TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

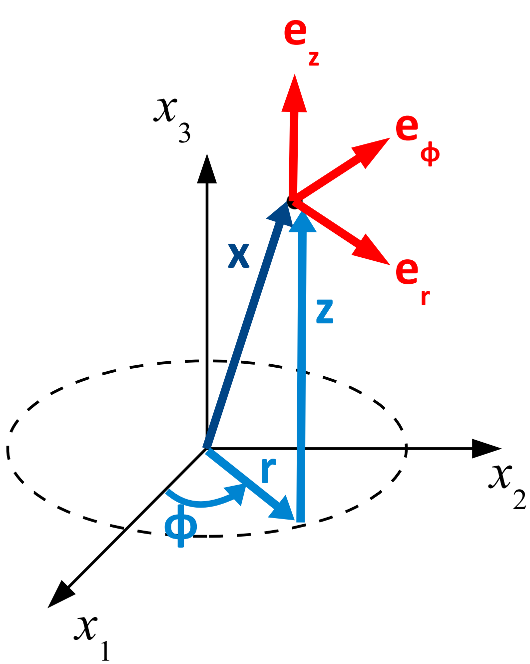
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Niektóre **zagadnienia teorii sprężystości charakteryzują się symetrią**, która znacznie **upraszcza zarówno sformułowanie zagadnienia, jak i jego rozwiązanie**.

Szczególnym przypadkiem symetrii jest symetria osiowa. Uwzględnienie cech symetrii osiowej staje się proste, jeśli zagadnienie sformułowane jest w układzie współrzędnych walcowych.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \phi = \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} \\ z = x_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = r\cos\phi \\ x_2 = r\sin\phi \\ x_3 = z \end{cases}$$



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

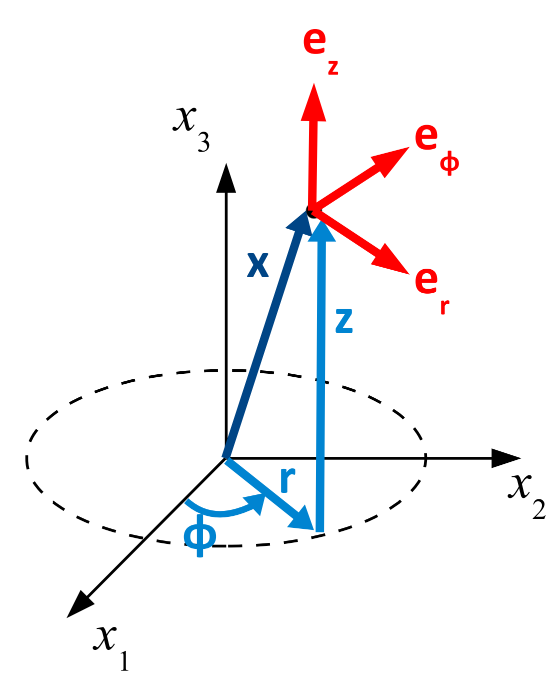
PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Układ współrzędnych walcowych jest przykładem układu współrzędnych krzywoliniowych. W układach takich równania rządzące zagadnieniami teorii sprężystości mają odmienną postać – wynika to z faktu, że:

- **Wielkości tensorowe** w każdym punkcie przestrzeni **określone są poprzez odniesienie do tzw.** bazy lokalnej – **wektorów stycznych w danym punkcie do linii współrzędnych** krzywoliniowych. **W każdym punkcie baza lokalna jest inna**.

- Różniczkowanie tensorów wymaga **uwzględnienia** zarówno **zmienności składowych** tensorów, jak i **zmienności bazy lokalnej**.

- **Wektory bazy lokalnej zmieniają swoją długość – nie są stale unormowane**. W konsekwencji wielkość składowych tensorów traci interpretację fizyczną, ponieważ jest zaburzona niejednostkową długością wektora bazowego. Konieczne jest wprowadzenie tzw. składowych fizycznych, **które kompensują zmianę długości wektorów bazowych**. To również modyfikuje postać równań rządzących zagadnieniem.



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Równania rządzące zagadnieniem liniowej teorii sprężystości w **układzie współrzędnych walcowych**:

Równania równowagi:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\phi,\phi} + \sigma_{zr,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} + b_r = 0$$

$$\sigma_{r\phi,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\phi\phi,\phi} + \sigma_{\phi z,z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\phi} + b_\phi = 0$$

$$\sigma_{zr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\phi z,\phi} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r}\sigma_{zr} + b_z = 0$$

Związki geometryczne:

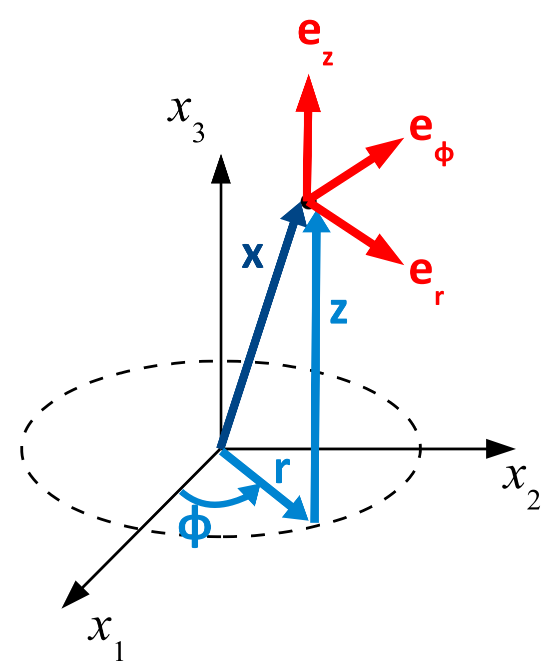
$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} \qquad \varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{2}\left(u_{\phi,z} + \frac{1}{r}u_{z,\phi}\right)$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\left(u_r + u_{\phi,\phi}\right) \qquad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(u_{z,r} + u_{r,z}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = u_{z,z} \qquad \varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_{r,\phi} + u_{\phi,r} - \frac{u_\phi}{r}\right)$$

Związki konstytutywne:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \qquad i,j = r,\phi,z$$



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Jeśli **wszystkie funkcje niewiadome w zagadnieniu nie zależą od kąta ϕ**, wtedy zagadnienie nazywamy zagadnieniem osiowosymetrycznym:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0}$$

O zagadnieniach **osiowosymetrycznych** zakładać będziemy również, że składowa

$$\boxed{u_\phi = 0}$$

Założenie to, pociąga za sobą: $\sigma_{r\phi} = 0, \quad \varepsilon_{r\phi} = 0$

Zagadnienia, w których spełniony jest pierwszy warunek, dla w których $u_\phi \neq 0$ nazywać będziemy zagadnieniami quasi-osiowosymetrycznymi.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Równanie rządzące płaskimi zagadnieniami osiowosymetrycznymi:

Równanie równowagi:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) = 0$$

Związki geometryczne:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}\,, \qquad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}\,, \qquad \varepsilon_{r\phi} = 0$$

Związki kinematyczne:

$$\sigma_{rr} = (2G+\lambda)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\phi\phi} = (2G+\lambda)u_{r,r} + \lambda\frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = (2G+\lambda)\varepsilon_{\phi\phi} + \lambda\varepsilon_{rr} = (2G+\lambda)\frac{u_r}{r} + \lambda u_{r,r}$$

$$\sigma_{r\phi} = 0$$

Warunki nierozdzielności odkształceń:

$$-\frac{1}{r}\varepsilon_{rr,r} + \varepsilon_{\phi\phi,rr} + \frac{2}{r}\varepsilon_{\phi\phi,r} = 0$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Równania przemieszczeniowe dla **płaskich zagadnień osiowo-symetrycznych.**

Do równań równowagi podstawiamy związki konstytutywne:

$$\left[(2G+\lambda)u_{r,r}+\lambda\frac{u_r}{r}\right]_{,r}+\frac{1}{r}\left[(2G+\lambda)u_{r,r}+\lambda\frac{u_r}{r}-(2G+\lambda)\frac{u_r}{r}-\lambda u_{r,r}\right]=0$$

Po przekształceniach:

$$\left[(2G+\lambda)u_{r,rr}+\lambda\left(\frac{u_{r,r}}{r}-\frac{u_r}{r^2}\right)\right]+\frac{2G}{r}\left(u_{r,r}-\frac{u_r}{r}\right)=0$$

co jest spełnione, gdy:

$$\boxed{u_{r,rr}+\frac{u_{r,r}}{r}-\frac{u_r}{r^2}=0}$$

Otrzymane równanie jest **równaniem różniczkowym zwyczajnym**. Równanie tego typu nazywa się równaniem Eulera. Jego **rozwiązanie jest znane**:

$$\boxed{u_r(r)=C_1 r+\frac{C_2}{r}}$$

Stałe całkowania wyznacza się z **warunków brzegowych**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Zagadnienia płaskie (niekoniecznie osiowo-symetryczne) w **układzie współrzędnych biegunowych** można również rozwiązywać za pomocą funkcji Airy'ego.

