TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

Wielkości służące opisowi **deformacji sprężysto – plastycznej**:

- wektor przemieszczenia: $\mathbf{u}$
- tensor odkształcenia całkowitego: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$
- tensor odkształcenia sprężystego: $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$
- tensor odkształcenia plastycznego: $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$
- tensor naprężenia: $\boldsymbol{\sigma}$
- tensor przyrostu odkształcenia całkowitego: $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$
- tensor przyrostu odkształcenia sprężystego: $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$
- tensor przyrostu odkształcenia plastycznego: $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$
- tensor przyrostu naprężenia: $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

Wielkości służące opisowi **deformacji sprężysto – plastycznej**:

- naprężenie hydrostatyczne: $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$
- odkształcenie objętościowe: $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk}$
- aksjator naprężenia: $p\mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$
- aksjator odkształcenia całkowitego: $\frac{\theta}{3}\mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$
- dewiator naprężenia: $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$
- dewiator odkształcenia całkowitego: $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3}\mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

(analogicznie definiujemy aksjatory i dewiatory odkształcenia sprężystego i plastycznego)

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

Równania rządzące zagadnieniem **deformacji sprężysto-plastycznej**:

- równania równowagi: $$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$$
- związki geometryczne: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$
- warunek plastyczności: $$f\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = 0$$
- **związki konstytutywne** w obszarze **deformacji sprężystej**: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$$ $$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \Lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$
- **związki konstytutywne** w obszarze **deformacji sprężysto-plastycznej**: $$\boldsymbol{\varepsilon} = g\left(\boldsymbol{\sigma}\right)$$

Warunki brzegowe:

- statyczne warunki brzegowe: $$\sigma_{ij} n_j = q_i$$
- kinematyczne warunki brzegowe: $$u_i = \hat{u}_i$$
- równanie równowagi na granicy obszaru uplastycznionego: $$\begin{cases} \sigma_{\mathbf{n}}^{(el)} = \sigma_{\mathbf{n}}^{(el-pl)} \\ \tau_{\mathbf{n}}^{(el)} = \tau_{\mathbf{n}}^{(el-pl)} \end{cases}$$

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

W **konfiguracji ciała** wyróżniamy:

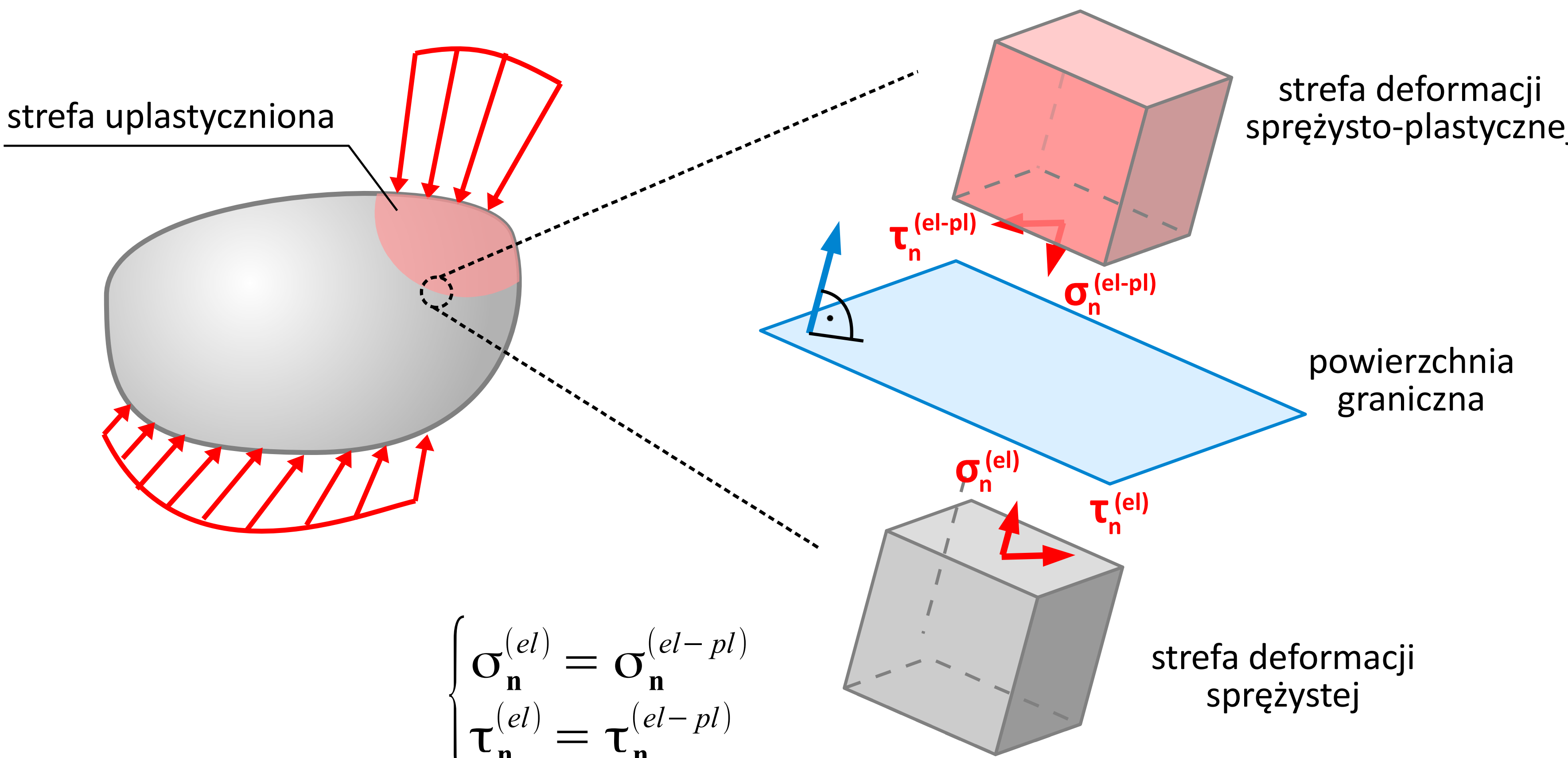
- obszar deformacji sprężystej
- obszar deformacji sprężysto – plastycznej
- powierzchnię graniczną pomiędzy powyższymi obszarami

W **obszarze deformacji sprężysto-plastycznej** oraz **punktach na powierzchni rozgraniczającej** obszary deformacji sprężystej i sprężysto-plastycznej **spełniony jest** warunek plastyczności.

