

TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

PRACA, MOC I ENERGIA W DEFORMACJI SPRĘŻYSTEJ

PRACA, MOC, ENERGIA

Praca intuicyjnie rozumiana jest jako **iloczyn siły i przemieszczenia**, jakie zaszło w czasie, gdy na ciało działała rozpatrywana siła:

$$W = F \cdot s$$

W zagadnieniach **trójwymiarowych** oblicza się ją jako **sumę prac składowych siły na równoległych do nich składowych przemieszczenia**, tj. jako **iloczyn skalarny**:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3$$

W przypadku ruchu niejednostajnego i krzywoliniowego pod wpływem zmiennego pola sił, **pracą, wykonaną przez pole sił F przy przesunięciu cząstki wzdłuż krzywej K** nazywamy sumę nieskończenie małych przyrostów pracy tego pola sił na nieskończenie małych przyrostach przemieszczeń – obliczamy ją jako **całkę krzywoliniową skierowaną** (z pola wektorowego):

$$W = \int_K \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

PRACA, MOC, ENERGIA

Mocą nazywamy pochodną pracy względem czasu:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Energia kinetyczną nazywamy pracą, jaką należy wykonać, aby ciało o masie m , które pierwotnie znajdowało się w spoczynku, poruszało się z prędkością \mathbf{v} :

$$E_k = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

W przypadku **sił potencjalnych**, tj. takich, które da się wyznaczyć jako **gradient pewnej funkcji skalarnej V** , zwanej **potencjałem**:

$$\mathbf{F} = \text{grad } V = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} ; \frac{\partial V}{\partial x_2} ; \frac{\partial V}{\partial x_3} \right]$$

mówi się także o **energii potencjalnej** takiego pola sił – jest to **praca**, jaką wykonają siły tego pola przy przysunięciu ciała z jednego punktu do drugiego, a praca ta jest równa różnicy wartości potencjału w tych punktach.

$$\Delta E_k = W_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B) = V(B) - V(A)$$

PRACA, MOC, ENERGIA

Definicje powyższe tworzone były dla **mas punktowych** i miały one również zastosowanie w określonych przypadkach ruchu **bryły sztywnej**. W przypadku **ciał odkształcalnych** musimy posługiwać się innymi definicjami.

Moc sił zewnętrznych:

$$P \stackrel{\text{Df.}}{=} \iiint_V b_i v_i dV + \iint_S q_i v_i dS$$

Skorzystajmy z **warunków czworościanu**:

$$P = \iiint_V b_i v_i dV + \iint_S \sigma_{ij} v_j v_i dS$$

Korzystamy z **twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$P = \iiint_V b_i v_i dV + \iiint_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV$$

Ze wzoru na **pochoďną iloczynu**:

$$P = \iiint_V b_i v_i dV + \iiint_V (\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j}) dV$$

PRACA, MOC, ENERGIA

$$P = \iiint_V b_i v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij,j} v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV$$

Korzystamy z **równań ruchu** wynikających z II zasady dynamiki Newtona:

$$P = \iiint_V b_i v_i dV + \iiint_V (\rho a_i - b_i) v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV$$

Z addytywności całek wynika, że

$$P = \iiint_V \rho a_i v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV$$

Funkcję pod pierwszą całką można zapisać w inny sposób, korzystając ze wzoru na **pochodną iloczynu**:

$$\rho a_i v_i = \rho \frac{dv_i}{dt} v_i = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i v_i \right)$$

W **liniowej teorii sprężystości** zakładamy, że gęstość masy i konfiguracja ciała są w przybliżeniu niezmiennie w czasie, zatem z operacją różniczkowania względem czasu można wyjść przed całkę:

$$P = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV$$

PRACA, MOC, ENERGIA

$$P = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} v_{i,j} dV$$

Korzystając z **symetrii tensora naprężenia**, funkcję pod drugą całką można zapisać następująco:

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ji} v_{i,j}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} v_{i,j} + \sigma_{ij} v_{j,i}) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

W **liniowej teorii sprężystości**, w której **opisy materialny i przestrzenny są tożsame**, różniczkowanie całkowite względem czasu sprowadza się do różniczkowania cząstkowego, w którym kolejność różniczkowania nie gra roli:

$$\sigma_{ij} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} u_i \right)_{,j} + \left(\frac{d}{dt} u_j \right)_{,i} \right] = \sigma_{ij} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

PRACA, MOC, ENERGIA

Moc sił zewnętrznych można zapisać następująco

$$P = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

gdzie:

$$E_k = \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV \quad - \text{energia kinetyczna}$$

$$\dot{\Phi} = \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad - \text{moc odkształcenia sprężystego}$$