Równanie biharmoniczne **we współrzędnych biegunowych** przyjmuje postać:

$$\nabla^4 F = F_{,rrrr} + \frac{2}{r^2} F_{,rr\phi\phi} + \frac{1}{r^4} F_{,\phi\phi\phi\phi} + \frac{2}{r} F_{,rrr} - \frac{2}{r^3} F_{,r\phi\phi} - \frac{1}{r^2} F_{,rr} + \frac{4}{r^4} F_{,\phi\phi} + \frac{1}{r^3} F_{,r} = 0$$

Związki między funkcją Airy'ego a **składowymi tensora naprężenia** są następujące:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}\,, \qquad \sigma_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\,, \qquad \sigma_{r\phi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \phi}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Istnieje wzór na rozwiązanie ogólne równania biharmonicznego we współrzędnych biegunowych – rozwiązanie Michella jest następujące:

$$\begin{aligned}
F(r,\phi) &= A_{01} r^2 + A_{02} r^2 \ln r + A_{03} \ln r + A_{04}\phi + \\
&+ \left(A_{11} r^3 + A_{12} r \ln r + A_{14} r^{-1}\right)\cos\phi + A_{13} r \phi \sin\phi \\
&+ \left(B_{11} r^3 + B_{12} r \ln r + B_{14} r^{-1}\right)\sin\phi + B_{13} r \phi \cos\phi \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(A_{n1} r^{n+2} + A_{n2} r^{-n+2} + A_{n3} r^{n} + A_{n4} r^{-n}\right)\cos(n\phi)\right] \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(B_{n1} r^{n+2} + B_{n2} r^{-n+2} + B_{n3} r^{n} + B_{n4} r^{-n}\right)\sin(n\phi)\right]
\end{aligned}$$

Niewiadome współczynniki tego rozwiązania wyznacza się na podstawie **warunków brzegowych**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Dla **płaskich zagadnień osiowo-symetrycznych** równanie biharmoniczne ma prostszą postać:

$$\boxed{\nabla^4 F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial F}{\partial r}\right]\right]\right] = 0}$$

Jego rozwiązanie można znaleźć na drodze bezpośredniego całkowania:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial F}{\partial r}\right]\right]\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial F}{\partial r}\right]\right] = C_1$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial F}{\partial r}\right]\right] = \frac{C_1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial F}{\partial r}\right] = C_1\ln r + C_2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial F}{\partial r}\right] = C_1 r\ln r + C_2 r \quad \Rightarrow \quad r\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{C_1}{4}r^2(2\ln r - 1) + \frac{C_2}{2}r^2 + C_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{C_1}{4}r(2\ln r - 1) + \frac{C_2}{2}r + \frac{C_3}{r} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{C_1}{4}r^2(\ln r - 1) + \frac{C_2}{4}r^2 + C_3\ln r + C_4$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁASKIE ZAGADNIENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Ostatecznie, rozwiązanie **równania biharmonicznego** dla **płaskich zagadnień osiowo-symetrycznych** ma postać:

$$F(r) = A_{00} + A_{01} r^2 + A_{02} r^2 \ln r + A_{03} \ln r$$

Składowe **stanu naprężenia**:

$$\sigma_{rr} = 2A_{01} + A_{02}(2\ln r + 1) + \frac{A_{03}}{r^2}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 2A_{01} + A_{02}(2\ln r + 3) - \frac{A_{03}}{r^2}$$

$$\sigma_{r\phi} = 0$$

Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków brzegowych**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

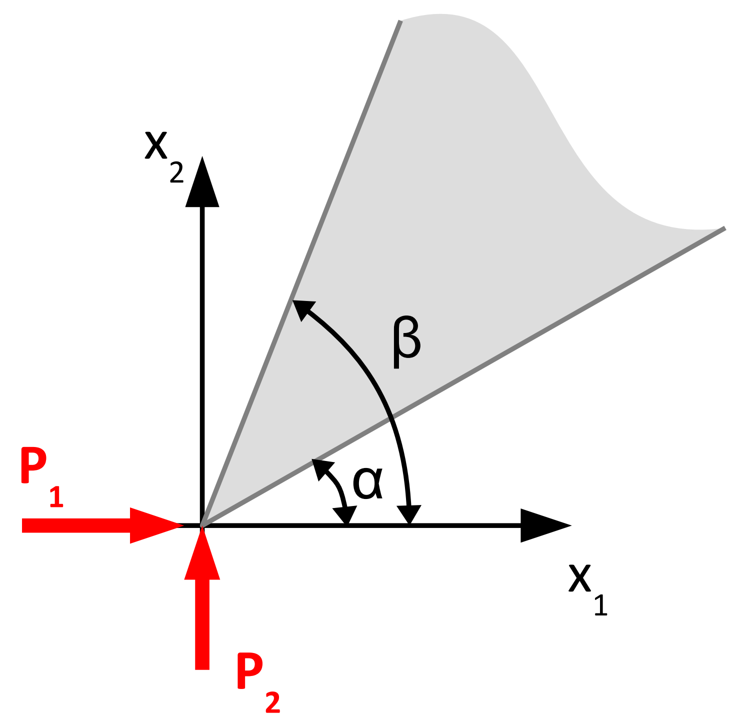
W szerszym sensie zagadnieniem Flamanta nazywamy **zagadnienie płaskiego klina sprężystego obciążonego na końcu siłą skupioną** – w węższym sensie zagadnienie Flamanta określa **problem półpłaszczyzny sprężystej** (klin o kącie rozwarcia 180°) **obciążonej siłą skupioną**.

Zagadnienie klina sprężystego

Dany jest **nieskończenie długi klin** o kącie rozwarcia (β-α), wykonany **z materiału liniowo-sprężystego** (materiału Hooke'a) scharakteryzowanego stałymi G, λ (odpowiednimi dla PSN lub PSO), oraz obciążony w wierzchołku siłą skupioną $\mathbf{P}$.