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

Równowaga na granicy obszaru uplastycznionego:

Prawostronna i lewostronna wartość naprężenia normalnego prostopadłego do powierzchni granicznej oraz naprężenia stycznego w płaszczyźnie granicznej musi być taka sama.



$$\begin{cases} \sigma_{\mathbf{n}}^{(el)} = \sigma_{\mathbf{n}}^{(el-pl)} \\ \tau_{\mathbf{n}}^{(el)} = \tau_{\mathbf{n}}^{(el-pl)} \end{cases}$$

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

UWAGI:

- **Równania równowagi** oraz **związki geometryczne** są **takie same w obszarze deformacji sprężystej oraz deformacji sprężysto-plastycznej**. Są one takie same jak w teorii sprężystości – wynikają bowiem odpowiednio zasad dynamiki Newtona i z kinematyki bryły sztywnej.

- **Warunki brzegowe na powierzchni zewnętrznej** ciała określamy analogicznie jak w teorii sprężystości.

- Konieczne jest określenie **warunków zszycia na granicy między obszarem deformacji sprężystej a obszarem deformacji sprężysto-plastycznej**:

    - **Przemieszczenia** muszą zmieniać się w sposób **ciągły** (wartości jednostronne są równe)

    - **Naprężenia odpowiadające normalnej do powierzchni granicznej** między strefą deformacji sprężystej i strefą deformacji sprężysto-plastycznej muszą zmieniać się w sposób **ciągły** (wartości jednostronne są równe)

    - **Pozostałe składowe stanu naprężenia** mogą zmieniać się w sposób **nieciągły** – wartości **naprężeń w po stronie strefy deformacji sprężystej i po stronie strefy deformacji sprężysto-plastycznej mogą być różne**.

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

UWAGI:

- Kluczowa różnica dotyczy **związków konstytutywnych**.

  - Wskutek uplastycznienia **zmienia się związek między naprężeniem a odkształceniem całkowitym**.

  - Zakładamy, że cechy sprężyste materiału nie zmieniają się wskutek deformacji sprężystej. **Związek między naprężeniem a odkształceniem sprężystym pozostaje bez zmian**, w stosunku do związku obowiązującego w teorii sprężystości.

  - **Fundamentalne dla teorii plastyczności jest określenie związku między naprężeniem a odkształceniem plastycznym**.

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

W **teorii plastyczności** wyróżniamy dwa rodzaje procesów deformacji:

- procesy czynne – procesu obciążenia – **procesy nieodwracalne** (dyssypację energii związaną z powstawaniem i rozwojem odkształceń plastycznych). W czasie procesu czynnego **zmianie ulega zarówno tensor odkształceń sprężystych jak i tensor odkształceń plastycznych**. Dla procesów czynnych:

  - **Spełniony jest warunek plastyczności**

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

  - **ORAZ przyrost wartości lewej strony warunku plastyczności** związany z przyrostem naprężenia jest **dodatni** (interpretacja: **przyrost naprężenia powoduje przyrost odkształceń plastycznych**)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \geqslant 0$$

RÓWNANIA RZĄDZĄCE TEORII PLASTYCZNOŚCI

W **teorii plastyczności** wyróżniamy dwa rodzaje procesów deformacji:

- procesy bierne – procesy w których **nie dochodzi do** dyssypacji energii. Są to procesy **deformacji czysto sprężystej** lub procesy **odciążenia**. W czasie procesu biernego **zmianie ulega wyłącznie tensor odkształceń sprężystych**. Dla procesów biernych:

  - **nie został spełniony warunek plastyczności** (materiał jest w stanie sprężystym)

$$f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$$

  - **LUB warunek plastyczności jest spełniony**, ale **przyrost wartości lewej strony warunku plastyczności** związany z przyrostem naprężenia jest **ujemny** (interpretacja: **przyrost naprężenia nie powoduje przyrostu odkształceń plastycznych –** materiał jest w stanie granicznym**, początek** odciążenia)

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} < 0$$

MODELE ASYMPTOTYCZNEJ PLASTYCZNOŚCI

MODELE ASYMPTOTYCZNEJ PLASTYCZNOŚCI

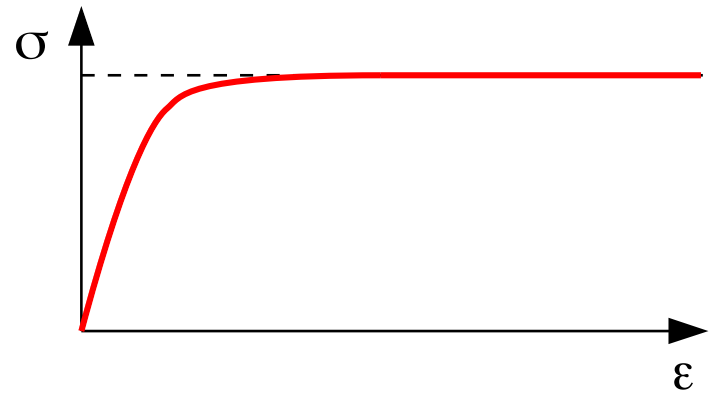
W **prostych stanach mechanicznych** (np. **rozciąganie**, **ścinanie**) i przy **obciążeniu monotonicznym**, w których do opisu deformacji wystarcza znajomość związku konstytutywnego między pojedynczą skalarną miarą naprężenia a pojedynczą skalarną miarą odkształcenia całkowitego, można stosować tzw. modele asymptotycznej plastyczności – **wzajemnie jednoznaczne nieliniowe związki między naprężeniem a odkształceniem**.

Modele te można właściwie interpretować jako **modele nieliniowej sprężystości**.

PRZYKŁAD 1:

Model Pragera

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\operatorname{arctgh}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)$$



MODELE ASYMPTOTYCZNEJ PLASTYCZNOŚCI

W **prostych stanach mechanicznych** (np. **rozciąganie**, **ścinanie**) i przy **obciążeniu monotonicznym**, w których do opisu deformacji wystarcza znajomość związku konstytutywnego między pojedynczą skalarną miarą naprężenia a pojedynczą skalarną miarą odkształcenia całkowitego, można stosować tzw. modele asymptotycznej plastyczności – **wzajemnie jednoznaczne nieliniowe związki między naprężeniem a odkształceniem**.