UWAGA

- Przez analogię do znanych definicji mocy i pracy, **pracę naprężeń na odkształceniach**, równą **energii wewnętrznej odkształcenia sprężystego** zdefiniujemy jako:

$$\Phi = \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV$$

PRACA, MOC, ENERGIA

Moc sił zewnętrznych można zapisać następująco

$$P = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

UWAGI:

- Związek powyższy został wyprowadzony bez odniesienia do jakichkolwiek związków konstytutywnych, zatem **obowiązuje dla materiału o dowolnej charakterystyce materiałowej**.
- Analogiczny związek można wyprowadzić w sposób całkowicie ścisły (bez uproszczeń wynikających z linearyzacji) dla **teorii dużych odkształceń**:

$$P = \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV + \iiint_V t_{ij} D_{ij} dV$$

gdzie \mathbf{t} jest **tensorem naprężenia Cauchy'ego**, a \mathbf{D} jest **tensorem prędkości rozciągnięcia**:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

PRACA, MOC, ENERGIA

Posługiwać się będziemy następującymi wielkościami:

- energia kinetyczna

$$E_k = \iiint_V \frac{\rho}{2} v_i v_i dV$$

- praca zewnętrznych sił objętościowych

$$L_b = \iiint_V b_i u_i dV$$

- praca zewnętrznych sił powierzchniowych

$$L_q = \iint_S q_i u_i dS$$

- praca sił zewnętrznych

$$L = L_b + L_q = \iiint_V b_i u_i dV + \iint_S q_i u_i dS$$

- energia wewnętrzna odkształcenia sprężystego

$$\Phi = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

- całkowita energia potencjalna

$$\Pi = \Phi - L$$

- całkowita energia uzupełniająca

$$\Psi = \Phi - L_q$$

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Dane jest **ciało sprężyste** zajmujące obszar V ograniczony powierzchnią $S = S_u \cup S_q$. Ciało obciążone jest układem sił masowych $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, na brzegu S_q obciążone jest układem zewnętrznych sił powierzchniowych $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ a na brzegu S_u zadane są przemieszczenia $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Określamy **zbiór kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczenia**, tj. rozkładów przemieszczenia spełniających kinematyczne warunki brzegowe:

$$X_u = \left\{ \check{\mathbf{u}} : \mathbf{x} \in S_u \Rightarrow \check{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \right\}$$

Wśród nich jedno jest **przemieszczeniem rzeczywistym** (rozwiązaniem zagadnienia teorii sprężystości). Oznaczmy je przez:

$$\hat{\mathbf{u}} \in X_u$$

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Pozostałe kinematycznie dopuszczalne pola przemieszczeń zapiszemy jako:

$$\check{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} + \alpha \mathbf{v}$$

Parametr α określa jak bardzo dane pole kinematycznie dopuszczalne odbiega od pola rzeczywistego.

Ponieważ zarówno $\check{\mathbf{u}}$ jak i $\hat{\mathbf{u}}$ spełniają kinematyczne warunki brzegowe, zatem musi zachodzić:

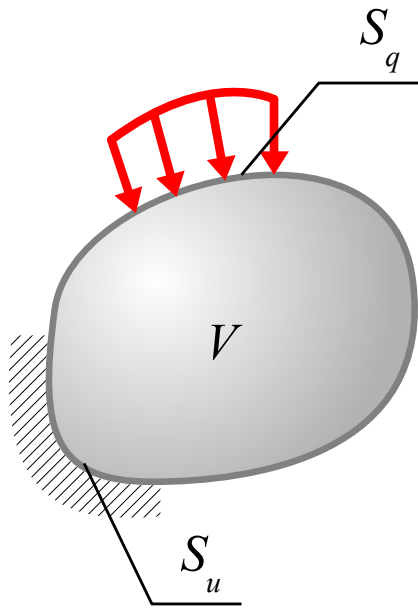
$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{na brzegu } S_u$$

Definiujemy **przemieszczenie wirtualne**, jako pole przemieszczenia, będące nieskończenie małym przyrostem przemieszczenia względem pola rzeczywistego:

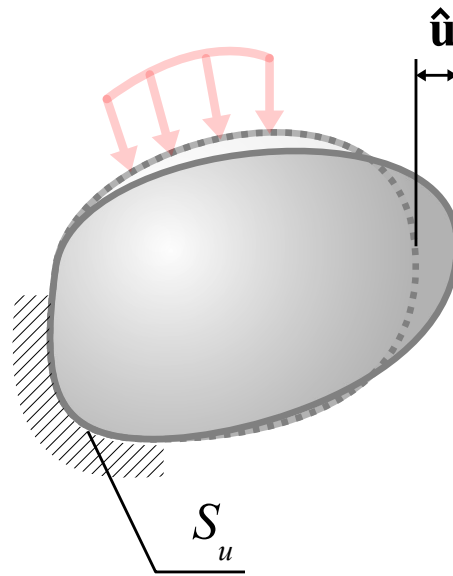
$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \check{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} d\alpha = \mathbf{v} d\alpha, \quad d\alpha \rightarrow 0$$

Pole przemieszczeń wirtualnych spełnia jednorodny kinematyczny warunek brzegowy na S_u .