Przyjmujemy **układ współrzędnych**, którego **początek** znajduje się **w wierzchołku klina**. Spodnia powierzchnia klina nachylona jest do osi przyjętego układu pod kątem α. Wtedy:

$$\mathbf{P} = [P_1 ; P_2]$$



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Wprowadzamy **układ współrzędnych biegunowych**:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \phi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = r\cos\phi \\ x_2 = r\sin\phi \end{cases}$$

Równania równowagi:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\phi,\phi} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}) = 0$$

$$\sigma_{r\phi,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\phi\phi,\phi} + \frac{2}{r}\sigma_{r\phi} = 0$$

Związki geometryczne:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}$$

$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r}u_{\phi,\phi} + \frac{u_r}{r}$$

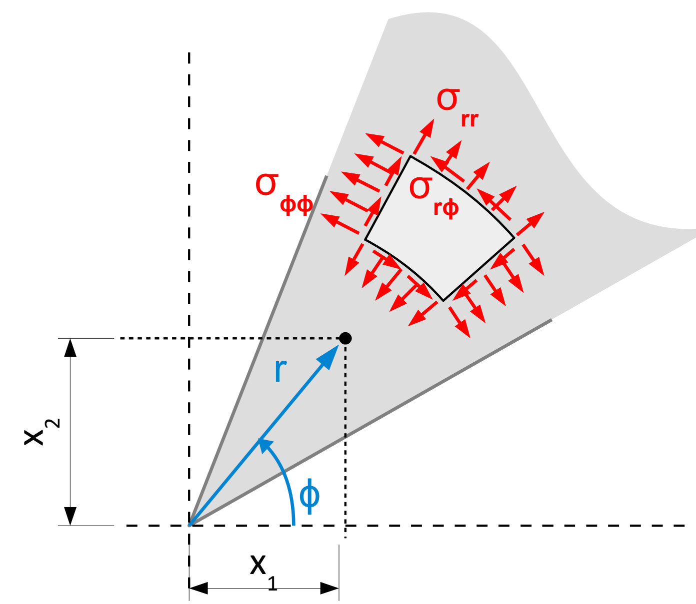
$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(u_{\phi,r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r}u_{r,\phi}\right)$$

Związki konstytutywne:

$$\sigma_{rr} = (2G+\lambda)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\phi\phi}$$

$$\sigma_{\phi\phi} = (2G+\lambda)\varepsilon_{\phi\phi} + \lambda\varepsilon_{rr}$$

$$\sigma_{r\phi} = 2G\varepsilon_{r\phi}$$



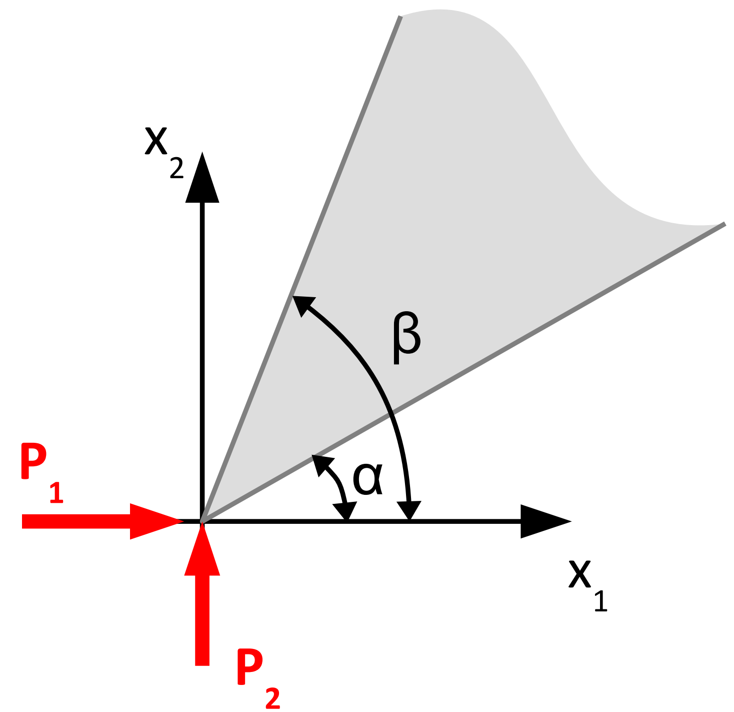
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Warunki brzegowe:

- **brzeg dolny** ($\phi = \alpha$, r – dowolne, ale różne od 0)
  - brak obciążenia normalnego $\sigma_{\phi\phi}(r,\alpha) = 0$
  - brak obciążenia stycznego $\sigma_{r\phi}(r,\alpha) = 0$

- **brzeg górny** ($\phi = \beta$, r – dowolne, ale różne od 0)
  - brak obciążenia normalnego $\sigma_{\phi\phi}(r,\beta) = 0$
  - brak obciążenia stycznego $\sigma_{r\phi}(r,\beta) = 0$



Powyższe warunki brzegowe będą spełnione, jeśli:

$$\sigma_{\phi\phi}(r,\phi) \equiv 0 \qquad \sigma_{r\phi}(r,\phi) \equiv 0$$

Załóżmy, że tak będzie w rzeczywistości.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

UWAGA:

- Nie określiliśmy póki co **warunku brzegowego w wierzchołku**. Nie da się tego zrobić za pomocą wzoru

$$\sigma_{ij} n_j = q_j$$

ponieważ **normalna zewnętrzna w wierzchołku nie jest określona**. Warunek ten określimy później w inny sposób.

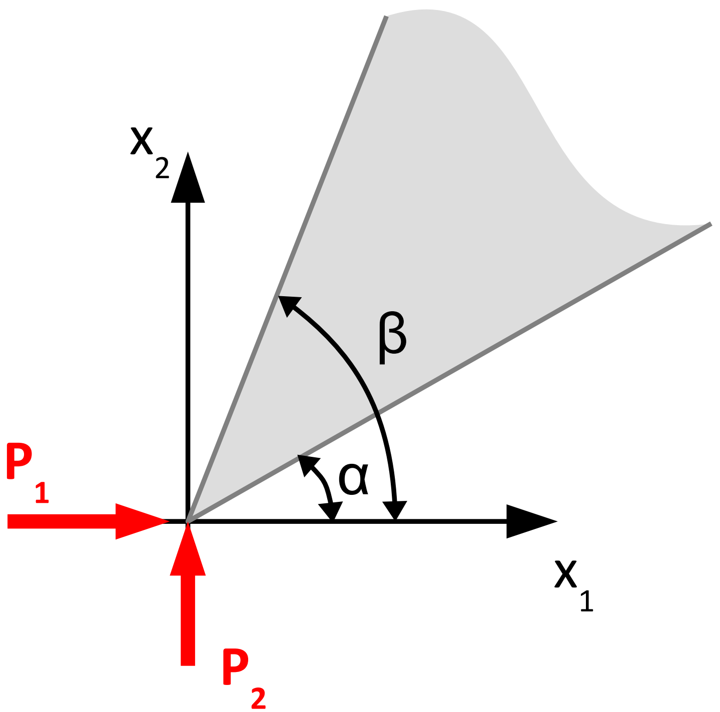
Przy założeniu, że składowa σ_{rr} jest jedyną niezerową składową tensora naprężenia, **równania równowagi** sprowadzają się do równania:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} = 0$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$\sigma_{rr}(r;\phi) = \frac{C(\phi)}{r}$$

Stała całkowania C jest funkcją kąta ϕ.



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Poza równaniem równowagi spełnione muszą być **związki geometryczne** lub **równania nierozdzielności odkształceń**. Te ostatnie w przypadku **płaskim** sprowadzają się do równania:

$$\Delta(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = 0$$

We **współrzędnych biegunowych** ma ono postać.

$$\Delta\sigma_{rr} = \sigma_{rr,rr} + \frac{1}{r}\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r^2}\sigma_{rr,\phi\phi} = 0$$

Jeśli podstawimy w nim otrzymane uprzednio **rozwiązanie równań równowagi**, wtedy – po prostych przekształceniach – otrzymamy równanie, w którym niewiadomą jest funkcja $C(\phi)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}\phi^2} + C = 0$$

Jest to proste równanie różniczkowe zwyczajne. Jego rozwiązanie jest następujące:

$$C(\phi) = C_1 \cos\phi + C_2 \sin\phi$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

