TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Dane jest ciało sprężyste zajmujące obszar V ograniczony powierzchnią $S = S_u \cup S_q$. Ciało obciążone jest na brzegu S_q układem zewnętrznych sił powierzchniowych $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ a na brzegu S_u zadane są przemieszczenia $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

Określamy zbiór statycznie dopuszczalnych pól naprężenia, tj. stanów naprężenia **spełniających statyczne warunki brzegowe** oraz **równania równowagi**:

$$\mathrm{X}_\sigma = \left\{ \breve{\boldsymbol{\sigma}} : \ \breve{\sigma}_{ij,j} + b_i = 0 \quad \wedge \quad \left(\mathbf{x} \in S_q \quad \Rightarrow \quad \breve{\sigma}_{ij} n_j = q_i \right) \right\}$$

Wśród nich jedno jest rzeczywistym polem naprężenia (**rozwiązaniem zagadnienia** teorii sprężystości). Oznaczmy je przez:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathrm{X}_\sigma$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Pozostałe statycznie dopuszczalne pola naprężeń zapiszemy jako:

$$\breve{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \alpha \boldsymbol{\tau}$$

Parametr α określa **jak bardzo dane pole statycznie dopuszczalne odbiega od pola rzeczywistego**.

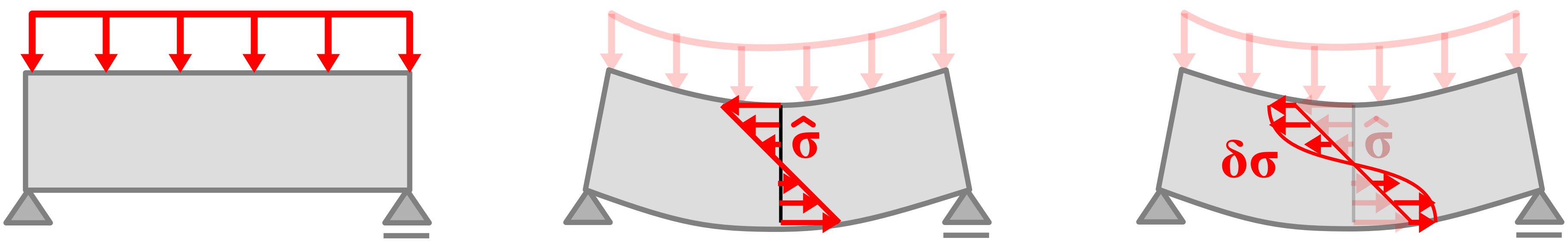
Definiujemy naprężenie wirtualne, jako **pole naprężenia, będące nieskończenie małym** (ale różnym od zera) **przyrostem pola naprężenia względem pola rzeczywistego**:

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \breve{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \alpha} \, d\alpha = \boldsymbol{\tau} \, d\alpha \,, \qquad d\alpha \to 0$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

rzeczywiste
pole naprężenia

rzeczywiste
pole naprężenia
+
naprężenie wirtualne



konfiguracja
odniesienia

konfiguracja
aktualna

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Zapiszmy **statyczne warunki brzegowe** na S_q : $\breve{\sigma}_{ij} n_j = q_i$

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) n_j = q_i$$

$$\underbrace{(\sigma_{ij} n_j)}_{= q_i} + \delta\sigma_{ij} n_j = q_i$$

$$\delta\sigma_{ij} n_j = 0$$

Pole **naprężeń wirtualnych** spełnia **jednorodne statyczne warunki brzegowe** na S_q :

Definiujemy **obciążenia wirtualne** następująco:

$$\boxed{\delta q_i = \delta\sigma_{ij} n_j}$$

Zatem:

$$\boxed{\delta q_i = 0 \quad \text{na} \quad S_q}$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Zapiszmy **równania równowagi** dla **statycznie dopuszczalnego pola naprężenia**:

$$\breve{\sigma}_{ij,j} + b_i = 0$$

$$(\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})_{,j} + b_i = 0$$

Dla **rzeczywistego pola naprężeń** muszą być spełnione **równania równowagi**:

$$\underbrace{(\sigma_{ij,j} + b_i)}_{=0} + \delta\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\boxed{\delta\sigma_{ij,j} = 0}$$

Naprężenie wirtualne spełniać będzie **jednorodne równania równowagi**, jeśli tylko **wariacja zewnętrznych sił objętościowych będzie zerowa:** $\delta b_i = 0$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Zapiszmy **równania równowagi** dla **naprężenia wirtualnego:**

$$\delta\sigma_{ij,j}=0$$

Obliczmy **iloczyn skalarny** tego wyrażenia z **przemieszczeniem rzeczywistym:**

$$\delta\sigma_{ij,j}u_i=0$$

Scałkujmy to wyrażenie:

$$\iiint_V \delta\sigma_{ij,j}u_i\,\mathrm{d}V=0$$

Zastosujmy **wzór na pochodną iloczynu**:

$$\iiint_V (\delta\sigma_{ij}u_i)_{,j}-\delta\sigma_{ij}u_{i,j}\,\mathrm{d}V=0$$

Z **twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iint_S \delta\sigma_{ij}n_j u_i\,\mathrm{d}S-\iiint_V \delta\sigma_{ij}u_{i,j}\,\mathrm{d}V=0$$

Z definicji **obciążenia wirtualnego**:

$$\iint_S \delta q_i u_i\,\mathrm{d}S-\iiint_V \delta\sigma_{ij}u_{i,j}\,\mathrm{d}V=0$$