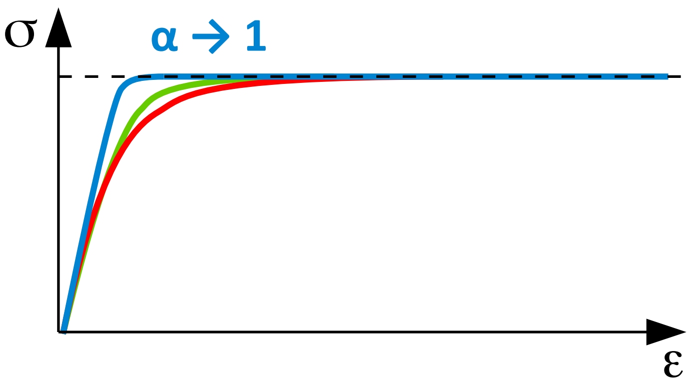
Modele te można właściwie interpretować jako **modele nieliniowej sprężystości**.

PRZYKŁAD 2:

Model Ylinena

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[\alpha\sigma - (1-\alpha)\sigma_0 \ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right)\right]$$

$$\alpha \in \langle 0\,;\,1\rangle$$



MODELE ASYMPTOTYCZNEJ PLASTYCZNOŚCI

W **prostych stanach mechanicznych** (np. **rozciąganie**, **ścinanie**) i przy **obciążeniu monotonicznym**, w których do opisu deformacji wystarcza znajomość związku konstytutywnego między pojedynczą skalarną miarą naprężenia a pojedynczą skalarną miarą odkształcenia całkowitego, można stosować tzw. modele asymptotycznej plastyczności – **wzajemnie jednoznaczne nieliniowe związki między naprężeniem a odkształceniem**.

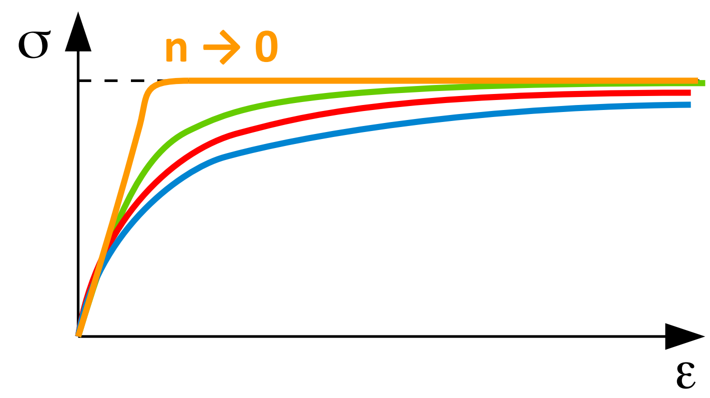
Modele te można właściwie interpretować jako **modele nieliniowej sprężystości**.

PRZYKŁAD 3:

Model Życzkowskiego

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{-n}$$

$$n \geqslant 0$$



ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Modele plastyczności, w których **związki konstytutywne** określają **jednoznaczny związek między tensorem naprężenia a tensorem odkształcenia**, nazywamy **modelami odkształceniowymi** (**deformacyjnymi**)

Najpowszechniej stosowanym modelem odkształceniowym jest tzw. **odkształceniowa teoria plastyczności Nádaia – Hencky'ego – Iliuszyna**.

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Założenia teorii Nádaia – Hencky'ego – Iliuszyna:

- **odkształcenie objętościowe jest wprost proporcjonalne do naprężenia hydrostatycznego**, a moduł sztywności objętościowej jest taki sam w stanie sprężystym i plastycznym.

$$\boxed{p = K\theta}$$

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$$ – naprężenie hydrostatyczne

$$\theta = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$$ – odkształcenie objętościowe (**dylatacja**)

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$ – moduł sztywności objętościowej (**moduł Helmholtza**)

- **naprężenie hydrostatyczne** jest **proporcjonalne** do normy **aksjatora naprężenia**
- **odkształcenie objętościowe** jest **proporcjonalne** do normy **aksjatora odkształcenia**

- związek powyższy to **związek konstytutywny między aksjatorami** (prawo zmiany objętości)

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Założenia teorii Nádaia – Hencky'ego – Iliuszyna:

- intensywność naprężenia σ_i jest funkcją wyłącznie intensywności odkształcenia ε_i ,

$$\boxed{\varepsilon_i = h(\sigma_i)}$$

tj. intensywność naprężenia nie zależy od odkształcenia objętościowego, a intensywność odkształcenia nie zależy od naprężenia hydrostatycznego.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 6(\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2+\sigma_{12}^2)}$$ – intensywność naprężenia

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + 6(\varepsilon_{23}^2+\varepsilon_{31}^2+\varepsilon_{12}^2)}$$ – intensywność odkształcenia

- **Intensywność naprężenia** jest **proporcjonalna** do **normy dewiatora naprężenia**
- **Intensywność odkształcenia jest proporcjonalna do normy dewiatora odkształcenia**

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Założenia teorii Nádaia – Hencky'ego – Iliuszyna:

- **Kierunki własne tensora naprężenia i tensora odkształcenia są takie same** (tensory te są współosiowe)
    - każdy tensor można rozłożyć w sposób jednoznaczny na **aksjator** i **dewiator**
    - **aksjatory są tensorami izotropowymi** (kulistymi) i każdy układ osi stanowi dla niego układ osi własnych
    - współosiowość tensorów naprężenia i odkształcenia jest zatem równoważna **współosiowości ich dewiatorów**.

WNIOSKI:

- Skoro dewiatory naprężenia i odkształcenia są współosiowe, a ich normy wiąże pewna funkcja, to funkcja ta wiąże w istocie te dewiatory.
- Funkcja $h(\sigma_i)$ ta określa **związek konstytutywny między dewiatorami** (prawo zmiany kształtu). Wydzielimy w nim część związaną z deformacją sprężystą i część związaną z deformacją plastyczną.