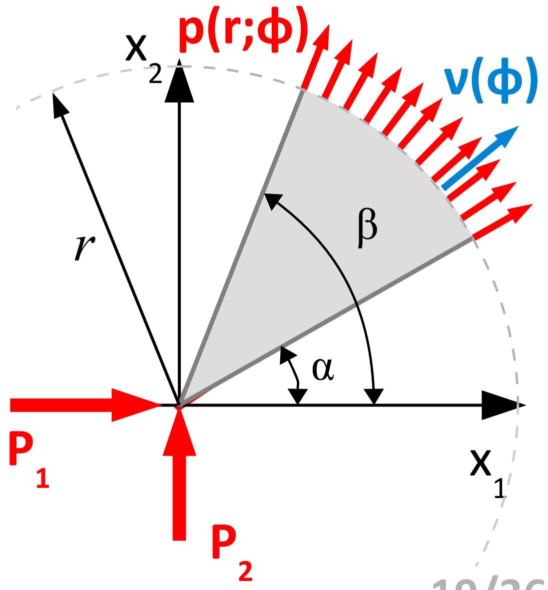
ZAGADNIENIE FLAMANTA

Ostatecznie, rozkład **radialnych naprężeń normalnych** jest dany wzorem:

$$\sigma_{rr}(r;\phi) = \frac{C_1}{r}\cos\phi + \frac{C_2}{r}\sin\phi$$

Stałe całkowania wyznaczamy z **warunku brzegowego zapisanego dla wierzchołka klina**. Formułujemy go następująco:

- **Wycinamy wierzchołek klina powierzchnią walcową** o promieniu r, o osi przechodzącej przez wierzchołek i prostopadłą do płaszczyzny zagadnienia.
- Zapisujemy **warunek równowagi sił** działających na taki wycinek. Siłami tymi są **składowe siły skupionej** w wierzchołku oraz **układ naprężeń przyłożonych do powierzchni cięcia**.
- Żądamy, aby warunek ten spełniony był dla dowolnego promienia r.



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Naprężenia na powierzchni cięcia:

$$\sigma_{ij}\nu_j = p_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}(r;\phi) = \sigma_{rr}(r;\phi)\cdot\boldsymbol{\nu}(\phi) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}\cos\phi \\ \sigma_{rr}\sin\phi \end{bmatrix}$$

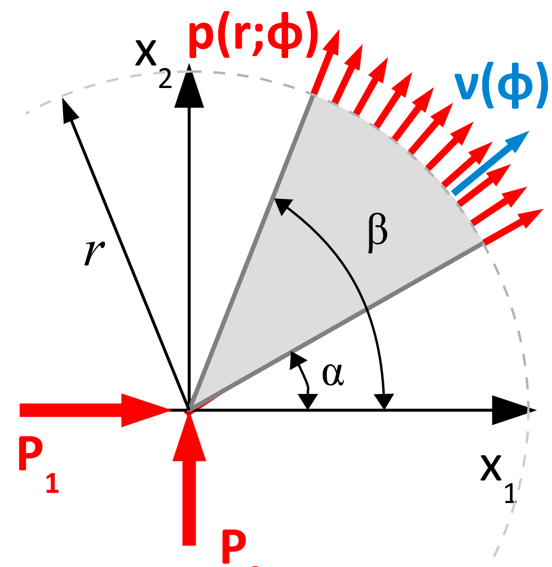
Suma układu sił – składowa na kierunku x_1:

$$S_1 = P_1 + \int_K p_1 \,\mathrm{d}s = P_1 + \int_{\phi=\alpha}^{\beta} \sigma_{rr}\cos\phi\, r\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= P_1 + \int_{\alpha}^{\beta} r\cos\phi\left[\frac{C_1}{r}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi + \frac{C_2}{r}\sin\phi\right]\mathrm{d}\phi =$$

$$= P_1 + C_1\int_{\alpha}^{\beta}\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi + C_2\int_{\alpha}^{\beta}\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= P_1 + \frac{C_1}{4}\left[2(\beta-\alpha) + (\sin 2\beta - \sin 2\alpha)\right] + \frac{C_2}{4}\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right]$$



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Naprężenia na powierzchni cięcia:

$$\sigma_{ij}\nu_j = p_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}(r;\phi) = \sigma_{rr}(r;\phi)\cdot\boldsymbol{\nu}(\phi) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr}\cos\phi \\ \sigma_{rr}\sin\phi \end{bmatrix}$$

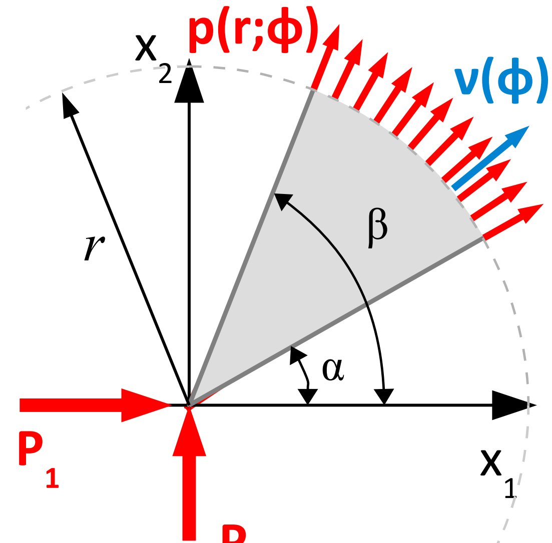
Suma układu sił – składowa na kierunku x_2:

$$S_2 = P_2 + \int_K p_2 \,\mathrm{d}s = P_2 + \int_{\phi=\alpha}^{\beta} \sigma_{rr}\sin\phi\, r\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= P_2 + \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\phi\left[\frac{C_1}{r}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi + \frac{C_2}{r}\sin\phi\right]\mathrm{d}\phi =$$

$$= P_2 + C_1\int_{\alpha}^{\beta}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi + C_2\int_{\alpha}^{\beta}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= P_2 + \frac{C_1}{4}\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right] + \frac{C_2}{4}\left[2(\beta-\alpha) + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)\right]$$



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Układ sił zbieżnych jest w równowadze, jeśli jego **suma jest zerowa**:

$$\begin{cases} P_1 + \dfrac{C_1}{4}\left[2(\beta-\alpha) + (\sin 2\beta - \sin 2\alpha)\right] + \dfrac{C_2}{4}\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right] = 0 \\ P_2 + \dfrac{C_1}{4}\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right] + \dfrac{C_2}{4}\left[2(\beta-\alpha) + (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)\right] = 0 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{2P_1\left[\sin 2\beta - \sin 2\alpha - 2(\beta-\alpha)\right] + 2P_2\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right]}{\cos(2\beta-2\alpha) + 2(\beta-\alpha)^2 - 1} \\ C_2 = \dfrac{2P_1\left[\cos 2\beta - \cos 2\alpha\right] + 2P_2\left[\sin 2\alpha - \sin 2\beta - 2(\beta-\alpha)\right]}{\cos(2\beta-2\alpha) + 2(\beta-\alpha)^2 - 1} \end{cases}$$

Otrzymane rozwiązanie jest niezależne od r, mimo że powierzchnia cięcia zmieniała się wraz ze zmianą wartości r. Są to rzeczywiście stałe, które określają **rozkład naprężeń w rozwiązaniu zagadnienia Flamanta**:

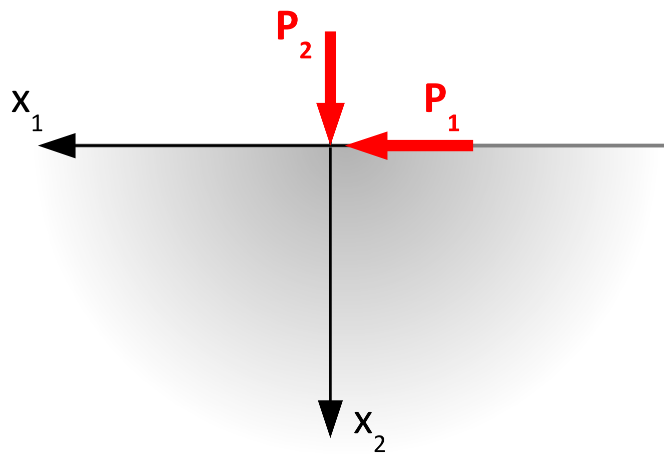
$$\boxed{\sigma_{rr}(r;\phi) = \frac{C_1}{r}\cos\phi + \frac{C_2}{r}\sin\phi}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

dr inż. Paweł Szeptyński

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Dla półpłaszczyzny sprężystej mamy: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 180^\circ$



$$C_1 = -\frac{2P_1}{\pi}, \quad C_2 = -\frac{2P_2}{\pi}$$

$$\boxed{\sigma_{rr}(r,\phi) = -\frac{2}{\pi r}\left[P_1\cos\phi + P_2\sin\phi\right]}$$