Z **symetrii naprężenia wirtualnego**:

$$\iint_S \delta q_i u_i\,\mathrm{d}S-\iiint_V \delta\sigma_{ij}\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2}\,\mathrm{d}V=0$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Ponieważ **pole przemieszczeń** jest polem **rzeczywistym**, zatem **spełnia związki kinematyczne**:

$$\iint\limits_S \delta q_i u_i \,\mathrm{d}S - \iiint\limits_V \delta\sigma_{ij} \underbrace{\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2}}_{\varepsilon_{ij}} \mathrm{d}V = 0$$

Otrzymujemy:

$$\boxed{\iint\limits_S \delta q_i u_i \,\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V \qquad \forall \delta\sigma_{ij}}$$

To znaczy, że:

> **Praca** dowolnego **naprężenia wirtualnego** na **odkształceniach rzeczywistych** jest **równa pracy obciążenia wirtualnego** (odpowiadającego polu naprężenia wirtualnego) **na przemieszczeniach rzeczywistych**.

Równość prac wirtualnych jest zatem warunkiem koniecznym jaki musi spełniać **rzeczywiste pole przemieszczenia** i **odpowiadające mu pole odkształcenia** dla **dowolnego pola naprężeń wirtualnych** i odpowiadających mu obciążeń wirtualnych.

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Sprawdźmy, czy jest to również warunek wystarczający:

Zakładamy, że **dla dowolnego** $\delta\sigma_{ij}$ **zachodzi**:

$$\iint_S \delta q_i u_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V$$

Z definicji **obciążenia wirtualnego**:

$$\iint_S \delta\sigma_{ij} n_j u_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V$$

Z **twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iiint_V \left(\delta\sigma_{ij} u_i\right)_{,j} \mathrm{d}V = \iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V$$

Ze wzoru na **pochodną iloczynu**:

$$\iiint_V \left(\delta\sigma_{ij,j} u_i + \delta\sigma_{ij} u_{i,j}\right) \mathrm{d}V = \iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V$$

Naprężenie wirtualne spełnia **równania równowagi**: $\delta\sigma_{ij,j} = 0$

z czego wynika:

$$\iiint_V \delta\sigma_{ij} u_{i,j}\,\mathrm{d}V - \iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V = 0$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Z **symetrii tensora naprężenia**:

$$\iiint_V \delta\sigma_{ij} \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \mathrm{d}V - \iiint_V \delta\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V = 0$$

$$\iiint_V \delta\sigma_{ij} \left[\frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \varepsilon_{ij} \right] \mathrm{d}V = 0$$

Wyrażenie po lewej stronie musi być tożsamościowo równe 0. **Całka po obszarze o mierze dodatniej będzie tożsamościowo równa 0, jeśli funkcja podcałkowa jest tożsamościowo równa 0**. Ponieważ zawiązek ten ma zachodzi **dla dowolnego naprężenia wirtualnego**, zatem równanie powyższe będzie spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}$$

tj. gdy spełnione będą związki geometryczne Cauchy'ego, zatem **równość prac wirtualnych** pociąga za sobą **spełnienie warunków geometrycznych**.

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Zapiszmy ponownie równanie:

$$\iint_S \delta\sigma_{ij} n_j u_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \delta\sigma_{ij} u_{i,j} \,\mathrm{d}V$$

Naprężenie wirtualne spełnia jednorodne statyczne warunki brzegowe, $\delta\sigma_{ij} n_j = 0$ na brzegu S_q. Zatem **całkowanie po** S_q daje **zerową wartość całki**, i **pozostaje tylko całkowanie po części brzegu** S_u, na którym **przemieszczenie jest równe** $\mathbf{g}(\mathbf{x})$**:**

$$\iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j g_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \delta\sigma_{ij} u_{i,j} \,\mathrm{d}V$$

Do całki po prawej stronie stosujemy **wzór na pochodną iloczynu**:

$$\iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j g_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \left[\left(\delta\sigma_{ij} u_i \right)_{,j} - \delta\sigma_{ij,j} u_i \right] \mathrm{d}V$$

Korzystamy z faktu że **naprężenie wirtualne spełnia równania równowagi**:

$$\iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j g_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \left(\delta\sigma_{ij} u_i \right)_{,j} \mathrm{d}V$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Z **twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j g_i \,\mathrm{d}S = \iint_{S} \delta\sigma_{ij} u_i n_j \,\mathrm{d}V$$

W prawej całce, całkowanie po części brzegu S_q daje wartość zerową z uwagi na **jednorodne warunki brzegowe, które spełnia naprężenie wirtualne**. Pozostaje zatem całkowanie po części brzegu S_u:

$$\iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j g_i \,\mathrm{d}S = \iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} u_i n_j \,\mathrm{d}V$$

$$\iint_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j (g_i - u_i) \,\mathrm{d}S = 0$$

Związek powyższy musi być spełniony **dla dowolnego naprężenia wirtualnego**, co pociąga za sobą:

$u_i = g_i$ na części brzegu S_u

tj. **spełnienie kinematycznych warunków brzegowych**.

