję $f(x)$ nazywamy oryginałem lub retransformatą funkcji $\hat{f}(\omega)$. Oryginał jest funkcją wyjściowej zmiennej niezależnej x, transformata jest funkcją innej zmiennej niezależnej ω, o odwrotnym wymiarze fizycznym (u nas: 1/m).

UWAGA:

- Kwestią umowy jest czy znak „-” jest w wykładniku w definicji transformacji czy transformacji odwrotnej, jak również sposób uwzględnienia czynnika $(2\pi)^{-1}$ w obu tych definicjach. Stosuje się różne konwencje.

ZAGADNIENIE KELVINA

W **przypadku trójwymiarowym** transformacji dokonać możemy względem każdej ze zmiennych niezależnych, każdorazowo wprowadzając nową zmienną w przestrzeni transformat. Transformacji podlegać będą składowe wektora **przemieszczenia**:

$$\mathscr{F}\left\{u_i\right\} = \hat{u}_i = \int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{x_2=-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{x_3=-\infty}^{\infty} u_i e^{-\mathrm{i}\,\omega_3 x_3}\,\mathrm{d}\,x_3\right]e^{-\mathrm{i}\,\omega_2 x_2}\,\mathrm{d}\,x_2\right]e^{-\mathrm{i}\,\omega_1 x_1}\,\mathrm{d}\,x_1 =$$

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} u_i e^{-\mathrm{i}\left(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3\right)}\,\mathrm{d}\,x_1\,\mathrm{d}\,x_2\,\mathrm{d}\,x_3$$

Transformacja odwrotna:

$$u_i = \mathscr{F}^{-1}\left\{\hat{u}_i\right\} = \frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{u}_i e^{\mathrm{i}\left(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3\right)}\,\mathrm{d}\,\omega_1\,\mathrm{d}\,\omega_2\,\mathrm{d}\,\omega_3$$

ZAGADNIENIE KELVINA

Operator całkowy występujący w definicji transformacji Fouriera jest liniowy, zatem:

$$\mathscr{F}\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\} = \alpha_1 \mathscr{F}\{u_1\} + \alpha_2 \mathscr{F}\{u_2\}$$

Zastosowanie transformacji Fouriera **na** równaniach Lamégo daje nam:

$$\mathscr{F}\{G\nabla^2 u_i + (\lambda+G)u_{k,ik} + b_i\} = G\mathscr{F}\{\nabla^2 u_i\} + (\lambda+G)\mathscr{F}\{u_{k,ik}\} + \mathscr{F}\{b_i\} = 0$$

Musimy wyznaczyć:

- **transformaty sił masowych:** $\mathscr{F}\{b_i\} = ?$
- **transformaty pochodnych przemieszczeń:** $\mathscr{F}\{u_{i,jk}\} = ?$

ZAGADNIENIE KELVINA

Transformaty składowych wektora sił masowych:

$$\mathscr{F}\left\{b_1\right\} = \mathscr{F}\left\{b_2\right\} = \mathscr{F}\left\{0\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot e^{-\mathrm{i}\left(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3\right)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = 0$$

$$\mathscr{F}\left\{b_3\right\} = \mathscr{F}\left\{P\delta_{\mathbf{0}}\right\} = P\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_{\mathbf{0}} e^{-\mathrm{i}\left(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3\right)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = P e^{-\mathrm{i}\left(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3\right)}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = P$$

WNIOSKI:

- Transformata Fouriera **funkcji zerowej** jest **funkcją zerową**
- Transformata Fouriera **dystrybucji Diraca** jest **funkcją jednostkową**

ZAGADNIENIE KELVINA

Transformaty pochodnych przemieszczeń:

Obliczmy przykładowo $\mathscr{F}\{u_{i,12}\}$

$$\mathscr{F}\{u_{i,12}\} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_i}{\partial x_1 \partial x_2} e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

całkujemy przez części względem x_1

$$\mathscr{F}\{u_{i,12}\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_2} e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)} \right]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)} \mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

Zajmijmy się **członem brzegowym** (chętnie byśmy się go pozbyli):

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_2} e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)} \right]_{x_1=-\infty}^{\infty}$$

ZAGADNIENIE KELVINA

Transformaty pochodnych przemieszczeń.

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_2} e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}\right]_{x_1=-\infty}^{\infty}$$

- ze **wzoru Eulera** wynika, że $e^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ gdzie $\phi = -(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)$
- wartości **funkcji trygonometrycznych** zawierają się w przedziale $\langle -1\,;1\rangle$
- z tego wynika, że czynnik $e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}$ **przyjmuje wartości skończone** dla $\phi \to \pm\infty$
- z założonych **warunków brzegowych** wiemy, że $\lim\limits_{R\to\infty} u_{i,j} = 0$
- <u>iloczyn wielkości skończonej oraz 0 daje 0.</u>
- wartość członu brzegowego dla obydwu sytuacji granicznych jest zatem zerowa.
- ostatecznie:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_2} e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}\right]_{x_1=-\infty}^{\infty} = 0$$

ZAGADNIENIE KELVINA

Transformaty pochodnych przemieszczeń.

Mamy zatem:

$$\mathscr{F}\{u_{i,12}\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[-(-\mathrm{i}\,\omega_1)\int\limits_{x_1=-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_i}{\partial x_2}e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}\,\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

$$\mathscr{F}\{u_{i,12}\} = \mathrm{i}\,\omega_1\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u_i}{\partial x_2}e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$$

Ponownie **całkujemy przez części** – tym razem względem zmiennej x_2

Powtarzamy całą procedurę i związane z nią rozważania. W wyniku otrzymujemy:

$$\mathscr{F}\{u_{i,12}\} = (\mathrm{i}\,\omega_1)(\mathrm{i}\,\omega_2)\underbrace{\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}u_i e^{-\mathrm{i}(x_1\omega_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3}_{\mathscr{F}\{u_i\}=\hat{u}_i} = \mathrm{i}^2\omega_1\omega_2\hat{u}_i = -\omega_1\omega_2\hat{u}_i$$

Ogólnie:

$$\boxed{\mathscr{F}\{u_{i,jk}\} = -\omega_j\omega_k\hat{u}_i}$$

ZAGADNIENIE KELVINA

Układ równań przemieszczeniowych Lamégo rządzący zagadnieniem Kelvina:

$$\begin{cases} G\left(u_{1,11}+u_{1,22}+u_{1,33}\right)+(\lambda+G)\left(u_{1,11}+u_{2,21}+u_{3,31}\right)=0 \\ G\left(u_{2,11}+u_{2,22}+u_{2,33}\right)+(\lambda+G)\left(u_{1,12}+u_{2,22}+u_{3,32}\right)=0 \\ G\left(u_{3,11}+u_{3,22}+u_{3,33}\right)+(\lambda+G)\left(u_{1,13}+u_{2,23}+u_{3,33}\right)+P\,\delta_{\mathbf{0}}=0 \end{cases}$$

to liniowy układ równań różniczkowych cząstkowych 2 rzędu.