Rozwiązanie można zapisać w układzie kartezjańskim korzystając z zależności:

$$\cos\phi = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \qquad \sin\phi = \frac{x_2}{r} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

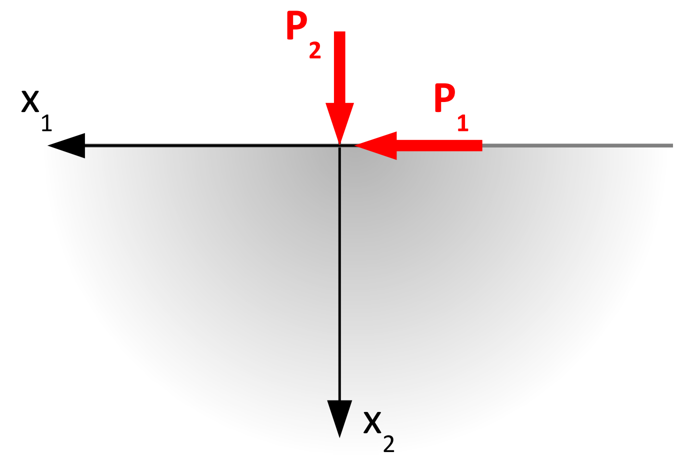
oraz ze **wzorów transformacyjnych**:

$$\sigma_{11} = \sigma_{rr}\cos^2\phi$$
$$\sigma_{22} = \sigma_{rr}\sin^2\phi$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{rr}\sin\phi\cos\phi$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Dla półpłaszczyzny sprężystej mamy: $\alpha = 0^\circ\ ,\ \ \beta = 180^\circ$



Stan naprężenia:

$$\sigma_{11} = -\frac{2\,x_1^2}{\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\left[P_1 x_1 + P_2 x_2\right]$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2\,x_2^2}{\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\left[P_1 x_1 + P_2 x_2\right]$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2\,x_1 x_2}{\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\left[P_1 x_1 + P_2 x_2\right]$$

Stan odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{2\left(P_1 x_1 + P_2 x_2\right)}{\pi\,\hat{E}\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\left[\left(1+\hat{\nu}\right)x_1^2 - \hat{\nu}\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{2\left(P_1 x_1 + P_2 x_2\right)}{\pi\,\hat{E}\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\left[\left(1+\hat{\nu}\right)x_2^2 - \hat{\nu}\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]$$

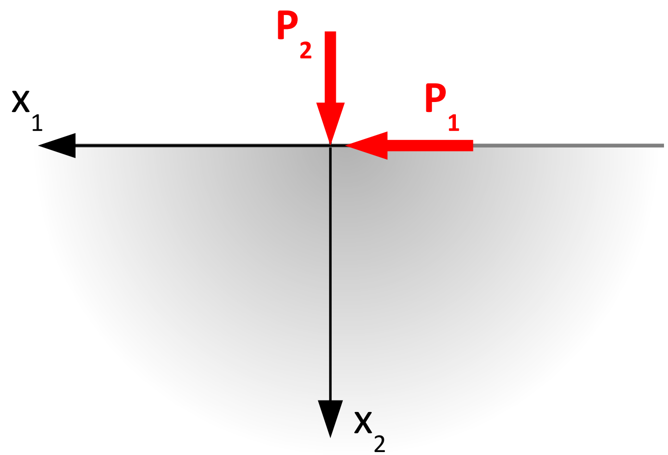
$$\varepsilon_{12} = -\frac{2\left(1+\hat{\nu}\right)x_1 x_2\left(P_1 x_1 + P_2 x_2\right)}{\pi\,\hat{E}\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

Można sprawdzić, że spełnione jest **równanie nierozdzielności**:

$$\varepsilon_{11,22} - 2\varepsilon_{12,12} + \varepsilon_{22,11} = 0$$



Zatem możliwe jest scałkowanie związków geometrycznych, co daje nam pole przemieszczeń:

$$u_1 = \int \varepsilon_{11}\,\mathrm{d}x_1 + D_1(x_2) =$$

$$= -\frac{1}{\pi \hat{E}(x_1^2+x_2^2)}\left[\left((x_1^2+x_2^2)\ln(x_1^2+x_2^2)+(1+\hat{\nu})x_2^2\right)P_1 - \left((1+\hat{\nu})x_1x_2-(1-\hat{\nu})(x_1^2+x_2^2)\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}\right)P_2\right] + D_1(x_2)$$

$$u_2 = \int \varepsilon_{22}\,\mathrm{d}x_2 + D_2(x_1) =$$

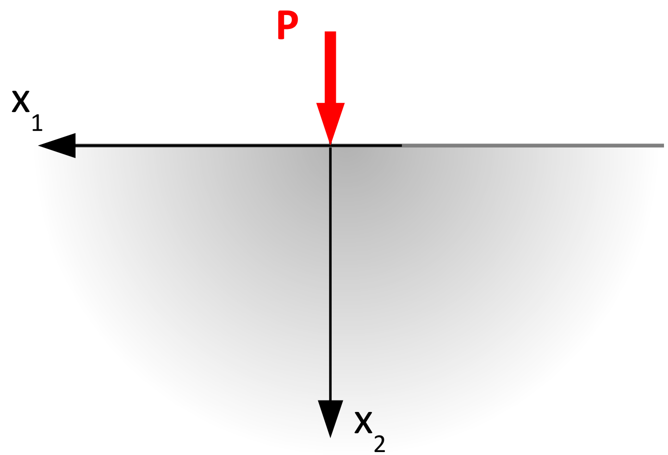
$$= -\frac{1}{\pi \hat{E}(x_1^2+x_2^2)}\left[\left((x_1^2+x_2^2)\ln(x_1^2+x_2^2)+(1+\hat{\nu})x_1^2\right)P_2 - \left((1+\hat{\nu})x_1x_2-(1-\hat{\nu})(x_1^2+x_2^2)\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)P_1\right] + D_2(x_1)$$

$$D_1(x_2) = R\,x_2 + U_1\,, \quad D_2(x_1) = -R\,x_1 + U_2 \qquad R,\ U_1,\ U_2 = \mathrm{const}$$

CAŁKA OGÓLNA JEDNORODNYCH ZWIĄZKÓW GEOMETRYCZNYCH
(RUCH BRYŁY SZTYWNEJ = OBRÓT + TRANSLACJA)

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA



Dla półpłaszczyzny sprężystej obciążonej tylko siłą normalną:

Pole przemieszczeń:

$$u_1 = \frac{P_2}{\pi \hat{E}} \left[(1+\hat{\nu}) \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} - (1-\hat{\nu}) \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2} \right] + R x_2 + U_1$$

$$u_2 = -\frac{P_2}{\pi \hat{E}} \left[\ln(x_1^2+x_2^2) + (1+\hat{\nu}) \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \right] - R x_1 + U_2$$

Pole odkształceń:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{2 P x_2}{\pi \hat{E} (x_1^2+x_2^2)^2} \left[(1+\hat{\nu}) x_1^2 - \hat{\nu}(x_1^2+x_2^2) \right] \qquad \varepsilon_{22} = -\frac{2 P x_2}{\pi \hat{E} (x_1^2+x_2^2)^2} \left[(1+\hat{\nu}) x_2^2 - \hat{\nu}(x_1^2+x_2^2) \right]$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{2 P (1+\hat{\nu}) x_1 x_2^2}{\pi \hat{E} (x_1^2+x_2^2)^2}$$

Pole naprężeń:

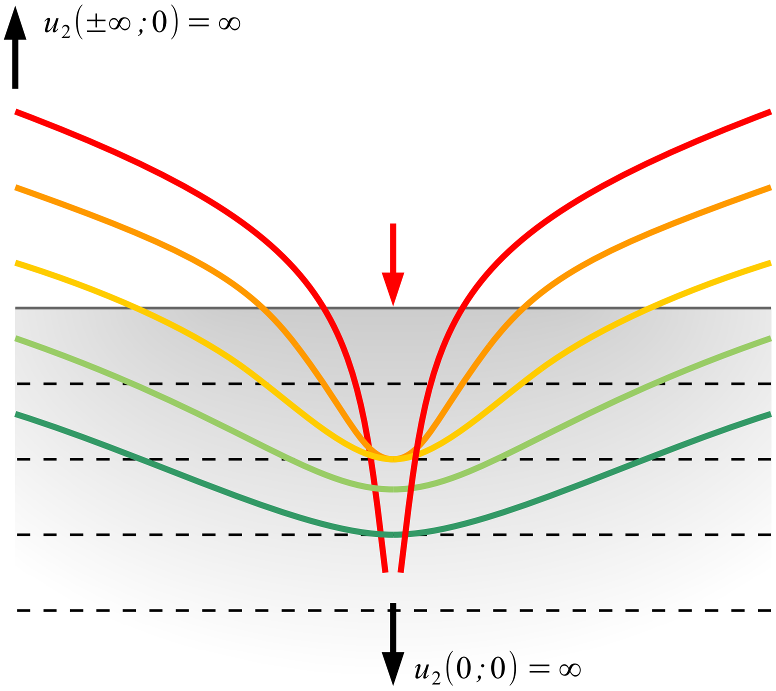
$$\sigma_{11} = -\frac{2 P_2 x_2 x_1^2}{\pi (x_1^2+x_2^2)^2} \qquad \sigma_{22} = -\frac{2 P_2 x_2^3}{\pi (x_1^2+x_2^2)^2} \qquad \sigma_{12} = -\frac{2 P_2 x_1 x_2^2}{\pi (x_1^2+x_2^2)^2}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

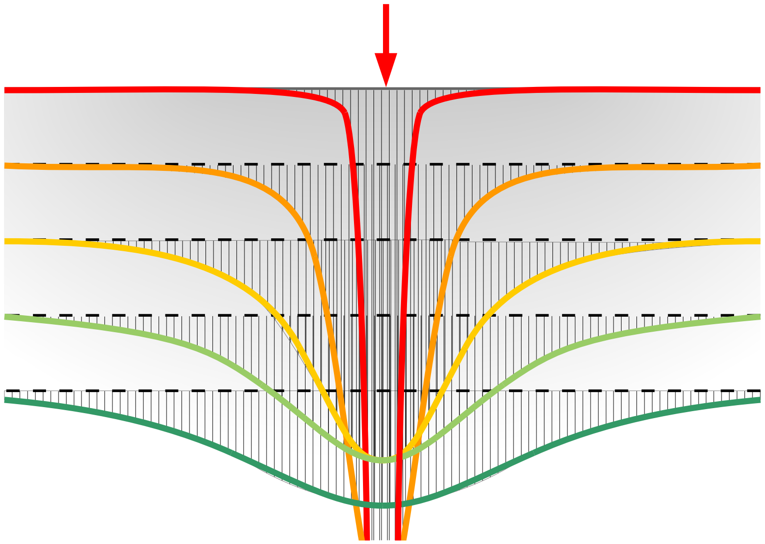
ZAGADNIENIE FLAMANTA

UWAGI:

- Podobnie, jak w przypadku rozwiązania Kelvina i rozwiązania Boussinesq'a, rozwiązanie Flamanta ma w **punkcie przyłożenia obciążenia skupionego** osobliwość – wartości rozkładów przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia dążą do nieskończoności.



rozkład przemieszczenia u_2



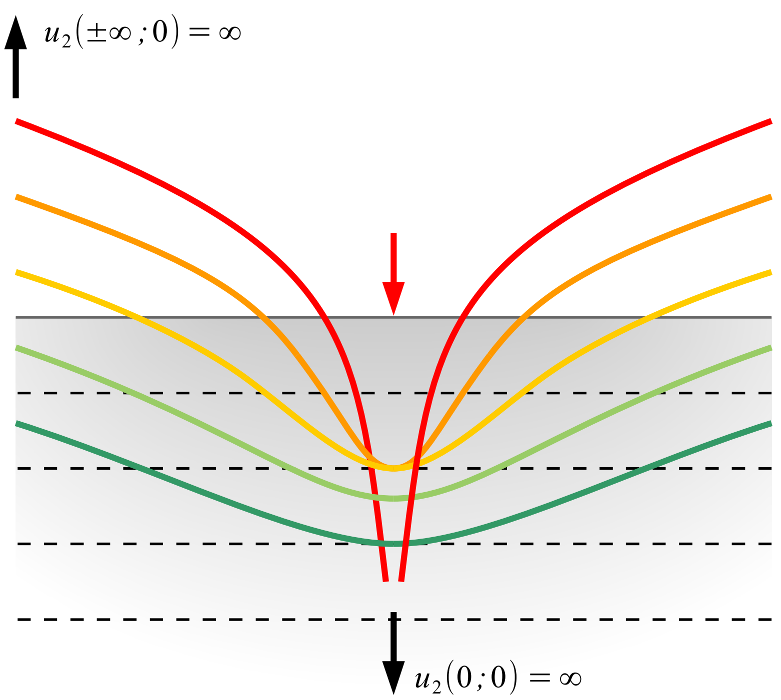
rozkład naprężenia σ_{22}

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

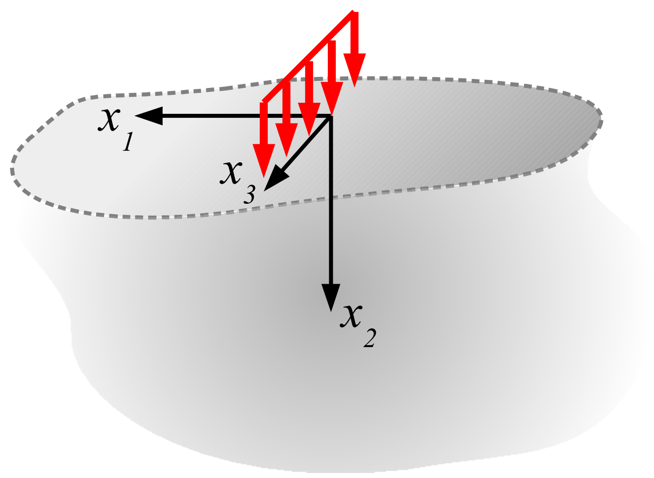
ZAGADNIENIE FLAMANTA

UWAGI:

- P**rzemieszczenia w punktach nieskończenie odległych** od obciążenia **również dążą do nieskończoności**. W rzeczywistości rozpatrujemy tylko „przekrój” zagadnienia o nieskończenie wielkim obciążeniu, zatem i przemieszczenia muszą być nieskończenie duże.



rozkład przemieszczenia u_2



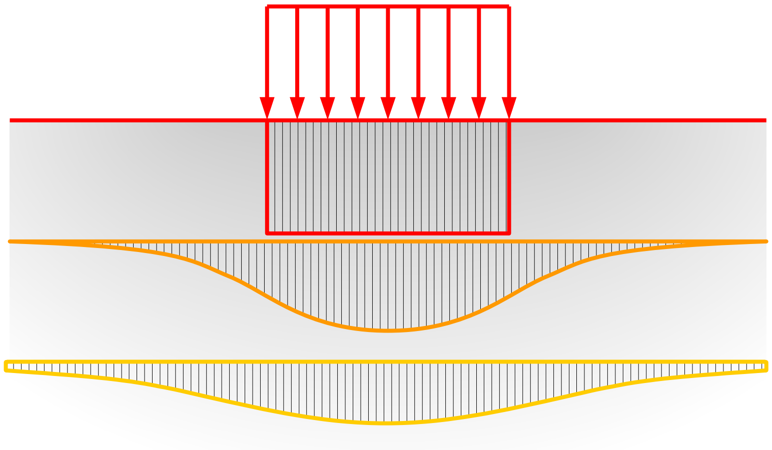
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE FLAMANTA

UWAGI:

- **Rozwiązanie Flamanta** może stanowić funkcję Greena dla zagadnień z nim związanych.