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Możemy zatem sformułować następujące twierdzenie:

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby pewne **naprężenie statycznie dopuszczalne było naprężeniem rzeczywistym** jest, aby **praca obciążeń wirtualnych na przemieszczeniach rzeczywistych była równa pracy naprężeń wirtualnych na odkształceniach rzeczywistych dla dowolnego naprężenia wirtualnego** i odpowiadającego mu obciążenia wirtualnego:

$$\iint_S \delta q_i u_i \,\mathrm{d}S = \iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V \qquad \forall\,\delta\boldsymbol{\sigma}$$

$$\delta_{\boldsymbol{\sigma}} L_q = \delta_{\boldsymbol{\sigma}}\Phi \qquad \forall\,\delta\boldsymbol{\sigma}$$

ZASADA NAPRĘŻEŃ WIRTUALNYCH

$$\iint_S \delta q_i u_i \, \mathrm{d}S = \iiint_V \delta\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \, \mathrm{d}V \qquad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}$$

UWAGI:

- Twierdzenie to nazywa się niekiedy **zasadą prac wirtualnych w wariancie naprężeniowym**.
- Twierdzenie to obowiązuje jedynie dla **teorii małych odkształceń**.
- Twierdzenie obowiązuje **dla dowolnych związków konstytutywnych**.

TWIERDZENIE CASTIGLIANO

TWIERDZENIE CASTIGLIANO

Definiujemy całkowitą energię uzupełniającą układu (energię komplementarną) następująco:

$$\Psi = \Phi - L_q = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_S q_i u_i\,\mathrm{d}S$$

Wielkość ta może być uważana za **funkcjonał zależny od funkcji rozkładu tensora naprężenia** (funkcjonał Castigliano):

$$\Psi[\boldsymbol{\sigma}] = \iiint\limits_V \frac{1}{2}\mathsf{C}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_S \sigma_{ij}n_j u_i\,\mathrm{d}S$$

Jego **pierwsza wariacja** (względem rozkładu naprężenia) jest równa:

$$\delta\Psi[\boldsymbol{\sigma}] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\Psi[\boldsymbol{\sigma}+\alpha\boldsymbol{\delta}\sigma]\right|_{\alpha=0} = \iiint\limits_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V - \iint\limits_S \delta q_i u_i\,\mathrm{d}S$$

TWIERDZENIE CASTIGLIANO

Zgodnie z zasadą naprężeń wirtualnych mamy:

$$\iiint_V \delta\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V - \iint_S \delta q_i u_i\,\mathrm{d}S = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta\Psi[\boldsymbol{\sigma}] = 0$$

zatem:

- **pierwsza wariacja funkcjonału Castigliano jest zerowa**
- funkcjonał przyjmuje **wartość stacjonarną**
- funkcjonał spełnia **warunek konieczny** istnienia **ekstremum lokalnego**.

Druga wariacja funkcjonału Castigliano jest równa:

$$\delta^2\Psi[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2}\Psi[\boldsymbol{\sigma}+\alpha\boldsymbol{\delta\sigma}]\Bigg|_{\alpha=0} = \iiint_V \mathsf{C}_{ijkl}\,\delta\sigma_{ij}\,\delta\sigma_{kl}\,\mathrm{d}V$$

Jej wartość jest z pewnością **dodatnia** (co wynika z **dodatniej określoności tensora podatności**, co z kolei jest konsekwencją **II zasady termodynamiki**), zatem **funkcjonał dla rzeczywistego rozkładu naprężenia przyjmuje wartość** minimalną.

TWIERDZENIE CASTIGLIANO

Zachodzi zatem

TWIERDZENIE CASTIGLIANO

Spośród wszystkich **statycznie dopuszczalnych pól naprężeń** w ciele liniowo--sprężystym, **rzeczywiste jest to i tylko to**, dla którego **całkowita energia uzupełniająca układu** (funkcjonał Castigliano) **przyjmuje wartość minimalną**.

UWAGI:

- twierdzenie obowiązuje jedynie dla **liniowej teorii sprężystości**:
  - liniowość geometryczna – **teoria małych odkształceń**
  - liniowość fizyczna – **liniowy związek konstytutywny** uogólnionego prawa Hooke'a

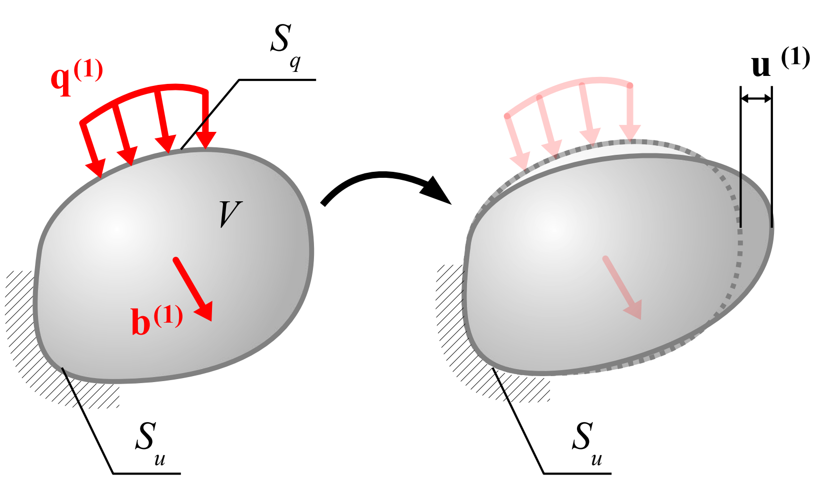
TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

Dane jest ciało sprężyste zajmujące obszar V ograniczony powierzchnią $S = S_u \cup S_q$. Na brzegu S_u zadane są **kinematyczne warunki brzegowe**. Na brzegu S_q zadane są **statyczne warunki brzegowe** (w szczególności może to być brzeg swobodny).