W przestrzeni **transformat**, układ ten przyjmuje postać:

$$\begin{cases} -G\left(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)\hat{u}_1-\omega_1(\lambda+G)\left(\omega_1\hat{u}_1+\omega_2\hat{u}_2+\omega_3\hat{u}_3\right)=0 \\ -G\left(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)\hat{u}_2-\omega_2(\lambda+G)\left(\omega_1\hat{u}_1+\omega_2\hat{u}_2+\omega_3\hat{u}_3\right)=0 \\ -G\left(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)\hat{u}_3-\omega_3(\lambda+G)\left(\omega_1\hat{u}_1+\omega_2\hat{u}_2+\omega_3\hat{u}_3\right)=-P \end{cases}$$

Jest to liniowy układ równań algebraicznych na transformaty. Spokojnie go rozwiązujemy.

ZAGADNIENIE KELVINA

Rozwiązanie układu liniowego na transformaty:

$$\hat{u}_1 = -\frac{P(\lambda+G)}{G(\lambda+2G)}\frac{\omega_1\omega_3}{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2}$$

$$\hat{u}_2 = -\frac{P(\lambda+G)}{G(\lambda+2G)}\frac{\omega_2\omega_3}{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2}$$

$$\hat{u}_3 = \frac{P}{G}\frac{1}{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2} - \frac{P(\lambda+G)}{G(\lambda+2G)}\frac{\omega_3^2}{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2}$$

- teraz musimy **znaleźć retransformaty**.
- poszukujemy $f_1 = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\right\}$
- jeśli znajdziemy $f_2 = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2}\right\}$ wtedy $f_{2,ij} = \mathscr{F}^{-1}\left\{-\frac{\omega_i\omega_j}{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\right\}$

ZAGADNIENIE KELVINA

Mamy wzór na retransformaty, ale obliczenie odpowiednich całek jest dość trudne. Możemy skorzystać z tablic transformat i retransformat:

	Function	Fourier transform unitary, ordinary frequency	Fourier transform unitary, angular frequency	Fourier transform non-unitary, angular frequency	Remarks
500	$f(\mathbf{x})$	$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\, d\mathbf{x}$	$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}$	$\hat{f}(\boldsymbol{\nu}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\nu}}\, d\mathbf{x}$	
501	$\chi_{[0,1]}(\lvert\mathbf{x}\rvert)\left(1-\lvert\mathbf{x}\rvert^2\right)^{\delta}$	$\frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi^{\delta}\lvert\boldsymbol{\xi}\rvert^{\frac{n}{2}+\delta}} J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi\lvert\boldsymbol{\xi}\rvert)$	$2^{\delta}\frac{\Gamma(\delta+1)}{\lvert\boldsymbol{\omega}\rvert^{\frac{n}{2}+\delta}} J_{\frac{n}{2}+\delta}(\lvert\boldsymbol{\omega}\rvert)$	$\frac{\Gamma(\delta+1)}{\pi^{\delta}}\left\lvert\frac{\boldsymbol{\nu}}{2\pi}\right\rvert^{-\frac{n}{2}-\delta} J_{\frac{n}{2}+\delta}(\lvert\boldsymbol{\nu}\rvert)$	The function $\chi_{[0,1]}$ is the indicator function of the interval $[0, 1]$. The function $\Gamma(x)$ is the gamma function. The function $J_{\frac{n}{2}+\delta}$ is a Bessel function of the first kind, with order $\frac{n}{2}+\delta$. Taking $n=2$ and $\delta=0$ produces 402.[52]
502	$\lvert\mathbf{x}\rvert^{-\alpha}, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < n.$	$\frac{(2\pi)^{\alpha}}{c_{n,\alpha}}\lvert\boldsymbol{\xi}\rvert^{-(n-\alpha)}$	$\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{c_{n,\alpha}}\lvert\boldsymbol{\omega}\rvert^{-(n-\alpha)}$	$\frac{(2\pi)^{n}}{c_{n,\alpha}}\lvert\boldsymbol{\nu}\rvert^{-(n-\alpha)}$	See Riesz potential where the constant is given by $c_{n,\alpha} = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$ The formula also holds for all $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$ by analytic continuation, but then the function and its Fourier transforms need to be understood as suitably regularized tempered distributions. See homogeneous distribution.[remark 6]
503	$\frac{1}{\lvert\boldsymbol{\sigma}\rvert(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{-1}\mathbf{x}}$	$e^{-2\pi^2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}}$	$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}}$	$e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}}$	This is the formula for a multivariate normal distribution normalized to 1 with a mean of 0. Bold variables are vectors or matrices. Following the notation of the aforementioned page, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$ and $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \boldsymbol{\sigma}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^{-1}$
504	$e^{-2\pi\alpha\lvert\mathbf{x}\rvert}$	$\frac{c_n\,\alpha}{\left(\alpha^2+\lvert\boldsymbol{\xi}\rvert^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$	$\frac{c_n(2\pi)^{\frac{n+2}{2}}\alpha}{\left(4\pi^2\alpha^2+\lvert\boldsymbol{\omega}\rvert^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$	$\frac{c_n(2\pi)^{n+1}\alpha}{\left(4\pi^2\alpha^2+\lvert\boldsymbol{\nu}\rvert^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$	Here[53] $c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{[illegible]}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$

$$f_1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3)}}{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

$$f_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3)}}{(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)^2}\, d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3 = -\frac{1}{8\pi}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