- Przykładowo, dla **półpłaszczyzny obciążonej obciążeniem jednorodnym** na odcinku o długości $2L$:



rozkład naprężenia σ_{22}

$$\sigma_{22} = \int_{-L}^{L} q(\xi)\hat{\sigma}_{22}(x_1-\xi, x_2)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= -\frac{2q}{\pi}\int_{-L}^{L}\frac{x_2^3}{\left((x_1-\xi)^2+x_2^2\right)^2}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= -\frac{q}{\pi}\left[\frac{(x_1+L)x_2}{(x_1+L)^2+x_2^2} - \frac{(x_1-L)x_2}{(x_1-L)^2+x_2^2} + \operatorname{arctg}\frac{x_1+L}{x_2} - \operatorname{arctg}\frac{x_1-L}{x_2}\right]$$

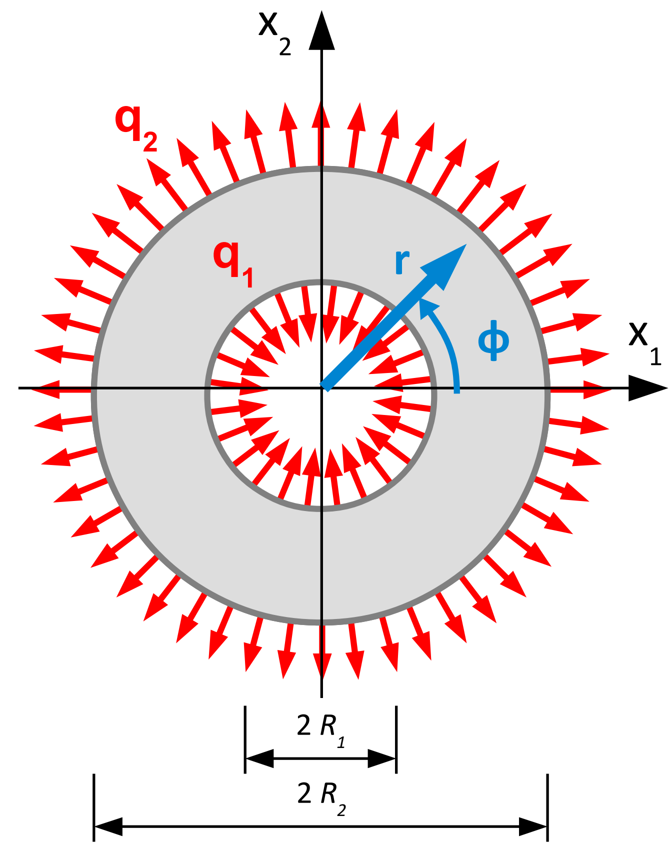
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE LAMÉGO

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE LAMÉGO

Zagadnieniem Lamégo nazywamy zagadnienie **grubościennej rury obciążonej na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej jednorodnym obciążeniem ciągłym, normalnym do tych powierzchni**. Rura wykonana jest z materiału liniowo-sprężystego (materiału Hooke'a) scharakteryzowanego stałymi sprężystymi G i λ. Promień wewnętrzny rury to R_1 , promień zewnętrzny to R_2 .



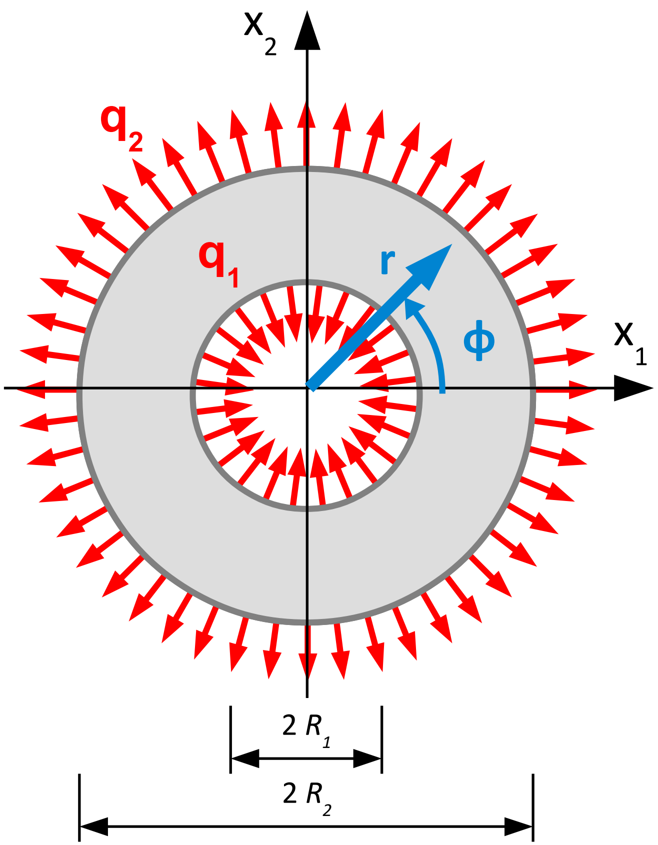
Zagadnienie jest osiowo-symetryczne.

Do jego rozwiązania posłużymy się **układem współrzędnych biegunowych**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE LAMÉGO

Dla **płaskiego zagadnienia osiowo-symetrycznego** mamy: $u_\phi \equiv 0$



Równanie równowagi:
$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0$$

Związki geometryczne:
$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}$$
$$\varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r}$$
$$\varepsilon_{r\phi} = 0$$

Związki fizyczne:
$$\sigma_{rr} = (2G + \lambda)\varepsilon_{rr} + \lambda\,\varepsilon_{\phi\phi}$$
$$\sigma_{\phi\phi} = (2G + \lambda)\varepsilon_{\phi\phi} + \lambda\,\varepsilon_{rr}$$
$$\sigma_{r\phi} = 0$$

Statyczne warunki brzegowe:

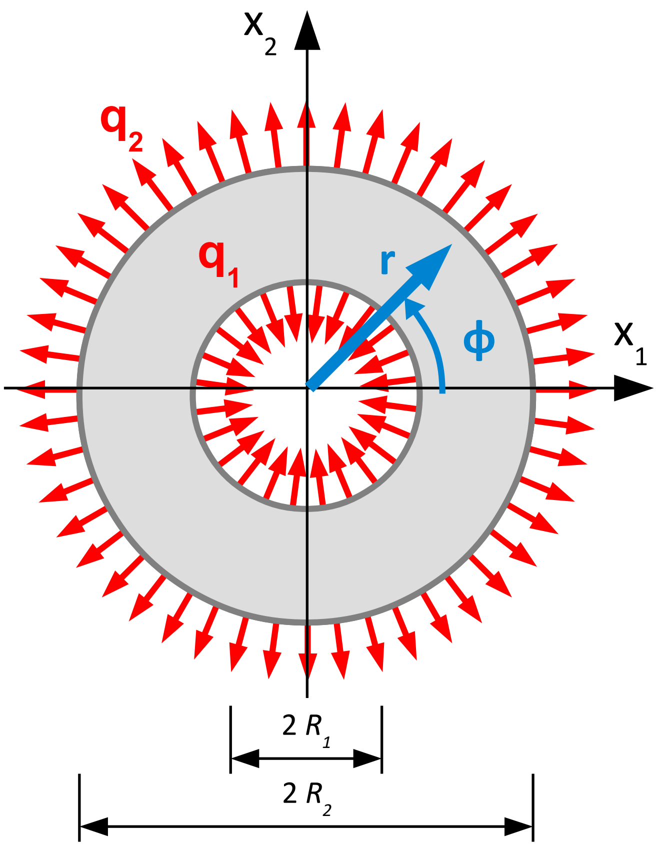
na powierzchni **wewnętrznej**: $\sigma_{rr}(R_1) = q_1$

na powierzchni **zewnętrznej**: $\sigma_{rr}(R_2) = q_2$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE LAMÉGO