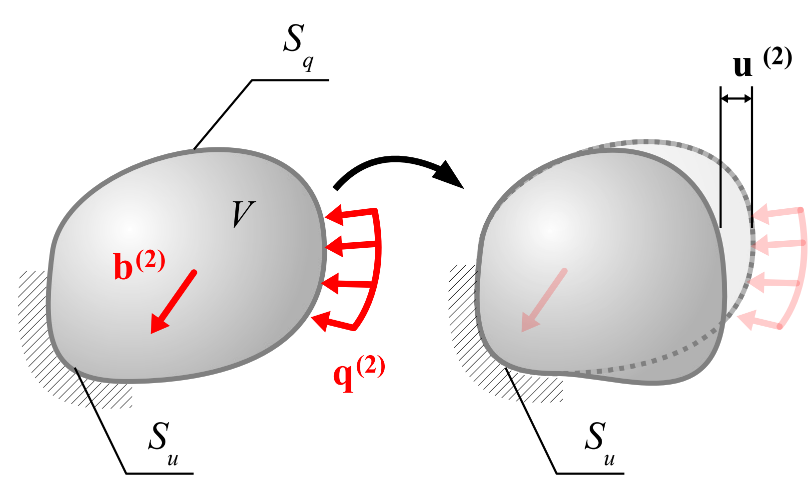
Rozważamy **dwa układy obciążenia** i **odpowiadające im pola przemieszczeń**:

1. UKŁAD OBCIĄŻENIA: $q_i^{(1)}\ ,\ b_i^{(1)}$



konfiguracja odniesienia konfiguracja aktualna

2. UKŁAD OBCIĄŻENIA: $q_i^{(2)}\ ,\ b_i^{(2)}$



konfiguracja odniesienia konfiguracja aktualna

TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

Obliczmy **iloczyn skalarny równania równowagi 1. układu sił z polem przemieszczenia odpowiadającym 2. układowi sił** i odwrotnie, a następnie scałkujmy otrzymane wyrażenia:

$$\iiint\limits_V \left(\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} + b_i^{(1)} u_i^{(2)}\right) \mathrm{d}V = 0 \qquad \iiint\limits_V \left(\sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)} + b_i^{(2)} u_i^{(1)}\right) \mathrm{d}V = 0$$

Prawe strony obydwu wyrażeń są takie same – możemy **przyrównać lewe ich strony**:

$$\iiint\limits_V \left(\sigma_{ij,j}^{(1)} u_i^{(2)} + b_i^{(1)} u_i^{(2)}\right) \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \left(\sigma_{ij,j}^{(2)} u_i^{(1)} + b_i^{(2)} u_i^{(1)}\right) \mathrm{d}V$$

Korzystamy ze wzoru na **pochodną iloczynu**:

$$\iiint\limits_V \left[\left(\sigma_{ij}^{(1)} u_i^{(2)}\right)_{,j} - \sigma_{ij}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} + b_i^{(1)} u_i^{(2)}\right] \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \left[\left(\sigma_{ij}^{(2)} u_i^{(1)}\right)_{,j} - \sigma_{ij}^{(2)} u_{i,j}^{(1)} + b_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] \mathrm{d}V$$

TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

Z **twierdzenia Greena – Gaussa – Ostrogradskiego**:

$$\iint_S \sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} \,\mathrm{d}S + \iiint_V \left[-\sigma_{ij}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} + b_i^{(1)} u_i^{(2)}\right] \mathrm{d}V = \iint_S \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)} \,\mathrm{d}S + \iiint_V \left[-\sigma_{ij}^{(2)} u_{i,j}^{(1)} + b_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] \mathrm{d}V$$

Z **symetrii tensora naprężenia**:

$$\iint_S \sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} \,\mathrm{d}S + \iiint_V \left[-\sigma_{ij}^{(1)} \frac{u_{j,i}^{(2)} + u_{i,j}^{(2)}}{2} + b_i^{(1)} u_i^{(2)}\right] \mathrm{d}V =$$

$$= \iint_S \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)} \,\mathrm{d}S + \iiint_V \left[-\sigma_{ij}^{(2)} \frac{u_{j,i}^{(1)} + u_{i,j}^{(1)}}{2} + b_i^{(2)} u_i^{(1)}\right] \mathrm{d}V$$

Z **addytywności całki**:

$$\iint_S \sigma_{ij}^{(1)} n_j u_i^{(2)} \,\mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \frac{u_{i,j}^{(2)} + u_{j,i}^{(2)}}{2} \,\mathrm{d}V + \iiint_V b_i^{(1)} u_i^{(2)} \,\mathrm{d}V =$$

$$\iint_S \sigma_{ij}^{(2)} n_j u_i^{(1)} \,\mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \frac{u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}}{2} \,\mathrm{d}V + \iiint_V b_i^{(2)} u_i^{(1)} \,\mathrm{d}V$$

TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

Pola naprężenia spełniają statyczne warunki brzegowe na S_q: $\sigma_{ij}^{(K)} n_j = q^{(K)} \qquad (K=1,2)$

Pola przemieszczenia spełniają związki kinematyczne: $\varepsilon_{ij}^{(K)} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(K)} + u_{j,i}^{(K)}) \qquad (K=1,2)$

Możemy zatem napisać:

$$\iint_S q_i^{(1)} u_i^{(2)} \mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \mathrm{d}V + \iiint_V b_i^{(1)} u_i^{(2)} \mathrm{d}V = \iint_S q_i^{(2)} u_i^{(1)} \mathrm{d}S - \iiint_V \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \mathrm{d}V + \iiint_V b_i^{(2)} u_i^{(1)} \mathrm{d}V$$

UWAGA:

- Wielkość $q^{(K)} = \sigma_{ij}^{(K)} n_j$ obliczana na **brzegu utwierdzonym** S_u to **układ przypowierzchniowych naprężeń wynikających z przemieszczeń wymuszonych kinematycznymi warunkami brzegowymi** – obciążenie takie możemy do pewnego stopnia utożsamiać z reakcjami podporowymi.