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Związek konstytutywny teorii Nádaia – Hencky'ego – Iliuszyna:

$$\begin{cases} e_{ij} = \left(\phi(s_i) + \dfrac{1}{2G}\right) s_{ij} \\ p = K\theta \end{cases}$$

Trzecia postać prawa Hooke'a

deformacja sprężysta:
$$\begin{cases} e_{ij}^{e} = \dfrac{s_{ij}}{2G} & \text{(prawo zmiany kształtu)} \\ p = K\theta & \text{(prawo zmiany objętości)} \end{cases}$$

deformacja plastyczna: $\varepsilon_{ij}^{pl} = e_{ij}^{pl} = \phi(s_i)\, s_{ij}$

UWAGI:

- **Odkształcenie całkowite** dzielimy na odkształcenie **sprężyste** i **plastyczne**: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}$
- **Związek konstytutywny** dla deformacji **sprężystej** to **uogólnione prawo Hooke'a**.
- **Związek konstytutywny** dla deformacji **plastycznej** to związek między **dewiatorami**.
- Plastyczne odkształcenie objętościowe jest zerowe: $\mathrm{tr}\left(\varepsilon_{ij}^{pl}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij}^{pl} = e_{ij}^{pl}$
- Funkcja ϕ jest równa:

$$\begin{cases} \phi(s_i) > 0 & \text{dla procesów czynnych} \\ \phi(s_i) = 0 & \text{dla procesów biernych} \end{cases}$$

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

UWAGI:

- W przypadku **odciążenia po uplastycznieniu** wyznaczamy przyrost naprężeń i odkształceń względem stanu, w którym zaczął się proces bierny. Przyrosty te obliczane są na podstawie wyprowadzonego związku konstytutywnego po przyjęciu $\phi = 0$, a następnie dodane do stanu, w którym rozpoczęło się odciążenie.

- **Modele odkształceniowe nie mają możliwości poprawnego opisania procesów wielokrotnego obciążenia i odciążenia**.
  - Przypuśćmy, że doprowadziliśmy do uplastycznienia, które skutkuje pojawieniem się pewnych odkształceń trwałych:
  - Odciążamy materiał tak, aby warunek plastyczności nie był nigdzie spełniony. Odkształcenia plastyczne pozostają.
  - Ponownie obciążamy materiał, ale w taki sposób, aby dewiator naprężenia w chwili ponownego uplastycznienia był inny niż za poprzednim razem, gdy materiał został uplastyczniony. Zgodnie z przyjętym modelem plastyczności nowe odkształcenia plastyczne są również odmienne. Takie rozwiązanie nie ma sensu.

ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

UWAGI:

- **Modele odkształceniowe** można z powodzeniem stosować do monotonicznych procesów deformacji sprężysto-plastycznej, tj. takich w których **stosunki wszystkich składowych tensora naprężenia i tensora odkształcenia pozostają niezmienione**, a zmienia się jedynie norma tych tensorów

- **Modele odkształceniowe** są **prostsze w analizie** i **mniej kosztowne obliczeniowo** od modeli przyrostowych.

PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Alternatywę dla modeli odkształceniowych stanowią modele przyrostowe. Dowolny **związek konstytutywny** o ogólnej postaci:

$$\varepsilon = F(\sigma)$$

Można zapisać w równoważnej **postaci przyrostowej**:

$$\mathrm{d}\varepsilon = \underbrace{\frac{\mathrm{d}F(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}}_{G}\mathrm{d}\sigma = G(\sigma, \mathrm{d}\sigma)$$

W modelach przyrostowych zakłada się, że:

> **przyrost odkształceń plastycznych zależy jedynie od bieżącego stanu naprężenia i nie zależy od przyrostu naprężenia**.

- Wielkość przyrostu odkształcenia plastycznego przy danym obciążeniu zależy od tego, jaka jest wielkość naprężenia i jego orientacja względem możliwych płaszczyzn poślizgu i bliźniakowania.
- Nie zależy ona od tempa, w jakim przyrasta naprężenie (od wielkości przyrostu w danej chwili).
- Odkształcenia plastyczne w chwili kolejnej, zależeć będą od nowego stanu naprężenia (nie od przyrostu)

PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Ogólna postać **związku konstytutywnego** w przyrostowych modelach plastyczności ma postać:

$$\boxed{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij}^{pl} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}}$$

gdzie:

$\Psi(\boldsymbol{\sigma})$ – potencjał plastyczny

$\mathrm{d}\lambda$ – **parametr skalarny**, który uwzględnia własności mechaniczne materiału (sztywność, wzmocnienie), jak również historię procesu deformacji.

$$\begin{cases} \mathrm{d}\lambda > 0 & \text{dla procesów czynnych} \\ \mathrm{d}\lambda = 0 & \text{dla procesów biernych} \end{cases}$$

- jest to związek między **przyrostem odkształceń plastycznych** a **naprężeniem**
- potencjał plastyczny pełni w związkach konstytutywnych po uplastycznieniu podobną rolę jak potencjał sprężysty w związkach konstytutywnych teorii sprężystości.

PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Ogólna postać **związku konstytutywnego** w przyrostowych modelach plastyczności ma postać:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{pl} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}$$

- jeśli **potencjał plastyczny ma postać matematyczną identyczną z warunkiem plastyczności**,

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$$

  to mówimy wtedy o stowarzyszonym prawie płynięcia **plastycznego**.

- Dla **stowarzyszonego prawa płynięcia** prawdziwe jest następujące twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania:

> Jeśli odkształcenia są wystarczająco małe, to dla modelu przyrostowego ze **stowarzyszonym prawem płynięcia**, dla **zadanych statycznych warunków brzegowych rozkład naprężeń w ciele sprężysto-plastycznym** jest dany jednoznacznie.

PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Najpowszechniej stosowanym ogólnym przyrostowym modelem plastyczności jest teoria płynięcia plastycznego Prandtla – Reussa.

- zakłada się **stowarzyszone prawo płynięcia:**
- przyjmuje się **warunek plastyczności Hubrea – Misesa:**

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma})$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \sigma_0$$

Przyrost odkształceń plastycznych:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\tilde{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda\, s_{ij}$$

Przyrost odkształceń sprężystych:

$$d\varepsilon_{kk}^{el} = \frac{1}{3K} d\sigma_{kk}$$

$$d e_{ij}^{el} = \frac{1}{2G} d s_{ij}$$

przyrost odkształceń plastycznych
jest proporcjonalny do dewiatora naprężenia

Związek konstytutywny teorii Prandtla – Reussa:

$$\boxed{\begin{cases} d\varepsilon_{ij} = d\lambda\, s_{ij} + \dfrac{1}{2G} d s_{ij} \\ d\varepsilon_{kk} = \dfrac{1}{3K} d\sigma_{kk} \end{cases}}$$

PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Szczególnym przypadkiem teorii Prandtla – Reussa jest wcześniejsza teoria płynięcia plastycznego Lévy'ego – Misesa, która w identyczny sposób formułuje związek konstytutywny dla odkształceń plastycznych, dotyczy jednak **modelu ciała sztywno-plastycznego**: odkształcenia sprężyste są zerowe.