Zagadnienie rozwiążemy poprzez wykorzystanie równań przemieszczeniowych dla zagadnień **osiowo-symetrycznych**.



$$u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} = 0$$

Jest to **równanie typu Eulera**. Jego **rozwiązanie** jest następujące:

$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków brzegowych**:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(R_1) = 2C_1(G+\lambda) - \dfrac{2C_2 G}{R_1^2} = q_1 \\ \sigma_{rr}(R_2) = 2C_1(G+\lambda) - \dfrac{2C_2 G}{R_2^2} = q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{q_2 R_2^2 - q_1 R_1^2}{(2G+\lambda)(R_2^2 - R_1^2)} \\ C_2 = \dfrac{R_1^2 R_2^2 (q_2 - q_1)}{2G(R_2^2 - R_1^2)} \end{cases}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE LAMÉGO

Rozwiązanie zagadnienia Lamégo jest następujące:

Pole przemieszczeń:

$$u_r(r) = \frac{q_2 R_2^2 - q_1 R_1^2}{(2G+\lambda)(R_2^2 - R_1^2)} \cdot r + \frac{R_1^2 R_2^2 (q_2 - q_1)}{2G(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{1}{r}$$

Pole odkształceń:

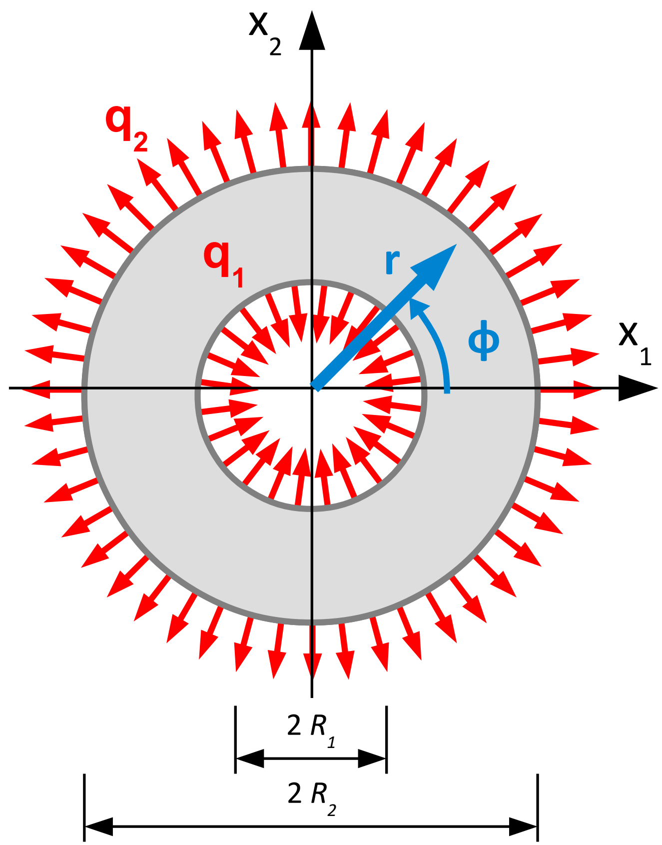
$$\varepsilon_{rr}(r) = \frac{q_2 R_2^2 - q_1 R_1^2}{(2G+\lambda)(R_2^2 - R_1^2)} - \frac{R_1^2 R_2^2 (q_2 - q_1)}{2G(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\varepsilon_{\phi\phi}(r) = \frac{q_2 R_2^2 - q_1 R_1^2}{(2G+\lambda)(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{R_1^2 R_2^2 (q_2 - q_1)}{2G(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Pole naprężeń:

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{q_2 R_2^2 - q_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(q_2 - q_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

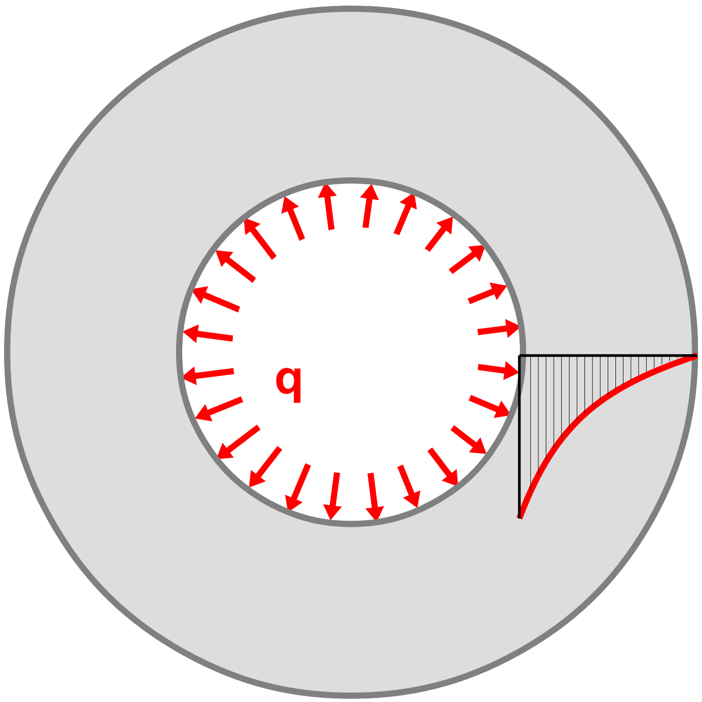
$$\sigma_{\phi\phi}(r) = \frac{q_2 R_2^2 - q_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(q_2 - q_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$



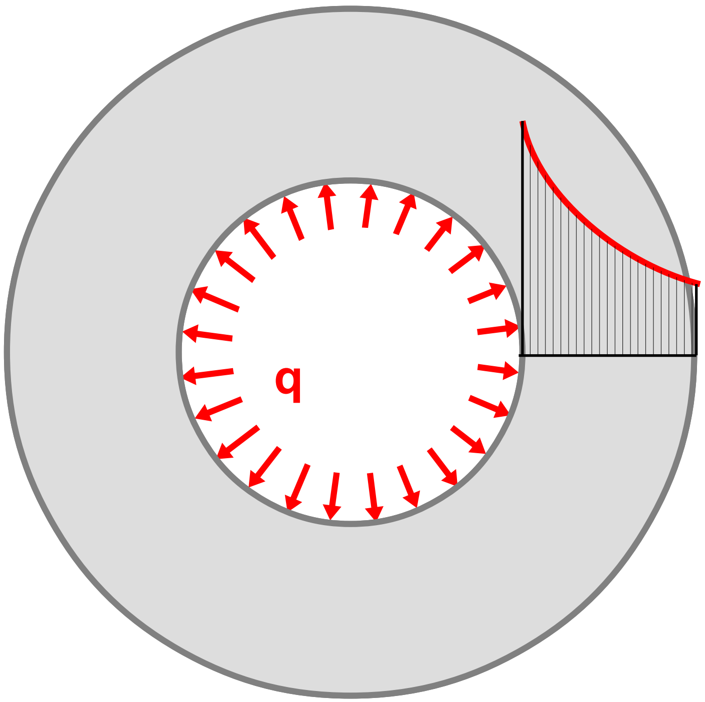
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZAGADNIENIE LAMÉGO

Dla rury obciążonej tylko **ciśnieniem wewnętrznym**:



rozkład radialnych naprężeń normalnych σ_{rr}



rozkład obwodowych naprężeń normalnych $\sigma_{\phi\phi}$

UWAGA:

- **Rozwiązanie Lamégo** znajduje zastosowanie przy **projektowaniu rurociągów**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0