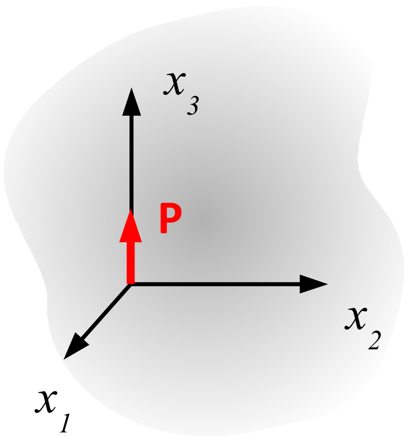
ZAGADNIENIE KELVINA

Ostatecznie, rozwiązanie Kelvina dane jest wzorami:

$$u_1 = \frac{P(\lambda+G)}{8\pi G(\lambda+2G)}\frac{x_1 x_3}{\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2\right]^{3/2}}$$

$$u_2 = \frac{P(\lambda+G)}{8\pi G(\lambda+2G)}\frac{x_2 x_3}{\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2\right]^{3/2}}$$

$$u_3 = \frac{P}{4\pi G}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \frac{P(\lambda+G)}{8\pi G(\lambda+2G)}\frac{x_3^2}{\left[x_1^2+x_2^2+x_3^2\right]^{3/2}}$$

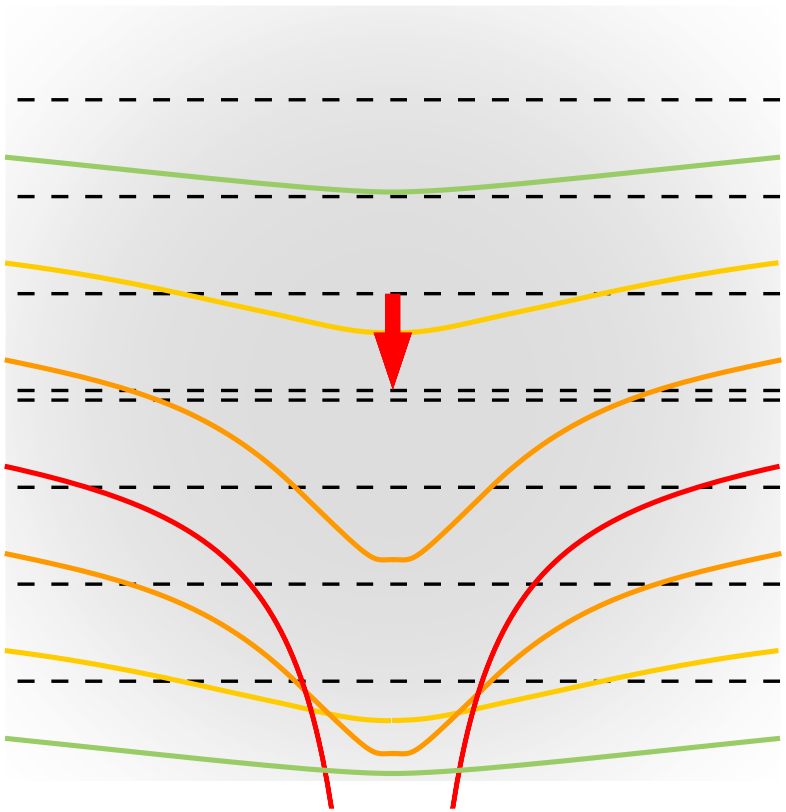


- Rozkład **odkształceń** wyznaczamy na podstawie powyższego rozkładu **przemieszczeń** z wykorzystaniem **związków geometrycznych**.
- Rozkład **naprężeń** wyznaczamy na podstawie wyznaczonego rozkładu **odkształceń** z wykorzystaniem **związków konstytutywnych**.

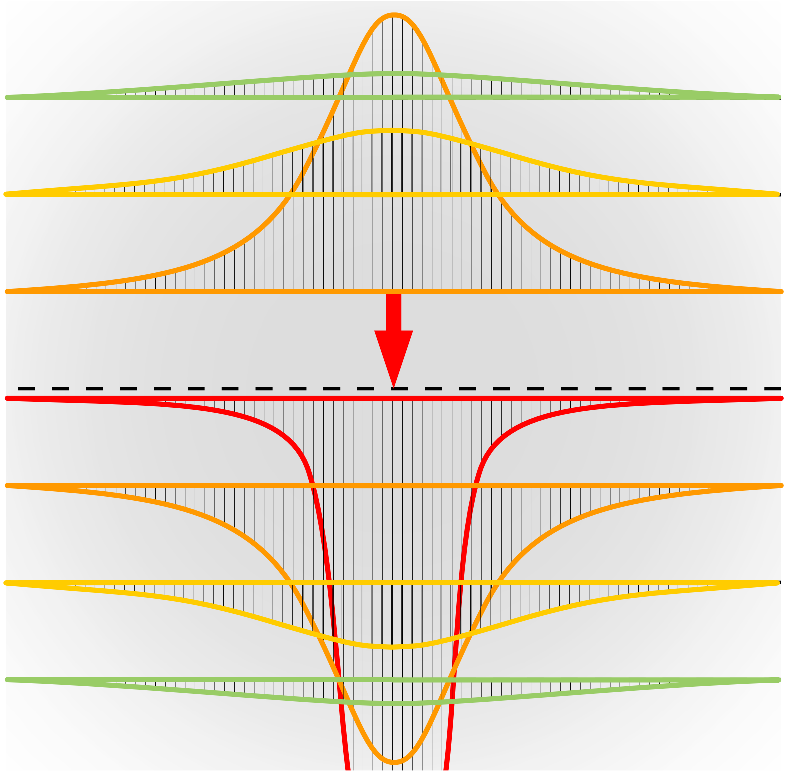
dr inż. Paweł Szeptyński

ZAGADNIENIE KELVINA

Rozwiązanie Kelvina ma w punkcie przyłożenia siły skupionej osobliwość, tj. wartości funkcji rozkładu **przemieszczeń**, **odkształceń** i **naprężeń** dążą w tym punkcie do **nieskończoności**:



rozkład przemieszczeń u_3



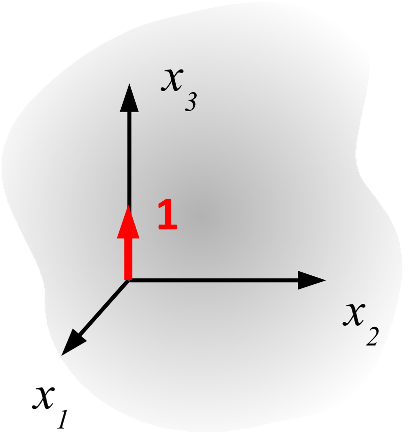
rozkład naprężeń σ_{33}

ZAGADNIENIE KELVINA

Rozwiązanie Kelvina może być traktowane jako **funkcja Greena** dla wszelkich zagadnień przestrzeni sprężystej obciążonej dowolnym układem zewnętrznych sił objętościowych (o ustalonym kierunku):