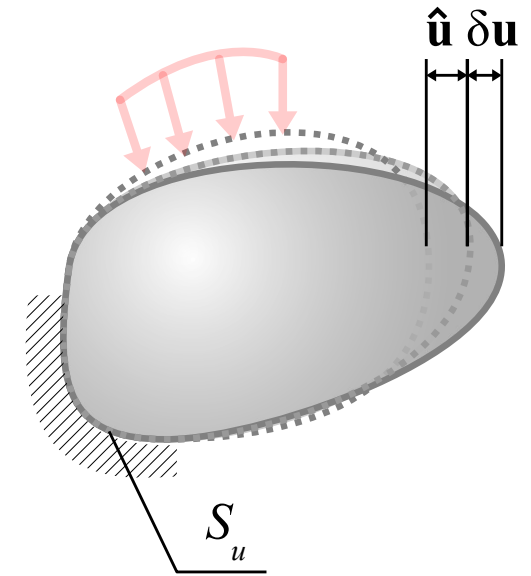
ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH



ciało nieodkształcone
(konfiguracja odniesienia)



przemieszczenie rzeczywiste



przemieszczenie rzeczywiste
+
przemieszczenie wirtualne

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Rozważmy **równania równowagi**:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$

Przemnożmy je skalarnie przez **przemieszczenie wirtualne**:

$$\sigma_{ij,j} \delta u_i + b_i \delta u_i = 0$$

a następnie **scalkujmy**:

$$\iiint_V [\sigma_{ij,j} \delta u_i + b_i \delta u_i] dV = 0$$

Na podstawie wzoru na **pochoďną iloczynu**:

$$(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij,j} \delta u_i = (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$$

możemy napisać:

$$\iiint_V [(\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + b_i \delta u_i] dV = 0$$

Z **addytywności** całki:

$$\iiint_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV$$

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Skorzystajmy z twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego:

$$\iint_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV$$

Ponieważ $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ na części brzegu S_u , zatem całkowanie da nam niezerową wartość jedynie na części brzegu S_q na której spełnione są statyczne warunki brzegowe o postaci $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{q}$

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV$$

Korzystając z symetrii tensora naprężenia możemy napisać:

$$\sigma_{ij} \delta u_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \sigma_{ji} \delta u_{i,j}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + \sigma_{ij} \delta u_{j,i}) = \sigma_{ij} \underbrace{\frac{\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}}{2}}_{\delta \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$$

Tensor $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ jest tensorem odkształcenia odpowiadającym polu przemieszczenia wirtualnego $\delta \mathbf{u}$.

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Możemy napisać:

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

A zatem:

praca rzeczywistych sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach jest równa pracy rzeczywistego pola naprężenia na wirtualnych odkształceniach

Zależność ta obowiązuje dla dowolnego pola przemieszczeń wirtualnych.

Jest to **warunek konieczny**, który musi spełniać rzeczywisty rozkład naprężeń i obciążeń (spełniający równania równowagi i statyczne warunki brzegowe).

Sprawdźmy, czy jest to również warunek wystarczający.

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Zachodzi:

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV$$

Ze wzoru na pochodną iloczynu:

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_j - \sigma_{ij,j} \delta u_i dV$$

Z twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego i addytywności całki:

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iint_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV$$

W pierwszej całce po prawej stronie całka po brzegu S_u jest zerowa, ponieważ na części tej $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Po ponownym skorzystaniu z addytywności całki możemy napisać:

$$\iint_{S_q} (q_i - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS + \iiint_V (\sigma_{ij,j} + b_i) \delta u_i dV = 0$$

przy czym zależność ta ma zachodzić dla dowolnego przemieszczenia wirtualnego $\delta \mathbf{u}$.