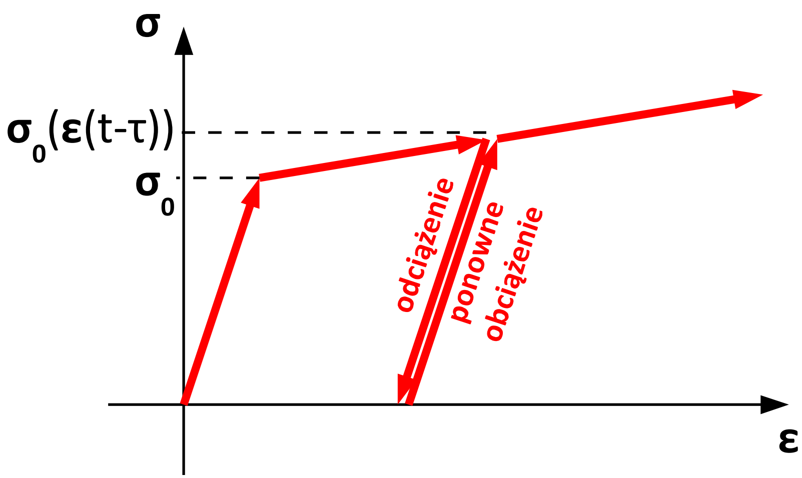
$$\boxed{\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij}^{pl} = \mathrm{d}\,\lambda\, s_{ij}}$$

Jest to teoria prostsza w analizie i często wykorzystywana również w symulacjach numerycznych, szczególnie w takich przypadkach, w których **deformacja sprężysta jest wielokrotnie mniejsza niż deformacja plastyczna** (np. przemysłowe procesy **obróbki plastycznej** metali).

MODELE WZMOCNIENIA

MODELE WZMOCNIENIA

Zjawisko wzmocnienia to sytuacja, w której **do kontynuowania procesu deformacji plastycznej konieczne jest przyłożenie większych obciążeń** (naprężeń). Spowodowane jest ono wzajemnym blokowaniem ruchu dyslokacji podobnego typu skoncentrowanych w niewielkim obszarze.



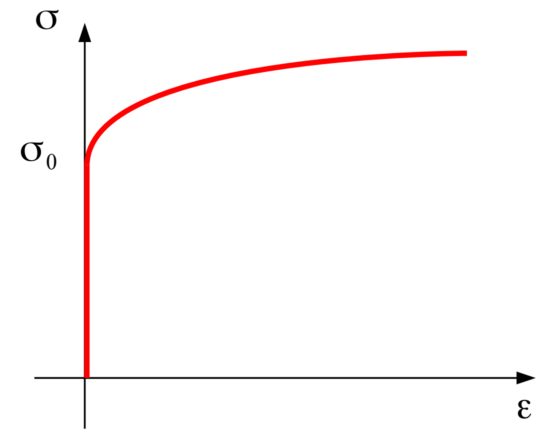
- Po odciążeniu materiału, który podlegał już deformacji plastycznej ze wzmocnieniem, **powtórne uplastycznienie następuje już dla wyższej wartości naprężenia granicznego**.
- W tym sensie modelowanie matematyczne zjawiska umocnienia polega na przyjęciu, że **warunek plastyczności nie jest stały, ale że jego postać zależy od historii deformacji**.
- Modelowanie tego typy może być ilustrowane geometrycznie poprzez fakt, **przemieszczenia i zmiany kształtu powierzchni plastyczności.**

MODELE WZMOCNIENIA

Zjawisko **wzmocnienia** można modelować w prostych stanach obciążenia przy obciążeniu monotonicznym za pomocą **wzorów empirycznych**:

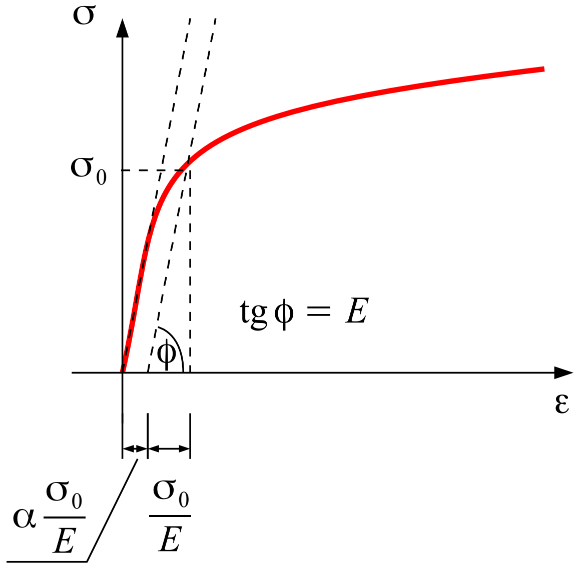
- wzór **Ludwika**

$$\sigma = \sigma_0 + K\left(\varepsilon^{pl}\right)^n$$



- wzór **Ramberga – Osgooda**:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{n-1}$$



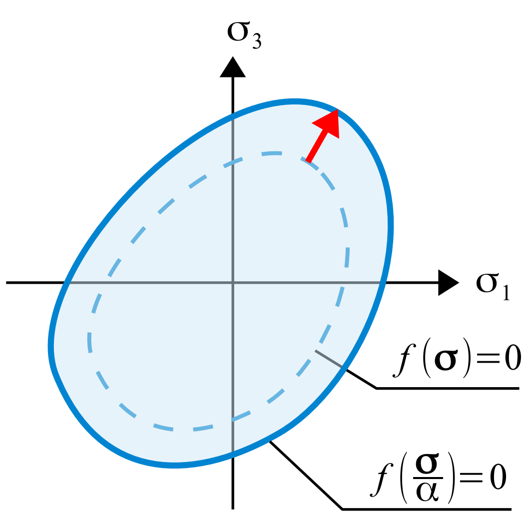
MODELE WZMOCNIENIA

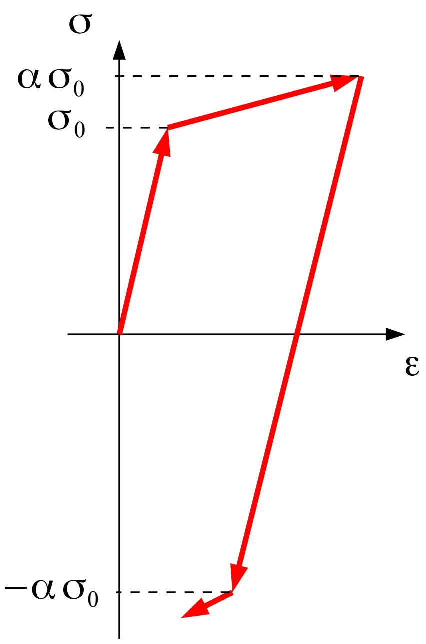
WZMOCNIENIE IZOTROPOWE:

- **powierzchnia plastyczności zmienia swoje wymiary równomiernie** w każdym kierunku, ale **nie zmienia kształtu**.

$$\boxed{f(\boldsymbol{\sigma})=0 \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\alpha}\right)=0\,, \quad \alpha\geqslant 1}$$

- **Wartość bezwzględna naprężenia granicznego w stanach przeciwnych wzrasta tak samo**.