Równość możemy zapisać w postaci:

$$\iint_S q_i^{(1)} u_i^{(2)} \mathrm{d}S + \iiint_V b_i^{(1)} u_i^{(2)} \mathrm{d}V + \Theta = \iint_S q_i^{(2)} u_i^{(1)} \mathrm{d}S + \iiint_V b_i^{(2)} u_i^{(1)} \mathrm{d}V$$

gdzie:

$$\Theta = \iiint_V (\sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)}) \mathrm{d}V$$

TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

Korzystamy z uogólnionego prawa Hooke'a oraz z **symetrii wewnętrznych tensorów sprężystości**:

$$\Theta = \iiint_V \left(\sigma_{ij}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\mathrm{d}V = \iiint_V \left(\mathsf{S}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} - \mathsf{S}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\mathrm{d}V =$$

$$= \iiint_V \left(\mathsf{S}_{klij}\,\varepsilon_{kl}^{(2)}\varepsilon_{ij}^{(1)} - \mathsf{S}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\mathrm{d}V = \iiint_V \left(\mathsf{S}_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{kl}^{(1)} - \mathsf{S}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\mathrm{d}V = 0$$

Możemy zatem sformułować:

TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI PRAC BETTIEGO – MAXWELLA

Jeśli dane ciało **liniowo-sprężyste** poddamy działaniu **dwóch różnych układów obciążeń**, to praca sił układu pierwszego na przemieszczeniach wywołanych działaniem układu drugiego jest równa pracy sił układu drugiego na przemieszczeniach wywołanych działaniem układu pierwszego:

$$\iint_S q_i^{(1)} u_i^{(2)}\,\mathrm{d}S + \iiint_V b_i^{(1)} u_i^{(2)}\,\mathrm{d}V = \iint_S q_i^{(2)} u_i^{(1)}\,\mathrm{d}S + \iiint_V b_i^{(2)} u_i^{(1)}\,\mathrm{d}V$$

TWIERDZENIE BETTIEGO - MAXWELLA

UWAGI:

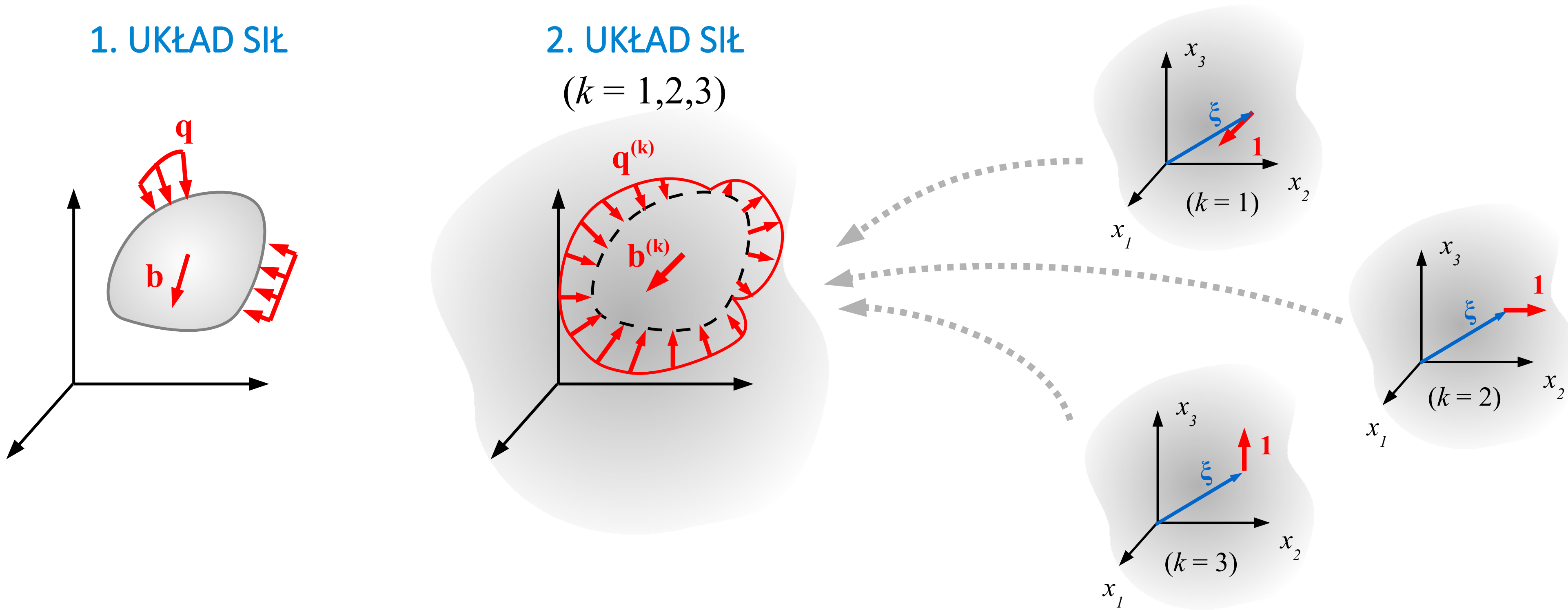
- twierdzenie o wzajemności prac Bettiego – Maxwella **obowiązuje jedynie dla materiałów liniowo sprężystych** (**materiałów Hooke'a**).