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Będzie tak tylko wtedy, gdy funkcje podcałkowe będą tożsamościowo równe 0,

$$\iint_{S_q} \underbrace{(q_i - \sigma_{ij} n_j)}_{=0} \delta u_i dS + \iiint_V \underbrace{(\sigma_{ij,j} + b_i)}_{=0} \delta u_i dV = 0$$

zatem wtedy gdy:

- spełnione są **równania równowagi**: $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$
- spełnione są **statyczne warunki brzegowe**: $\sigma_{ij} n_j = q_i$

A zatem z równości pracy sił zewnętrznych na polu przemieszczenia wirtualnego oraz pracy naprężeń na odpowiednich odkształceniach wirtualnych wynika spełnienie równań równowagi oraz statycznych warunków brzegowych.

Równość prac wirtualnych jest zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby spełnione były równania równowagi i statyczne warunki brzegowe.

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

UWAGI:

- Jeśli praca wirtualna sił zewnętrznych jest równa pracy wirtualnej sił wewnętrznych, wtedy spełnione są **równania równowagi** oraz statyczne **warunki brzegowe**.
- Jeśli naprężenia wyznaczone są na podstawie pewnego kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczenia, to z definicji takiego stanu spełnione są również **kinematyczne warunki brzegowe**.
- Odkształcenia odpowiadające polu przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych wyznaczamy ze **związków geometrycznych**, o których zakładamy, że są spełnione.

WNIOSEK:

- Jeśli pewne przemieszczenie kinematycznie dopuszczalne spełnia warunek równości prac wirtualnych sił wewnętrznych i zewnętrznych, to spełnia ono wszystkie równania rządzące zagadnieniem teorii sprężystości – jest zatem jego **rozwiązaniem**.
- Twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby pewne przemieszczenie kinematycznie dopuszczalne było przemieszczeniem rzeczywistym jest, aby praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych była równa pracy sił wewnętrznych na odpowiednich odkształceniach wirtualnych dla dowolnego przemieszczenia wirtualnego i odpowiadającego mu odkształcenia wirtualnego:

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

$$\delta_{\mathbf{u}} L = \delta_{\mathbf{u}} \Phi \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

ZASADA PRZEMIESZCZEŃ WIRTUALNYCH

$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

UWAGI:

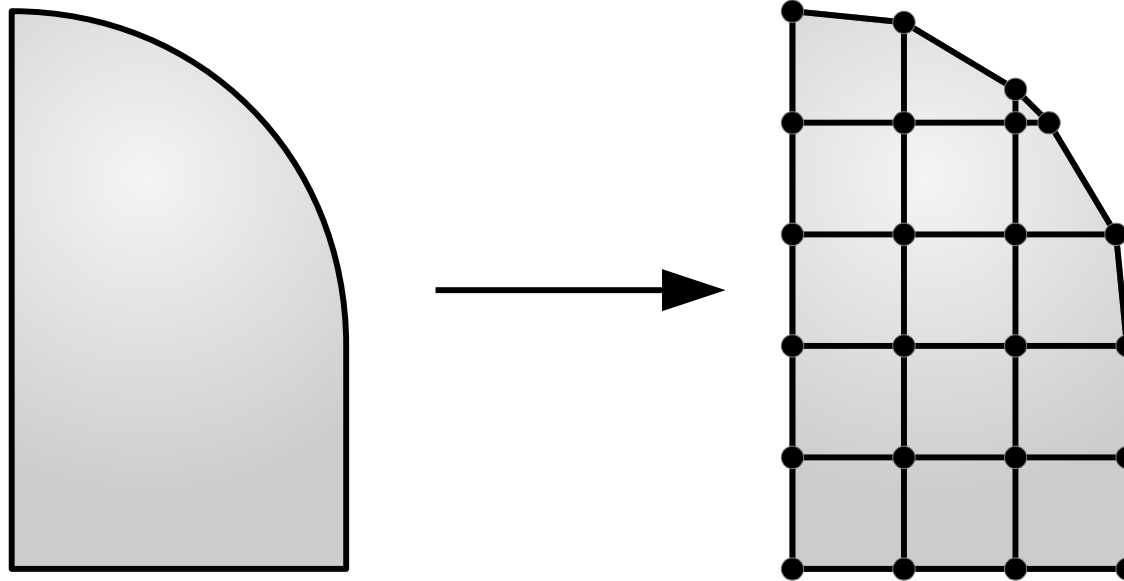
- Twierdzenie to nazywane jest też **zasadą prac wirtualnych w wariacie przemieszczeniowym**.
- ZPW obowiązuje tylko dla **teorii małych odkształceń**.
- Dotyczy ona tylko zagadnień **statyki**.
- Obowiązuje ona dla **dowolnych związków konstytutywnych**.
- Sformułowanie zagadnienia przez ZPW jest **sformułowaniem całkowym** (tzw. **globalnym, słabym**), a nie **różniczkowym** (tzw. **lokalnym, silnym**), jak w przypadku układu równań teorii sprężystości – są one jednak równoważne. Różnica polega na tym, że **w sformułowaniu całkowym rozwiązanie wcale nie musi być różniczkowalne ani nawet ciągłe** - rozwiązania takie nazywamy **rozwiązaniami słabymi**.