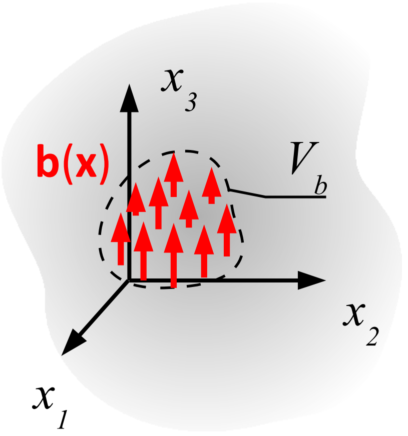
Rozwiązanie Kelvina (**funkcja Greena**):

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{4\pi G}\left[\frac{1}{\left[(x_n-\xi_n)(x_n-\xi_n)\right]^{1/2}}\delta_{i3} + \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{(x_i-\xi_i)(x_3-\xi_3)}{\left[(x_n-\xi_n)(x_n-\xi_n)\right]^{3/2}}\right]$$



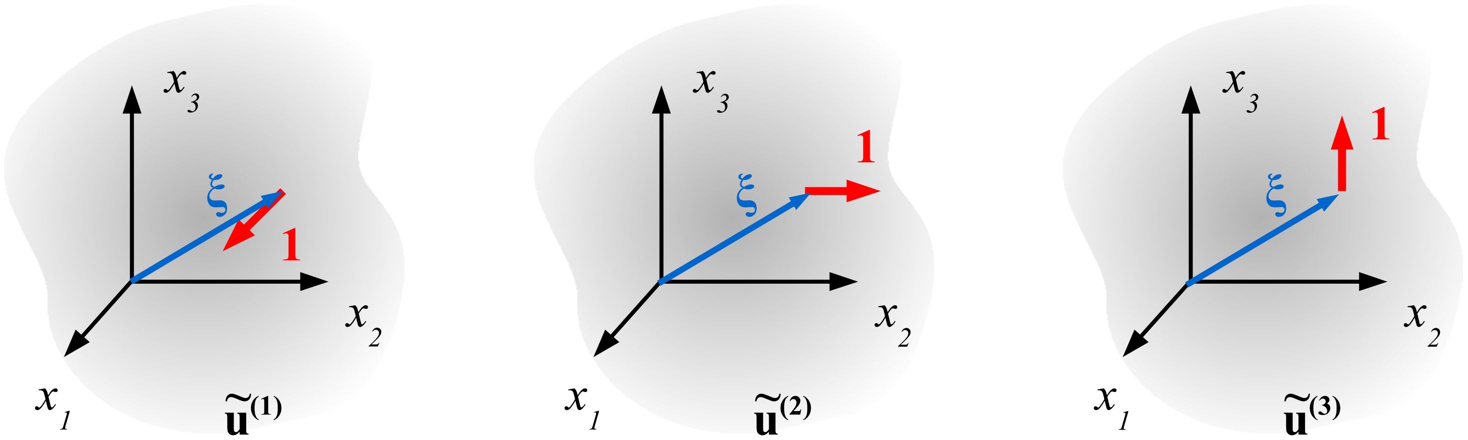
Całka funkcji Greena: $$\mathbf{u} = \int \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\, q(\boldsymbol{\xi})\right] d\boldsymbol{\xi}$$

$$u_i(\mathbf{x}) = \iiint_{V_b} \left[\tilde{u}_i(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\, b_3(\boldsymbol{\xi})\right] d\boldsymbol{\xi}$$



ZAGADNIENIE KELVINA

- Dla pola sił masowych o różnej orientacji dzielimy pole na 3 pola, z których każde ma niezerowe jedynie składowe równoległe do jednej z osi układu współrzędnych.
- Całkujemy je osobno i dodajemy do siebie zgodnie z **zasadą superpozycji**.



$$\tilde{u}_i^{(k)} = \frac{1}{4\pi G}\left[\frac{1}{\left[(x_n-\xi_n)(x_n-\xi_n)\right]^{1/2}}\delta_{ik} + \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k)}{\left[(x_n-\xi_n)(x_n-\xi_n)\right]^{3/2}}\right]$$

ZAGADNIENIE KELVINA

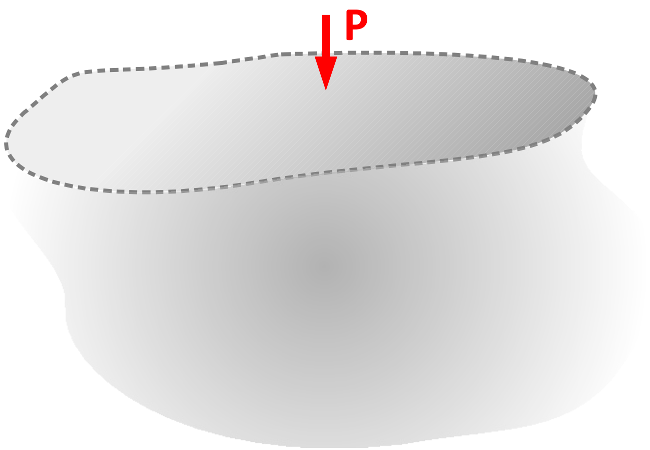
UWAGI:

- **Rozwiązanie Kelvina** może być traktowane jako funkcja Greena dla wszelkich zagadnień przestrzeni sprężystej obciążonej dowolnym układem zewnętrznych sił objętościowych. W takim przypadku **całkowanie rozwiązania Kelvina jako funkcji Greena usuwa osobliwość**.
    - Rozwiązanie zagadnienia z obciążeniem punktowym (dystrybucja Diraca) ma osobliwość.
    - Rozwiązanie zagadnienia z obciążeniem ciągłym nie ma osobliwości.
- Z tego powodu nazywa się je rozwiązaniem fundamentalnym liniowej teorii sprężystości.
- Elementy rozwiązania Kelvina występują w tzw. wzorze Somigliany, który znajduje zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień dotyczących **ciał o skończonych wymiarach** i **dowolnych kształtach**.
- Wzór Somigliany stanowi też podstawę numerycznej metody rozwiązywania zagadnień liniowej teorii sprężystości nazywanej metodą elementów brzegowych.