MODELE WZMOCNIENIA

WZMOCNIENIE IZOTROPOWE:

Warunek plastyczności dla materiału wykazującego wzmocnienie można zapisać w postaci:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = c$$

Parametr c **uwzględnia historię deformacji**. Modele uwzględnienia historii deformacji to n.p.:

- **Model wzmocnienia izotropowego Taylora – Quinney'a**
  - wielkość wzmocnienia zależy od **pracy naprężeń na odkształceniach plastycznych**

$$c = c(W_{pl}) \qquad \text{gdzie} \qquad W_{pl} = \int \sigma_{ij} \, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{pl}$$

- **Model wzmocnienia izotropowego Odquista – Hilla**
  - wielkość wzmocnienia zależy od **całkowitej drogi ścieżki odkształcenia plastycznego**

$$c = c(d_{pl}) \qquad \text{gdzie} \qquad d_{pl} = \int \sqrt{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{pl} \, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{pl}}$$

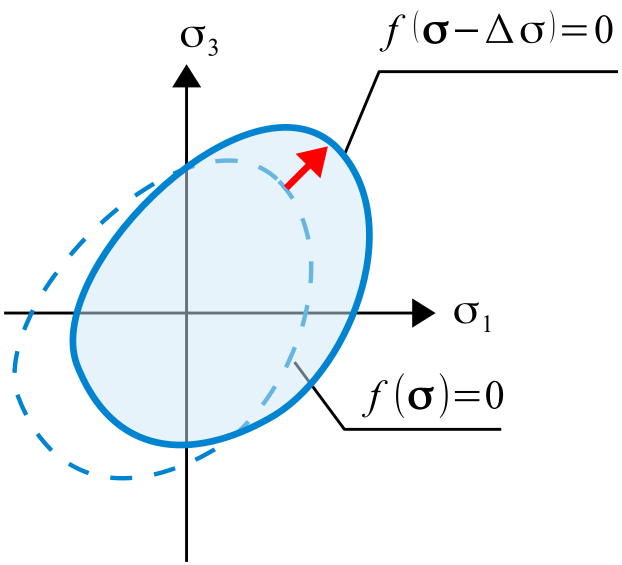
MODELE WZMOCNIENIA

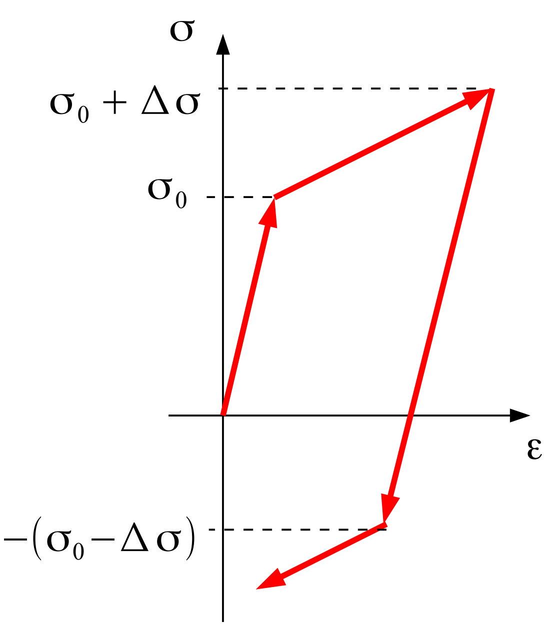
WZMOCNIENIE KINEMATYCZNE:

- powierzchnia **plastyczności przemieszcza się** w przestrzeni naprężeń głównych, ale **zachowuje swój kształt i rozmiar**.

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \rightarrow \quad f(\boldsymbol{\sigma} - \Delta\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

- Jeśli **wartość bezwzględna w pewnym stanie naprężenia rośnie**, to **wartość bezwzględna naprężenia granicznego w stanie przeciwnym maleje o tę samą wartość**.





MODELE WZMOCNIENIA

WZMOCNIENIE KINEMATYCZNE:
Warunek plastyczności dla materiału wykazującego wzmocnienie można zapisać w postaci:

$$f(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

Wielkość $\boldsymbol{\alpha}$ **może uwzględniać historię deformacji** i można ją wyznaczać z wykorzystanie różnych modeli:

- Model wzmocnienia kinematycznego Pragera

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = c\,\mathrm{d}\mathbf{e}^{pl} \qquad \text{gdzie} \qquad c = \mathrm{const.}$$

c jest stałą charakterystyczną dla materiału

- Model wzmocnienia kinematycznego Zieglera

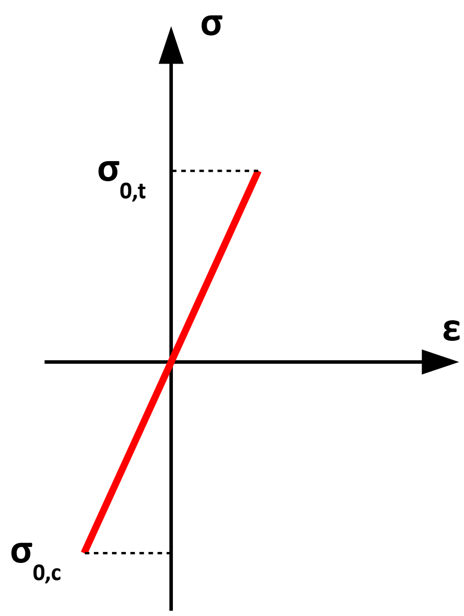
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\alpha})\mathrm{d}\mu \quad \text{gdzie} \quad \mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\mu(\mathrm{d}\mathbf{e}^{pl})$$

$\mathrm{d}\mu$ jest funkcją przyrostu odkształcenia plastycznego charakterystyczną dla materiału