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Zasada Przemieszczeń Wirtualnych jest podstawą numerycznej metody rozwiązania zagadnienia liniowej teorii sprężystości w sformułowaniu słabym, tj. **Metody Elementów Skończonych**. W metodzie tej:

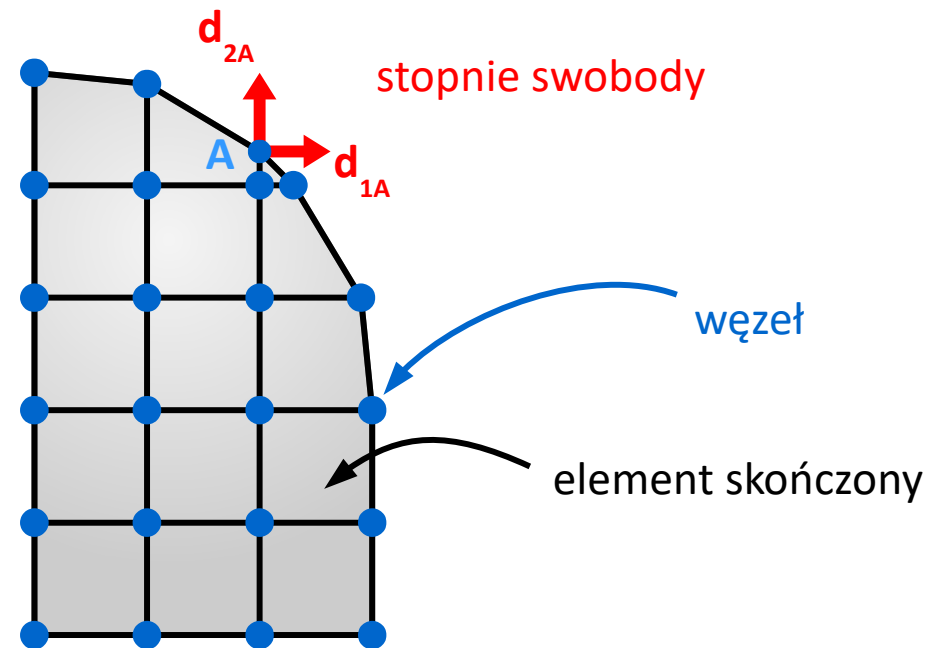
- wyznaczamy w konfiguracji ciała skończoną liczbę punktów – **węzłów** (tzw. **dyskretyzacja**). Przemieszczenia węzłowe będą niewiadomymi nowo postawionego zagadnienia.



METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Zasada Przemieszczeń Wirtualnych jest podstawą numerycznej metody rozwiązania zagadnienia liniowej teorii sprężystości w sformułowaniu słabym, tj. **Metody Elementów Skończonych**. W metodzie tej:

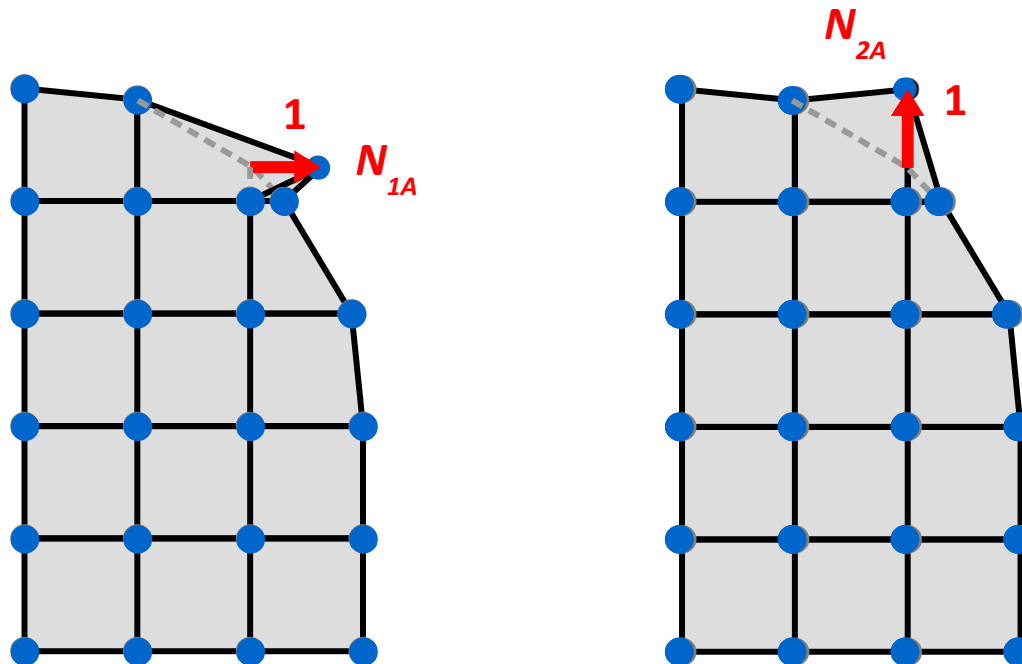
- Każdemu węzłowi nadajemy **stopnie swobody**, tj. kierunki dopuszczalnych w tym węźle przemieszczeń lub **obrotów**.
- obszary zawarte pomiędzy sąsiednimi węzłami nazywamy **elementami skończonymi**.



METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Zasada Przemieszczeń Wirtualnych jest podstawą numerycznej metody rozwiązania zagadnienia liniowej teorii sprężystości w sformułowaniu słabym, tj. **Metody Elementów Skończonych**. W metodzie tej:

- Przemieszczenia pomiędzy węzłami przybliżane będą za pomocą tzw. **funkcji kształtu**. Funkcje te są wybierane przez nas. Często funkcje te są tego rodzaju, że przyjmują **jednostkową wartość przemieszczenia w wybranym węźle**, we wszystkich pozostałych węzłach przyjmują wartość zerową. Kształt funkcji w obszarze pomiędzy węzłem o przemieszczeniu jednostkowym a węzłami sąsiednimi jest wybierany różnie (funkcje liniowe, sześciennie itp.)



METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

- Pole przemieszczenia będzie wyznaczone jako kombinacja liniowa funkcji kształtu.
- Jeśli przemieszczenia węzłowe w funkcjach kształtu jest jednostkowe, to współczynniki tej kombinacji są po prostu wartościami przemieszczeń na kierunkach odpowiednich stopni swobody.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1^{[1]} & \dots & \phi_1^{[n]} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \phi_2^{[1]} & \dots & \phi_2^{[n]} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_3^{[1]} & \dots & \phi_3^{[n]} \end{bmatrix}}_{N_{iA}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{3n} \end{bmatrix}}_{d_A}$$

$$u_i = \sum_{A=1}^{3n} N_{iA} d_A, \quad i=1,2,3$$

$u_i(\mathbf{x})$ – i -ta składowa **wektora przemieszczenia**

$N_{iA}(\mathbf{x})$ – **funkcja kształtu** odpowiadająca i -tej składowej przemieszczenia odpowiadającej A -temu stopniowi swobody

d_A – **przemieszczenie uogólnione** odpowiadające A -temu stopniowi swobody

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

- **odkształcenie rzeczywiste:**
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^{3N} (N_{iA,j} + N_{jA,i}) d_A$$
- **naprężenie rzeczywiste:**
$$\sigma_{ij} = S_{ijpq} \varepsilon_{pq} = \frac{1}{2} S_{ijpq} \sum_{A=1}^{3N} (N_{pA,q} + N_{qA,p}) d_A$$
- **przemieszczenie wirtualne:**
$$\delta u_i = \sum_{B=1}^{3N} N_{iB} \delta d_B$$
- **odkształcenie wirtualne:**
$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) = \frac{1}{2} \sum_{B=1}^{3N} (N_{iB,j} + N_{jB,i}) \delta d_B$$

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Zapisujemy **zasadę przemieszczeń wirtualnych**:
$$\iint_{S_q} q_i \delta u_i dS + \iiint_V b_i \delta u_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

Podstawiamy wyrażenia na naprężenia rzeczywiste oraz przemieszczenia i odkształcenia wirtualne:

$$\iint_{S_q} \left[q_i \sum_{B=1}^{3N} N_{iB} \delta d_B \right] dS + \iiint_V \left[b_i \sum_{B=1}^{3N} N_{iB} \delta d_B \right] dV = \iiint_V \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{ijpq} \sum_{A=1}^{3N} (N_{pA,q} + N_{A,p}) d_A \cdot \frac{1}{2} \sum_{B=1}^{3N} (N_{iB,j} + N_{jB,i}) \delta d_B dV$$