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Półprzestrzeń sprężysta obciążona siłą skupioną.



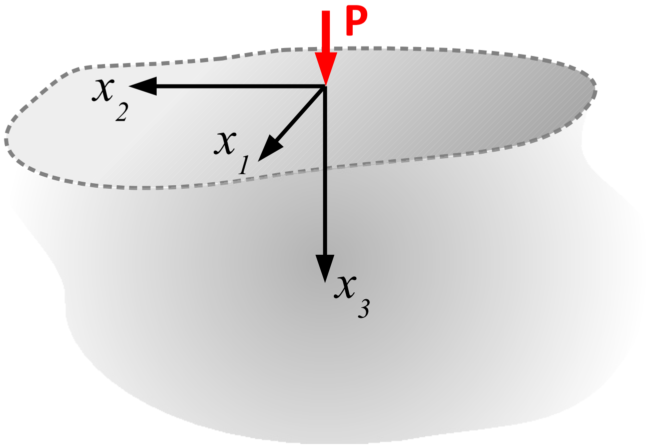
- cała **półprzestrzeń trójwymiarowa** jest traktowana jako nieskończenie **duże ciało sprężyste**. Można półprzestrzeń tę interpretować to jako najbliższe otoczenie **punktu na powierzchni ciała**, znacznie mniejsze od wymiarów całego ciała.

- ciało to wykonane jest z **jednorodnego**, **izotropowego materiału Hooke'a**., scharakteryzowanego stałymi λ, G

- **obciążenie zewnętrzne** stanowi **siła skupiona** modelowana **dystrybucją delta Diraca**.

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Półprzestrzeń sprężysta obciążona siłą skupioną.



- przyjmujemy **układ kartezjański o początku w punkcie przyłożenia siły**, oś x_3 skierowana jest zgodnie z kierunkiem siły skupionej, do wnętrza półprzestrzeni.

- wykorzystamy równania przemieszczeniowe Lamégo:

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G) u_{k,ik} + b_i = 0$$

- wektor zewnętrznych sił objętościowych:

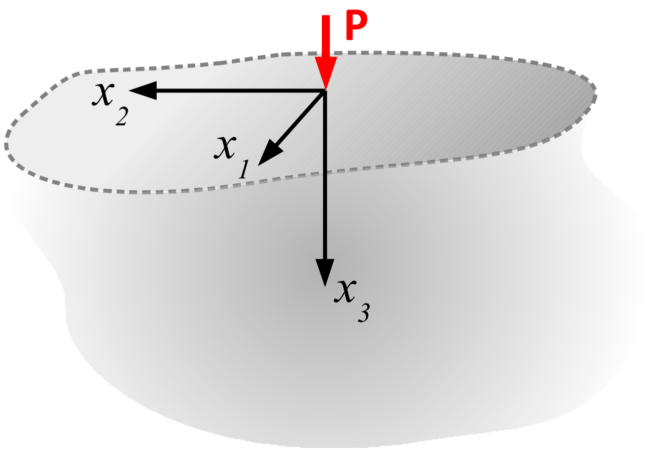
$$\mathbf{b} = [0;0;0]$$

- wektor zewnętrznych sił powierzchniowych:

$$\mathbf{q} = [0;0;P\delta_\mathbf{0}]$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Półprzestrzeń sprężysta obciążona siłą skupioną.



- statyczne warunki brzegowe:

  płaszczyzna: $x_3 = 0$ normalna zewnętrzna: $\mathbf{n} = [0\,;0\,;-1]$

  - w **punkcie przyłożenia siły:** $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

  $$\sigma_{ij} n_j = q_i \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{33} = -P\,\delta_{0,} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

  - poza punktem przyłożenia siły: $x_3 = 0, \quad x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0$

  $$\sigma_{ij} n_j = q_i \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

- kinematyczne warunki brzegowe:

$$\lim_{R\to\infty} u_i = 0, \quad \lim_{R\to\infty} u_{i,j} = 0, \qquad i,j = 1,2,3 \qquad \text{gdzie} \qquad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Będziemy poszukiwać rozwiązania w postaci kombinacji **potencjałów**.

Rozważmy potencjały Boussinesqa A i B:

- **POTENCJAŁ A**:

  pole **przemieszczenia**: $u_i^A = \frac{1}{2G}\phi_{,i}$ gdzie $\nabla^2\phi = 0$

  pole **odkształcenia**: $\varepsilon_{ij}^A = \frac{1}{2G}\phi_{,ij}$

  pole **naprężenia**: $\sigma_{ij}^A = \phi_{,ij}$

- **POTENCJAŁ B**:

  pole **przemieszczenia**: $u_i^B = \frac{1}{2G}\left[\psi_{,i}x_3 - (3-4\nu)\psi\delta_{i3}\right]$ gdzie $\nabla^2\psi = 0$

  pole **odkształcenia**: $\varepsilon_{ij}^B = \frac{1}{2G}\left[\psi_{,ij}x_3 - (1-2\nu)\left(\psi_{,j}\delta_{i3} + \psi_{,i}\delta_{j3}\right)\right]$

  pole **naprężenia**: $\sigma_{ij}^B = \psi_{,ij}x_3 - (1-2\nu)\left(\psi_{,j}\delta_{i3} + \psi_{,i}\delta_{j3}\right) - 2\nu\psi_{,3}\delta_{ij}$