- twierdzenie to jest podstawą do sformułowania **twierdzeń o wzajemności** oraz **metod obliczeniowych** stosowanych w **mechanice budowli** (**mechanice układów prętowych**):
  - **twierdzenie o wzajemności prac**
  - **twierdzenie o wzajemności przemieszczeń**
  - **twierdzenie o wzajemności reakcji**
  - **twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń**
  - **wzór Maxwella – Mohra** (z wykorzystaniem ZPW w wariancie przemieszczeniowym)
  - **metoda sił**

WZÓR SOMIGLIANY

Szczególnym przykładem **zastosowania twierdzenia Bettiego – Maxwella** jest zastosowanie go do **3 par układów sił**. W każdej z tych par:

- jednym układem jest **układ rzeczywistych obciążeń zewnętrznych**,
- drugim jest **siła skupiona równoległa do k-tej osi układu współrzędnych, przyłożona w punkcie ξ** oraz układ **naprężeń** wynikających z **rozwiązania Kelvina** i odpowiadających **powierzchni zewnętrznej ciała rzeczywistego**



WZÓR SOMIGLIANY

Z **twierdzenia o wzajemności prac** mamy:

$$\iint_S q_i^{(k)} u_i \,\mathrm{d}S + \iiint_V b_i^{(k)} u_i \,\mathrm{d}V = \iint_S q_i u_i^{(k)} \,\mathrm{d}S + \iiint_V b_i u_i^{(k)} \,\mathrm{d}V$$

Po przekształceniach:

$$\iiint_V b_i^{(k)} u_i \,\mathrm{d}V = \iint_S \left(q_i u_i^{(k)} - q_i^{(k)} u_i\right) \mathrm{d}S + \iiint_V b_i u_i^{(k)} \,\mathrm{d}V$$

Siły masowe w **składowych zagadnieniach fundamentalnych Kelvina** są dane **dystrybucją delta Diraca**, która scałkowana w dowolną inną funkcją daje wartość tej funkcji w punkcie przyłożenia siły skupionej:

$$\iiint_V \delta_k(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) u_k(\boldsymbol{\xi}) \,\mathrm{d}V = u_k(\mathbf{x})$$

Co daje nam:

$$u_k = \iint_S \left(q_i u_i^{(k)} - q_i^{(k)} u_i\right) \mathrm{d}S + \iiint_V b_i u_i^{(k)} \,\mathrm{d}V$$

WZÓR SOMIGLIANY

Związek ten można zapisać w postaci:

$$\mathbf{u} = \int\limits_V \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \mathrm{d}V + \int\limits_S \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & u_3^{(2)} \\ u_1^{(3)} & u_2^{(3)} & u_3^{(3)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}_u} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \mathrm{d}S - \int\limits_S \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & q_3^{(1)} \\ q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & q_3^{(2)} \\ q_1^{(3)} & q_2^{(3)} & q_3^{(3)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}_q} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \mathrm{d}S$$

Lub inaczej:

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iiint\limits_V \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}V + \iint\limits_S \boldsymbol{\Gamma}_u(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}S - \iint\limits_S \boldsymbol{\Gamma}_q(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}S}$$

Wzór powyższy nosi nazwę wzoru Somigliany.

WZÓR SOMIGLIANY

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \iiint_V \mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}V + \iint_S \mathbf{\Gamma}_u(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}S - \iint_S \mathbf{\Gamma}_q(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\cdot\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}S$$

UWAGI:

- Jest to **układ równań całkowych** na składowe **pola przemieszczenia rzeczywistego**.
- Jeśli tylko znamy rozwiązanie fundamentalne zagadnienia liniowej teorii sprężystości, to **rozwiązanie dowolnego innego zagadnienia zależeć będzie wyłącznie od statycznych i kinematycznych warunków brzegowych**.
- Macierze $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma}_u$, $\mathbf{\Gamma}_q$ są **znane** – określa je **rozwiązanie Kelvina**.
- Macierz $\mathbf{\Gamma}$ określona jest na V. Macierze $\mathbf{\Gamma}_u$ oraz $\mathbf{\Gamma}_q$ określone są na S.
- Wzór Somigliany jest podstawą numerycznej metody rozwiązywania zagadnień liniowej teorii sprężystości, tzw. Metody Elementów Brzegowych. W metodzie tej **dyskretyzacji** podlega jedynie **brzeg obszaru**. **Numerycznie wyznacza się jedynie wartości brzegowe** – **wartości wewnątrz obszaru** wyznaczane są za pomocą **rozwiązań fundamentalnych**.

METODY RITZA

METODY RITZA

Pod pojęciem metod Ritza rozumieć będziemy metody, w których pewne **pole będące rozwiązaniem zagadnienia liniowej teorii sprężystości** będziemy **aproksymować** za pomocą założonych przez nas funkcji, zależnych od **skończonej liczby parametrów**.