Po przekształceniach:

$$\underbrace{\sum_{B=1}^{3N} \left(\iint_{S_q} q_i N_{iB} dS + \iiint_V b_i N_{iB} dV \right)}_{f_B} \delta d_B = \sum_{A=1}^{3N} \underbrace{\sum_{B=1}^{3N} \left(\iiint_V \frac{1}{4} \mathfrak{S}_{ijpq} (N_{pA,q} + N_{qA,p}) (N_{iB,j} + N_{jB,i}) dV \right)}_{K_{BA}} d_A \delta d_B$$

Stąd:

$$\sum_{A=1}^{3N} K_{BA} \cdot d_A \cdot \delta d_B = f_B \cdot \delta d_B \quad \forall \delta d_B$$

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Otrzymany związek ma być spełniony dla dowolnych wartości δd_B , zatem musi być:

$$\sum_{A=1}^{3N} K_{BA} \cdot d_A = f_B \quad B = 1, \dots, 3N$$

gdzie:

- **macierz sztywności:**
$$K_{BA} = \sum_{B=1}^{3N} \left[\left(\iiint_V \frac{1}{4} \mathbf{S}_{ijpq} (N_{pA,q} + N_{qA,p}) (N_{iB,j} + N_{jB,i}) dV \right) \right]$$

- **wektor obciążeń:**
$$f_B = \sum_{B=1}^{3N} \left[\left(\iint_{S_q} q_i N_{iB} dS + \iiint_V b_i N_{iB} dV \right) \right]$$

Otrzymany związek to **układ liniowych równań algebraicznych** na wartości przemieszczeń uogólnionych na kierunku wybranych stopni swobody.

METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

UWAGI:

- Znane są **szybkie algorytmy numeryczne** rozwiązujące duże **układy liniowych równań algebraicznych**.
- Im **większa liczba węzłów** (i elementów) oraz im **większa liczba stopni swobody** w węźle, tym **większa dokładność** rozwiązania i tym **większy układ równań** do rozwiązania.
- Całki określające elementy macierzy sztywności i wektorów obciążenia również obliczane są numerycznie. Jeśli obszar całkowania (kształt elementu skończonego), lub funkcja podcałkowa (funkcja kształtu) są bardzo nieregularne, wtedy rozwiązanie może być obarczone znacznymi błędami.
- Zagadnienia teorii nieliniowej rozwiązuje się z użyciem MES podejściem przyrostowym:
 - Dzielimy całkowity przyrost obciążenia na wiele niewielkich przyrostów.
 - Na początku przykładamy do konfiguracji odniesienia niewielki przyrost obciążenia, a związki geometryczne i związki fizyczne przybliżamy związkami liniowymi.
 - Uzyskana konfiguracja aktualna staje się nową konfiguracją odniesienia dla kolejnego etapu obciążenia, przy czym linearyzacja równań teorii sprężystości następuje już dla nowych rozkładów pól naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia. Schemat powtarza się.

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Definiujemy **całkowitą energię potencjalną** Π układu jako różnicę energii odkształcenia sprężystego oraz pracy sił zewnętrznych:

$$\Pi = \Phi - L = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \left[\iiint_V b_i u_i dV + \iint_{S_q} q_i u_i dS \right]$$

Wielkość ta może być uważana za **funkcjonał** zależny od **funkcji rozkładu pola przemieszczenia**. Nazywamy go **funkcjonałem Lagrange'a**:

$$\Pi[\mathbf{u}] = \iiint_V \frac{1}{8} S_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}) (u_{i,j} + u_{j,i}) dV - \left[\iiint_V b_i u_i dV + \iint_{S_q} q_i u_i dS \right]$$

Wariacja tego funkcjonału może być obliczona następująco:

$$\delta \Pi = \left. \frac{d}{d\alpha} \Pi[\mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}] \right|_{\alpha=0}$$

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Wariacja całkowitej energii potencjalnej:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \left. \frac{d}{d\alpha} \Pi[\mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}] \right|_{\alpha=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{4} \mathbf{S}_{ijkl} [(u_k + \alpha \delta u_k)_{,l} + (u_l + \alpha \delta u_l)_{,k}] [(u_i + \alpha \delta u_i)_{,j} + (u_j + \alpha \delta u_j)_{,i}] dV \right|_{\alpha=0} - \\ &\quad - \left. \frac{d}{d\alpha} \left[\iiint_V b_i (u_i + \alpha \delta u_i) dV + \iint_{S_q} q_i (u_i + \alpha \delta u_i) dS \right] \right|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