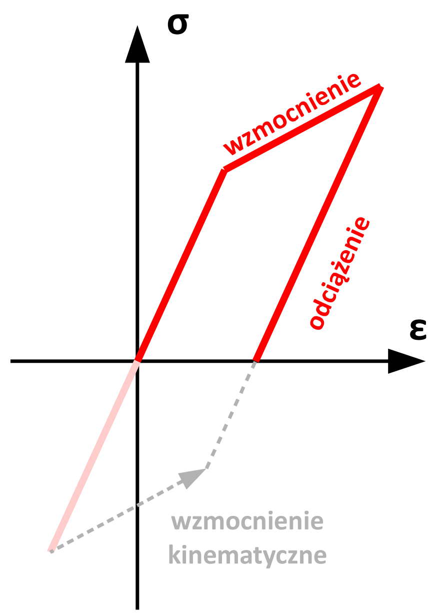
MODELE WZMOCNIENIA

Efekt Bauschingera – w wyniku deformacji plastycznej z odciążeniem w materiale pozostają **naprężenia resztkowe** związane z nowym stanem równowagi w niejednorodnej strukturze materiału. Ich obecność sprawia, że gdy materiał zostanie ponownie obciążony w odmienny sposób niż pierwotnie, **mechanizmy deformacji plastycznej inicjowane są dla innych wartości naprężenia granicznego**.

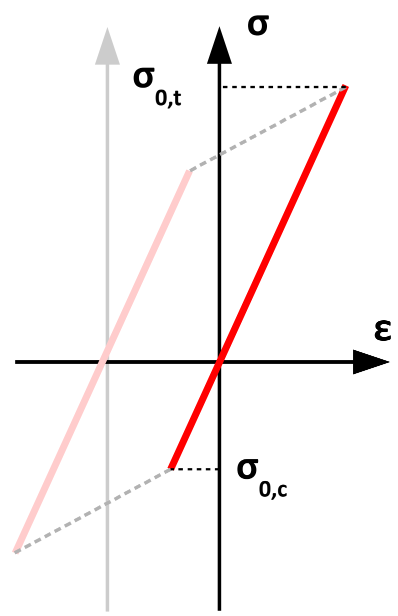
Pierwotna charakterystyka materiału



Deformacja plastyczna ze wzmocnieniem i odciążeniem



Wtórna (pozorna) charakterystyka materiału



MODELE WZMOCNIENIA

WZMOCNIENIE MIESZANE – **złożenie wzmocnienia kinematycznego i izotropowego**:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad f\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\alpha} - \Delta\boldsymbol{\sigma}\right) = 0$$

WZMOCNIENIE ANIZOTROPOWE – powierzchnia **zmienia swój kształt i położenie w przestrzeni** naprężeń.

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

Postulat stateczności Druckera:

W materiale statecznym **praca wykonana przez przyrost zewnętrznych sił powierzchniowych** $\Delta\mathbf{q}$ oraz **zewnętrznych sił objętościowych** $\Delta\mathbf{b}$ na spowodowanych przez nie **przyrostach przemieszczenia** $\Delta\mathbf{u}$ jest nieujemna.

$$W = \int_{t_0}^{t_k} \left[\iint_S (\Delta\mathbf{q}\,\Delta\dot{\mathbf{u}})\,\mathrm{d}S + \iiint_V (\Delta\mathbf{b}\,\Delta\dot{\mathbf{u}})\,\mathrm{d}V \right] \mathrm{d}t \geqslant 0$$

- Jeśli rozważany **przedział czasu jest dowolnie duży**, to mówimy o „stateczności w dużym”
- Jeśli rozważany **przedział czasu jest nieskończenie mały**, tj. $(t_k - t_0) \to 0$, to mówimy o „stateczności w małym”

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

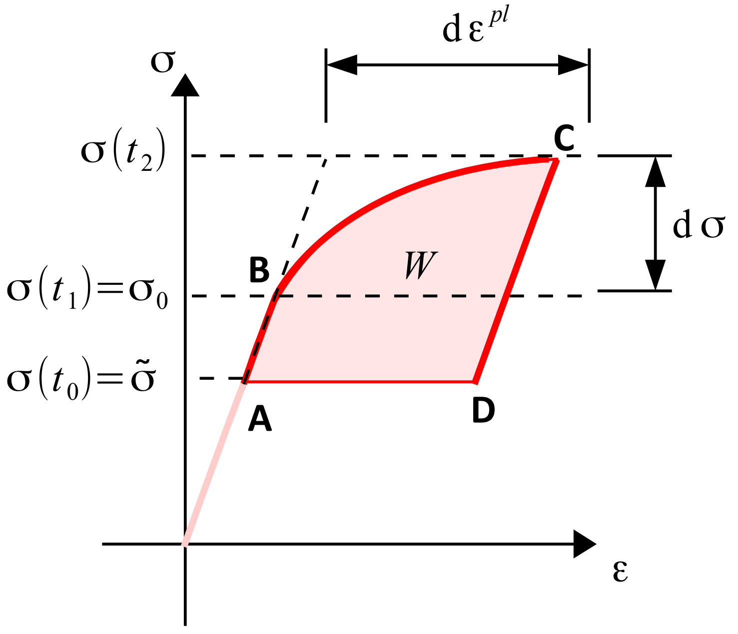
Rozważamy **cykl obciążenia z odciążeniem**:

1) W chwili t_0 dany jest stan naprężenia $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ odpowiadający początkowym obciążeniom zewnętrznym i rozpoczyna się proces **dociążenia** obciążeniem dodatkowym.

2) W chwili t_1 spełniony jest warunek plastyczności i pojawiają się nowe odkształcenia plastyczne.

3) W chwili t_2 **zaprzestajemy dociążania i rozpoczynamy proces odciążenia**.