Postulujemy rozwiązanie w postaci: $$\boxed{u_i(\mathbf{x}) = A\,u_i^A(\mathbf{x}) + B\,u_i^B(\mathbf{x})}$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Postulujemy rozwiązanie w postaci:

$$u_i(\mathbf{x}) = A\, u_i^A(\mathbf{x}) + B\, u_i^B(\mathbf{x})$$

UWAGI:

- Musimy teraz znaleźć takie **funkcje harmoniczne** (spełniające równanie Laplace'a) $\phi(\mathbf{x})$ oraz $\psi(\mathbf{x})$ oraz takie **stałe** A i B, aby spełnione były wszystkie **warunki brzegowe**.
- Nie mamy pewności, czy rzeczywiste rozwiązanie faktycznie da się przedstawić w takiej postaci. Nie można odrzucić możliwości, że nawet jeśli znajdziemy takie rozwiązanie, to **mogą istnieć rozwiązania ogólniejsze**, które również są rozwiązaniami tego zagadnienia.
- Dodatkowym założeniem, jakie uczynimy, jest założenie, że funkcje $\phi(\mathbf{x})$ oraz $\psi(\mathbf{x})$ wiąże zależność:

$$\psi = \phi_{,3}$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Wobec wszystkich powyższych założeń, stan naprężenia można wyrazić następująco:

$$\sigma_{13} = A\phi_{,13} + B\left(\phi_{,331}x_3 - (1-2\nu)\phi_{,13}\right)$$

$$\sigma_{23} = A\phi_{,23} + B\left(\phi_{,332}x_3 - (1-2\nu)\phi_{,23}\right)$$

$$\sigma_{33} = A\phi_{,33} + B\left(\phi_{,333}x_3 - 2(1-\nu)\phi_{,33}\right)$$

Stałe A i B wybieramy w taki sposób, aby w każdym punkcie na płaszczyźnie $x_3 = 0$ naprężenia:

$$\begin{cases} \sigma_{13}(x_3=0) = A\phi_{13} - B(1-2\nu)\phi_{13} = 0 \\ \sigma_{23}(x_3=0) = A\phi_{,23} - B(1-2\nu)\phi_{,23} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} A = (1-2\nu) \\ B = 1 \end{cases}}$$

Wtedy:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_{13} &= \phi_{,331}x_3 \\ \sigma_{23} &= \phi_{,332}x_3 \\ \sigma_{33} &= \phi_{,333}x_3 - \phi_{,33} \end{aligned}}$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Spełnione są warunki brzegowe dla naprężeń stycznych. Musimy teraz **tak dobrać funkcję harmoniczną** $\phi(\mathbf{x})$, aby spełnione były **warunki brzegowe dla naprężeń normalnych**, tj.

na płaszczyźnie $x_3=0$:
$$\sigma_{33}(x_3=0) = -\phi_{,33} = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad x_1\neq 0,\, x_2\neq 0 \\ -P\delta & \Leftrightarrow \quad x_1=x_2=0 \end{cases}$$

Warunki powyższe stanowią warunki brzegowe dla równania Laplace'a, które musi spełniać potencjał:

$$\boxed{\nabla^2\phi = \phi_{,11}+\phi_{,22}+\phi_{,33}=0}$$

Możemy zastosować transformację Fouriera **względem zmiennych** $x_1,\ x_2$

$$\mathscr{F}\{\phi_{,11}\} = -\omega_1^2\hat{\phi}$$
$$\mathscr{F}\{\phi_{22}\} = -\omega_2^2\hat{\phi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathscr{F}\{\nabla^2\phi\} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\hat{\phi} - (\omega_1^2+\omega_2^2)\hat{\phi} = 0}$$
$$\mathscr{F}\{\phi_{33}\} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\hat{\phi}$$

przy czym
$$\phi=\phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$$
$$\hat{\phi}=\hat{\phi}(\omega_1,\ \omega_2,\ x_3)$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Otrzymane równanie jest równaniem różniczkowym zwyczajnym z uwagi na zmienną x_3 - jest przy tym równaniem **liniowym 2-go rzędu** ze **stałymi współczynnikami**

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\hat{\phi} - (\omega_1^2+\omega_2^2)\hat{\phi} = 0$$

Rozwiązanie jest następujące:

$$\boxed{\hat{\phi}(\omega_1, \omega_2, x_3) = C_1 e^{(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3} + C_2 e^{-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3}}$$

Stałe całkowania dobieramy w taki sposób, aby spełnione były **warunki brzegowe**:

- jednym z warunków jest, aby $\lim\limits_{R\to\infty} u_i = 0$, w szczególności zaś $\lim\limits_{x_3\to\infty} u_3 = 0$,

$$u_3 = \frac{1-2\nu}{2G}\phi_{,3} = \frac{1-2\nu}{2G}\left[C_1(\omega_1^2+\omega_2^2)e^{(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3} - C_2(\omega_1^2+\omega_2^2)e^{-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3}\right] = 0$$

- jest to możliwe tylko dla $C_1 = 0$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Drugą stałą całkowania wyznaczymy ze s**tatycznego warunku brzegowego w punkcie przyłożenia siły skupionej**:

$$\sigma_{33}\big|_{x_3=0} = -\phi_{,33}\big|_{x_3=0} = -P\,\delta_{\mathbf{0}}$$

W **przestrzeni transformat** (względem zmiennych x_1, x_2)

$$\mathscr{F}\left\{\phi_{,33}\big|_{x_3=0}\right\} = P\,\mathscr{F}\left\{\delta_{\mathbf{0}}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \left.\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x_3^2}\right|_{x_3=0} = P$$

$$\left.\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x_3^2}\right|_{x_3=0} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left[C_2 e^{-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3}\right]\Bigg|_{x_3=0} = C_2(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 e^{-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3}\Big|_{x_3=0} = C_2(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 = P$$

$$\boxed{C_2 = \frac{P}{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2}}$$

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Transformata potencjału:

$$\hat{\phi} = \frac{P}{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2} e^{-(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3}$$

Musimy znaleźć **retransformatę**:

$$\phi = \frac{P}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\omega_1^2+\omega_2^2)x_3} \cdot e^{\mathrm{i}(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2)}}{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2} \mathrm{d}\,\omega_1 \mathrm{d}\,\omega_2$$