W kontekście twierdzeń energetycznych liniowej teorii sprężystości mówi się o dwóch metodach:

- metoda Lagrange'a – Ritza
  - aproksymujemy **kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczenia**:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{u}_i(\mathbf{x})$$

  - współczynniki tej aproksymacji znajdujemy, korzystając z twierdzenia Lagrange'a **o minimum całkowitej energii potencjalnej**:

$$\Pi[\mathbf{u}] = \iiint_V \frac{1}{8} \mathsf{S}_{ijkl}(u_{k,l}+u_{l,k})(u_{i,j}+u_{j,i})\,\mathrm{d}V - \left[\iiint_V b_i u_i\,\mathrm{d}V + \iint_{S_q} q_i u_i\,\mathrm{d}S\right] \quad \rightarrow \quad \min$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i=1,2,\ldots,N \quad \rightarrow \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$$

METODY RITZA

Pod pojęciem metod Ritza rozumieć będziemy metody, w których pewne **pole będące rozwiązaniem zagadnienia liniowej teorii sprężystości** będziemy **aproksymować** za pomocą założonych przez nas funkcji, zależnych od **skończonej liczby parametrów**.

W kontekście twierdzeń energetycznych liniowej teorii sprężystości mówi się o dwóch metodach:

- metoda Castigliano – Ritza
  - aproksymujemy **statycznie dopuszczalne pole naprężenia**:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x})$$

  - współczynniki tej aproksymacji znajdujemy, korzystając z twierdzenia Castigliano **o minimum całkowitej energii komplementarnej**:

$$\Psi[\boldsymbol{\sigma}] = \iiint_V \frac{1}{2} \mathsf{C}_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \,\mathrm{d}V - \iint_S \sigma_{ij} n_j u_i \,\mathrm{d}S \qquad \rightarrow \qquad \min$$

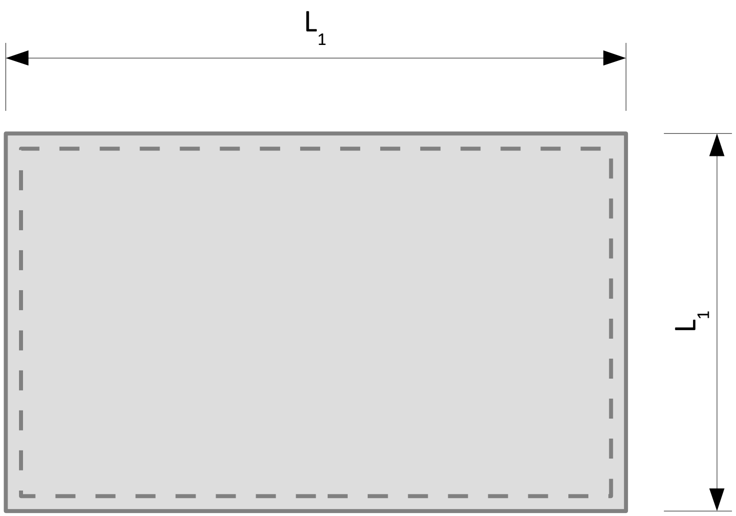
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,N \qquad \rightarrow \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$$

METODA RITZA – PRZYKŁAD

Wyznaczyć za pomocą **metody Lagrange'a – Ritza** przybliżony rozkład **ugięcia cienkiej, sprężystej płyty** prostokątnej, swobodnie podpartej, równomiernie obciążonej.

Parametry zadania:

- długość płyty $L_1 = 8\,\mathrm{m}$
- szerokość płyty $L_2 = 6\,\mathrm{m}$
- grubość płyty $h = 30\,\mathrm{cm}$
- moduł Younga $E = 32\,\mathrm{GPa}$
- współczynnik Poissona: $\nu = 0{,}2$
- gęstość obciążenia: $q = 10\,\mathrm{kN/m}$



METODA RITZA – PRZYKŁAD

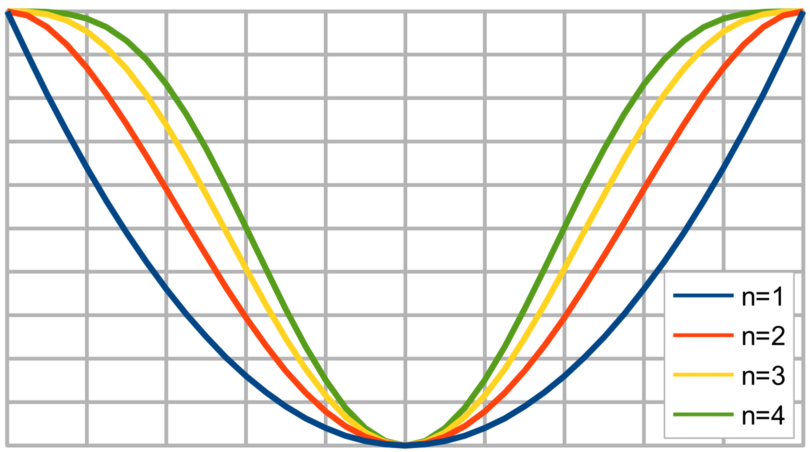
Aproksymujemy rozkład przemieszczenia:

$$u_{11}=\left[\left(\frac{L_1}{2}-x_1\right)\left(\frac{L_1}{2}+x_1\right)\right]^1 \qquad u_{21}=\left[\left(\frac{L_2}{2}-x_2\right)\left(\frac{L_2}{2}+x_2\right)\right]^1$$