4) **Proces odciążenia kontynuujemy aż bieżący stan naprężenia będzie taki sam jak początkowy** $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Chwilę, w której stan ten jest osiągnięty oznaczamy przez t_k



STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

Na podstawie **zasady przemieszczeń wirtualnych** można wykazać, że:

- Warunek **„stateczności w dużym” spełniony jest gdy**:

$$W_{pl} = \int_{t_1}^{t_2} \left[(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \right] \mathrm{d}t \geqslant 0$$

- Warunek **„stateczności w małym” spełniony jest gdy**:

$$(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{pl} \geqslant 0$$

jeśli w chwili początkowej materiał jest **w stanie sprężystym**

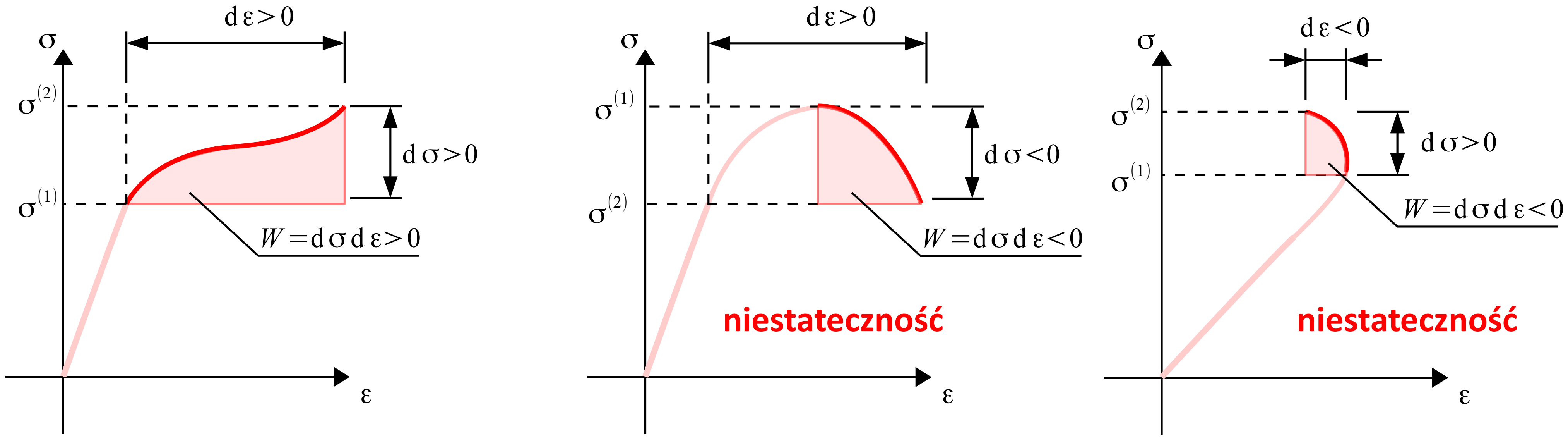
$$\mathrm{d}\sigma_{ij} \, \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{pl} \geqslant 0$$

jeśli w chwili początkowej materiał jest **w stanie sprężysto-plastycznym**

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

Warunek **„stateczności w małym”** w chwili początkowej materiał jest **w stanie sprężysto-plastycznym**

$$\boxed{d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^{pl} \geqslant 0}$$



UWAGA: Występowanie **dolnej granicy plastyczności** jest objawem **niestateczności** materiału w sensie Druckera.

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

Zakładając, że **postulat stateczności Druckera jest spełniony**, nierówność oznaczająca **spełnienie warunku „stateczności w małym”** można interpretować następująco:

$$(\boldsymbol{\sigma}-\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = |\boldsymbol{\sigma}-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}||\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}|\cos\sphericalangle\left[(\boldsymbol{\sigma}-\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\,;\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\right] \geqslant 0$$

Normy tensorów są dodatnie, zatem musi zachodzić:

$$\sphericalangle\left[(\boldsymbol{\sigma}-\tilde{\boldsymbol{\sigma}})\,;\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\right] \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

tj. **kąt w przestrzeni naprężeń*** między **przyrostem tensora naprężenia** (za stanu **sprężystego $\boldsymbol{\sigma}$** do stanu granicznego $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, tj. **na powierzchni plastyczności**) a **tensorem przyrostu odkształcenia plastycznego** $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ musi być mniejszy bądź równy kątowi prostemu.

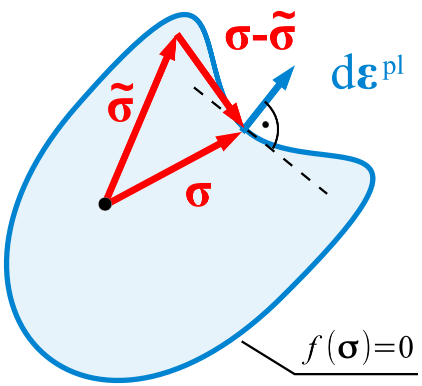
* aby tensor odkształcenia móc traktować jako wektor w przestrzeni naprężeń musi być pomnożony przez pewną stałą wartość naprężenia odniesienia (np. 1 Pa), aby miał odpowiedni wymiar fizyczny.

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

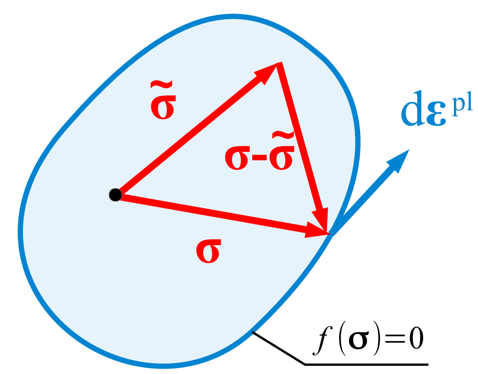
Warunek taki spełniony będzie tylko przy **jednoczesnym spełnieniu dwóch następujących warunków**:

- **powierzchnia plastyczności** musi być **wypukła**
- **tensor przyrostu odkształcenia plastycznego** musi być **prostopadły** (ortogonalny) **do powierzchni plastyczności**, tj. musi być **równoległy do gradientu warunku plastyczności.** (warunek normalności)

$$d\,\varepsilon_{ij}^{pl} = d\,\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$



niestateczność materiału (w sensie Druckera)
dla wklęsłej powierzchni plastyczności



niestateczność materiału (w sensie Druckera)
dla tensora przyrostu odkształcenia plastycznego
nieortogonalnego do powierzchni plastyczności

STATECZNOŚĆ MATERIAŁU

UWAGI:

- Jeśli **stosuje się przyrostowy model plastyczności ze stowarzyszonym prawem płynięcia**, wtedy **spełniony jest warunek normalności**.

$$\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij}^{pl} = \mathrm{d}\,\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

  Jeśli **ponadto powierzchnia plastyczności jest wypukła**, to **materiał jest stateczny w sensie Druckera**.

- Jeśli zakładamy, że **materiał jest stateczny w sensie Druckera** i chcemy go opisać za pomocą przyrostowego modelu plastyczności, to **konieczne jest zastosowanie stowarzyszonego prawa płynięcia**, a **powierzchnia plastyczności musi być wypukła**.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