Ponownie, warto skorzystać z tablic oryginałów i transformat. **Oryginał** potencjału jest równy:

$$\phi = -\frac{P}{2\pi} \ln\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+x_3\right)$$

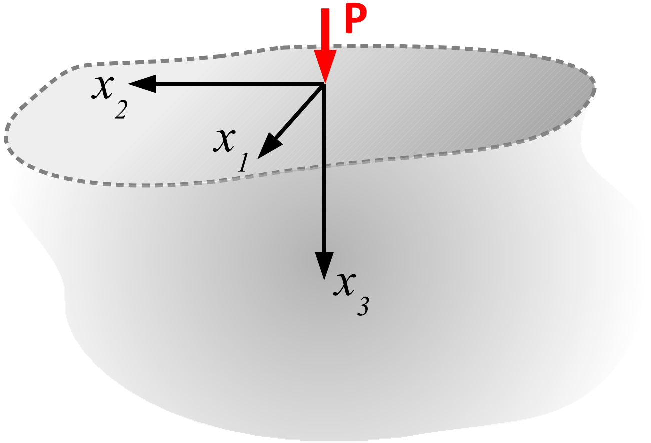
ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Rozkład **przemieszczeń** dany rozwiązaniem Boussinesqa:

$$u_1 = \frac{P\,x_1}{4\pi G}\left[\frac{x_3}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+x_3)}\right]$$

$$u_2 = \frac{P\,x_2}{4\pi G}\left[\frac{x_3}{R^3} - \frac{1-2\nu}{R(R+x_3)}\right]$$

$$u_3 = \frac{P}{4\pi G}\left[\frac{x_3^2}{R^3} + (3-4\nu)\frac{1}{R} - \frac{1-2\nu}{R+x_3}\left(\frac{x_3}{R}+1\right)\right]$$



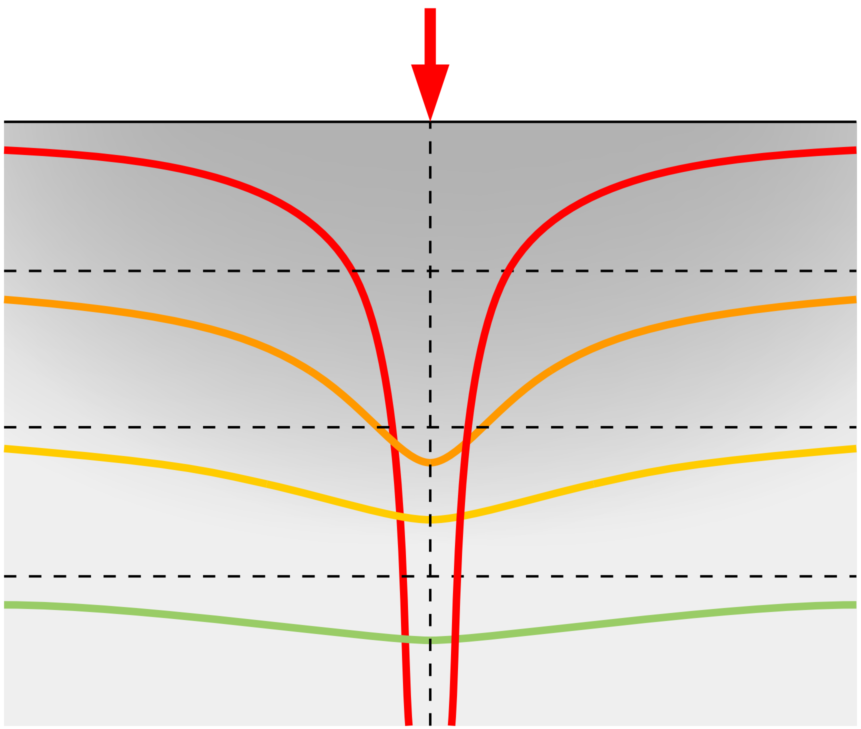
Ogólnie: $$u_i = \frac{1}{4\pi G}\left[\frac{x_3 x_i}{R^3} + (3-4\nu)\frac{\delta_{i3}}{R} - \frac{1-2\nu}{R+x_3}\left(\frac{x_i}{R}+\delta_{i3}\right)\right]$$

Odkształcenia wyznaczamy ze związków geometrycznych, a naprężenia ze związków konstytutywnych.

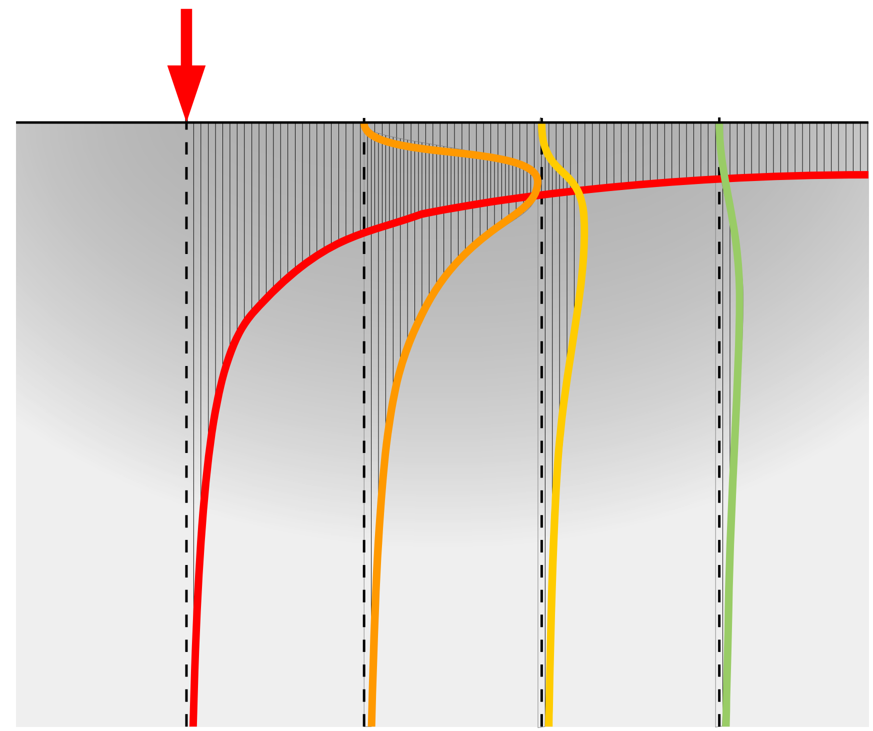
dr inż. Paweł Szeptyński

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Rozwiązanie Boussinesqa ma w punkcie przyłożenia siły skupionej osobliwość, tj. wartości funkcji rozkładu **przemieszczeń**, **odkształceń** i **naprężeń** dążą w tym punkcie do **nieskończoności**:



rozkład przemieszczeń u_3



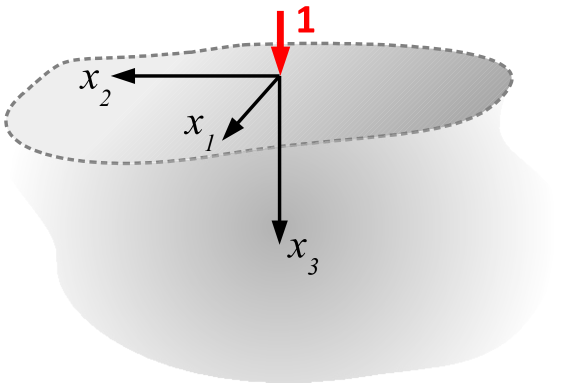
rozkład naprężeń σ_{33}

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

Rozwiązanie Boussinesqa może być wykorzystane jako funkcja Greena, do wyznaczania przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w **półprzestrzeni sprężystej obciążonej dowolnym ciągłym układem obciążenia** prostopadłego do płaszczyzny $x_3 = 0$. Dla obciążeń **ciągłych** i **ograniczonych** – **brak osobliwości**.

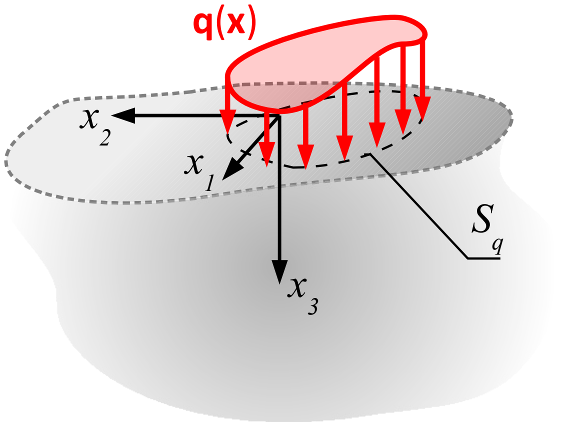
Rozwiązanie Boussinesqa (**funkcja Greena**):

$$\tilde{u}_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi G}\left[\frac{x_3 x_i}{R^3} + (3-4\nu)\frac{\delta_{i3}}{R} - \frac{1-2\nu}{R+x_3}\left(\frac{x_i}{R}+\delta_{i3}\right)\right]$$



Całka funkcji Greena: $\mathbf{u} = \int \left[\mathbf{G}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\, q(\boldsymbol{\xi})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$

$$u_i = \iint\limits_{S_q} \left[\tilde{u}_i(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3)\, q(\xi_1, \xi_2)\right] \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2$$

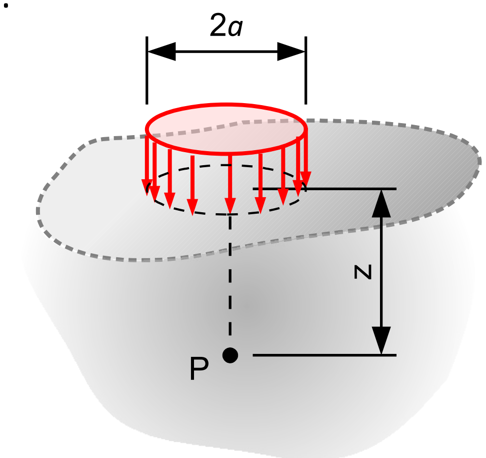


dr inż. Paweł Szeptyński

ZAGADNIENIE BOUSSINESQA

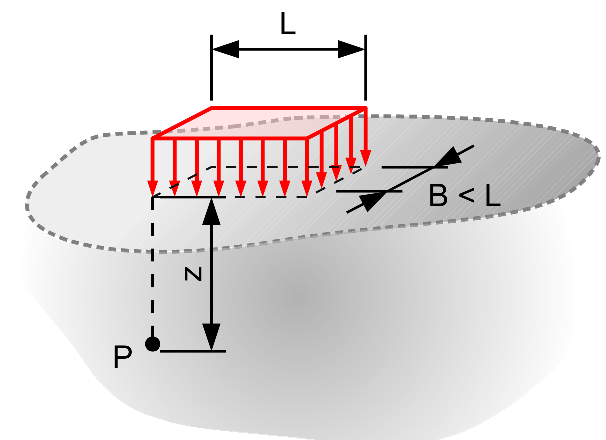
Rozkład naprężeń **pod środkiem obszaru kołowego** obciążonego równomiernie:

$$\sigma_{zz}(z) = q\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{a}{z}\right)^2\right)^{3/2}} - 1\right]$$



Rozkład naprężeń **pod narożem obszaru prostokątnego** obciążonego równomiernie:

$$\sigma_{zz} = \frac{q}{4\pi}\left[\frac{2\frac{BL}{z^2}\sqrt{\left(\frac{B}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)^2+1}}{\left(\frac{B}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)^2+\left(\frac{BL}{z^2}\right)^2+1}\cdot\frac{\left(\frac{B}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)^2+2}{\left(\frac{B}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)^2+1} + \operatorname{arctg}\left(\frac{2\frac{BL}{z^2}\sqrt{\left(\frac{B}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)^2+1}}{\left(\frac{B}{z}\right)^2+\left(\frac{L}{z}\right)^2-\left(\frac{BL}{z^2}\right)^2+1}\right)\right]$$



Rozwiązanie Boussinesqa znajduje zastosowanie w **mechanice gruntów**.
Wykorzystywane jest również w **normach**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