Wykonujemy różniczkowanie względem zmiennych niezależnych i grupujemy wyrazy

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \left. \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{4} \mathbf{S}_{ijkl} [(u_{k,l} + u_{l,k}) + \alpha (\delta u_{k,l} + \delta u_{l,k})] [(u_{i,j} + u_{j,i}) + \alpha (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})] dV \right|_{\alpha=0} - \\ &\quad - \left. \frac{d}{d\alpha} \left[\iiint_V (b_i u_i + \alpha b_i \delta u_i) dV + \iint_{S_q} (q_i u_i + \alpha q_i \delta u_i) dS \right] \right|_{\alpha=0} \end{aligned}$$

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Wykorzystujemy **związki geometryczne** (definicję tensora małych odkształceń):

$$\delta \Pi = \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2} \iiint_V \mathfrak{S}_{ijkl} [\varepsilon_{kl} + \alpha \delta \varepsilon_{kl}] [\varepsilon_{ij} + \alpha \delta \varepsilon_{ij}] dV - \left[\iiint_V (b_i u_i + \alpha b_i \delta u_i) dV + \iint_{S_q} (q_i u_i + \alpha q_i \delta u_i) dS \right] \Big|_{\alpha=0}$$

Mnożymy wyrażenia pod pierwszą całką:

$$\delta \Pi = \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{2} \iiint_V \mathfrak{S}_{ijkl} [\varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \alpha (\delta \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij}) + \alpha^2 \delta \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij}] dV - \left[\iiint_V (b_i u_i + \alpha b_i \delta u_i) dV + \iint_{S_q} (q_i u_i + \alpha q_i \delta u_i) dS \right] \Big|_{\alpha=0}$$

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Różniczkujemy względem α :

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \mathfrak{S}_{ijkl} [(\delta \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij}) + 2 \alpha \delta \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij}] dV - \left[\iiint_V b_i \delta u_i dV + \iint_{S_q} q_i \delta u_i dS \right] \Big|_{\alpha=0}$$

Podstawiamy $\alpha = 0$:

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \mathfrak{S}_{ijkl} (\delta \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij}) dV - \left[\iiint_V b_i \delta u_i dV + \iint_{S_q} q_i \delta u_i dS \right]$$

Korzystamy z **symetrii tensora sztywności** (korzystamy ze **związków konstytutywnych dla materiału liniowo-sprężystego!**):

$$\delta \Pi = \iiint_V \mathfrak{S}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV - \left[\iiint_V b_i \delta u_i dV + \iint_{S_q} q_i \delta u_i dS \right]$$

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Dla materiału liniowo-sprężystego:

$$\delta \Pi = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \left[\iiint_V b_i \delta u_i dV + \iint_{S_q} q_i \delta u_i dS \right]$$

Zgodnie z [zasadą przemieszczeń wirtualnych](#):

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \left[\iiint_V b_i \delta u_i dV + \iint_{S_q} q_i \delta u_i dS \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

To oznacza, że:

- pierwsza wariacja całkowitej energii potencjalnej jest zerowa
- całkowita energia potencjalna przyjmuje wartość stacjonarną,
- dla **przemieszczenia rzeczywistego** całkowita energia potencjalna spełnia **warunki konieczne** wystąpienia **ekstremum lokalnego**.

To, czy energia przyjmuje wartość ekstremalną zależy będzie od znaku drugiej wariacji.

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Druga wariacja całkowitej energii potencjalnej:

$$\delta^2 \Pi = \frac{d^2}{d\alpha^2} \Pi[\mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}] \Big|_{\alpha=0} = \iiint_V \mathbf{S}_{ijkl} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} dV > 0$$

Dodatniość powyższego wyrażenia wynika z **dodatniej określoności tensora sztywności**, co jest konsekwencją **II zasady termodynamiki**. Gdyby tak nie było materiał mógłby mieć „ujemną sztywność” (ujemny moduł Kelvina) – dla pewnego stanu naprężenia ciało odkształcałoby się przeciwnie do kierunku obciążenia (sprężyna obciążona siłą rozciągającą kurczyłaby się – obciążona siłą ściskającą, wydłużałaby się). Możemy zatem sformułować:

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

Spośród wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń w ciele liniowo-sprężystym, rzeczywiste jest to i tylko to, dla którego **całkowita energia potencjalna układu** (funkcjonał Lagrange'a) **przyjmuje wartość minimalną**.

TWIERDZENIE LAGRANGE'A

UWAGI:

- Twierdzenie Lagrange'a obowiązuje jedynie w **liniowej teorii sprężystości**.
- W przypadku teorii dużych odkształceń lub w przypadku materiału o nieliniowej charakterystyce twierdzenie to nie musi być prawdziwe.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