$$u_{12}=\left[\left(\frac{L_1}{2}-x_1\right)\left(\frac{L_1}{2}+x_1\right)\right]^2 \qquad u_{22}=\left[\left(\frac{L_2}{2}-x_2\right)\left(\frac{L_2}{2}+x_2\right)\right]^2$$

$$u_{13}=\left[\left(\frac{L_1}{2}-x_1\right)\left(\frac{L_1}{2}+x_1\right)\right]^3 \qquad u_{23}=\left[\left(\frac{L_2}{2}-x_2\right)\left(\frac{L_2}{2}+x_2\right)\right]^3$$

$$u_{14}=\left[\left(\frac{L_1}{2}-x_1\right)\left(\frac{L_1}{2}+x_1\right)\right]^4 \qquad u_{24}=\left[\left(\frac{L_2}{2}-x_2\right)\left(\frac{L_2}{2}+x_2\right)\right]^4$$



$$\begin{aligned} u = {} & \alpha_{11}u_{11}u_{21} + \alpha_{12}u_{11}u_{22} + \alpha_{13}u_{11}u_{23} + \alpha_{14}u_{11}u_{24} + \\ & + \alpha_{21}u_{12}u_{21} + \alpha_{22}u_{12}u_{22} + \alpha_{23}u_{12}u_{23} + \alpha_{24}u_{12}u_{24} + \\ & + \alpha_{31}u_{13}u_{21} + \alpha_{32}u_{13}u_{22} + \alpha_{33}u_{13}u_{23} + \alpha_{34}u_{13}u_{24} + \\ & + \alpha_{41}u_{14}u_{21} + \alpha_{42}u_{14}u_{22} + \alpha_{43}u_{14}u_{23} + \alpha_{44}u_{14}u_{24} \end{aligned}$$

METODA RITZA – PRZYKŁAD

Przemieszczenia (ugięcie):

$$w = \alpha_{11} u_{11} u_{21} + \alpha_{12} u_{11} u_{22} + \alpha_{13} u_{11} u_{23} + \alpha_{14} u_{11} u_{24} + \alpha_{21} u_{12} u_{21} + \alpha_{22} u_{12} u_{22} + \alpha_{23} u_{12} u_{23} + \alpha_{24} u_{12} u_{24} + \\ + \alpha_{31} u_{13} u_{21} + \alpha_{32} u_{13} u_{22} + \alpha_{33} u_{13} u_{23} + \alpha_{34} u_{13} u_{24} + \alpha_{41} u_{14} u_{21} + \alpha_{42} u_{14} u_{22} + \alpha_{43} u_{14} u_{23} + \alpha_{44} u_{14} u_{24}$$

Odkształcenia:

$$\varepsilon_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot x_3, \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \cdot x_3, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{31} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot x_3,$$

Naprężenia:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) \cdot x_3 \qquad \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) \cdot x_3 \qquad \sigma_{31} = 0$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12} = -\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \cdot x_3 \qquad \sigma_{23} = 0$$

METODA RITZA – PRZYKŁAD

Całkowita energia potencjalna:

$$\Pi[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V - \left[\iiint_V b_i u_i\,\mathrm{d}V + \iint_{S_q} q_i u_i\,\mathrm{d}S\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_1=-\frac{L_1}{2}}^{\frac{L_1}{2}}\int_{x_2=-\frac{L_2}{2}}^{\frac{L_2}{2}}\int_{x_3=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}+2\left(\sigma_{23}\varepsilon_{23}+\sigma_{31}\varepsilon_{31}+\sigma_{12}\varepsilon_{23}\right)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 -$$

$$-\int_{x_1=-\frac{L_1}{2}}^{\frac{L_1}{2}}\int_{x_2=-\frac{L_2}{2}}^{\frac{L_2}{2}}\int_{x_3=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[0\cdot w]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 -$$

$$-\int_{x_1=-\frac{L_1}{2}}^{\frac{L_1}{2}}\int_{x_2=-\frac{L_2}{2}}^{\frac{L_2}{2}}[q\,w]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$

dr inż. Paweł Szeptyński

METODA RITZA – PRZYKŁAD

Zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a:

$$\Pi \;\rightarrow\; \min \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots,N$$

Otrzymujemy **układ równań liniowych na współczynniki** $\alpha_{ij}(i\,,\,j=1,2,3,4)$

$a11 = 5.801754686024868\ 10^{-6}$	$a31 = -3.103672759106117\ 10^{-9}$
$a12 = -1.505170024636658\ 10^{-7}$	$a32 = 3.269527853006765\ 10^{-10}$
$a13 = -4.951668552290187\ 10^{-9}$	$a33 = 6.422700908763642\ 10^{-11}$
$a14 = -1.499627766133912\ 10^{-10}$	$a34 = 2.457188083111769\ 10^{-12}$
$a21 = -8.021862334214811\ 10^{-8}$	$a41 = -4.453036506355453\ 10^{-11}$
$a22 = 5.066493675879956\ 10^{-9}$	$a42 = 7.815979494356788\ 10^{-12}$
$a23 = 2.598920163357196\ 10^{-10}$	$a43 = 2.198636144944349\ 10^{-12}$
$a24 = 3.618870844231519\ 10^{-12}$	$a44 = 1.021412676869167\ 10^{-13}$

maksymalne ugięcie płyty (w środku przęsła)

$$w(0{,}0) = 1{,}145\ \mathrm{mm}$$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