

TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL

tel. 12 628 20 30

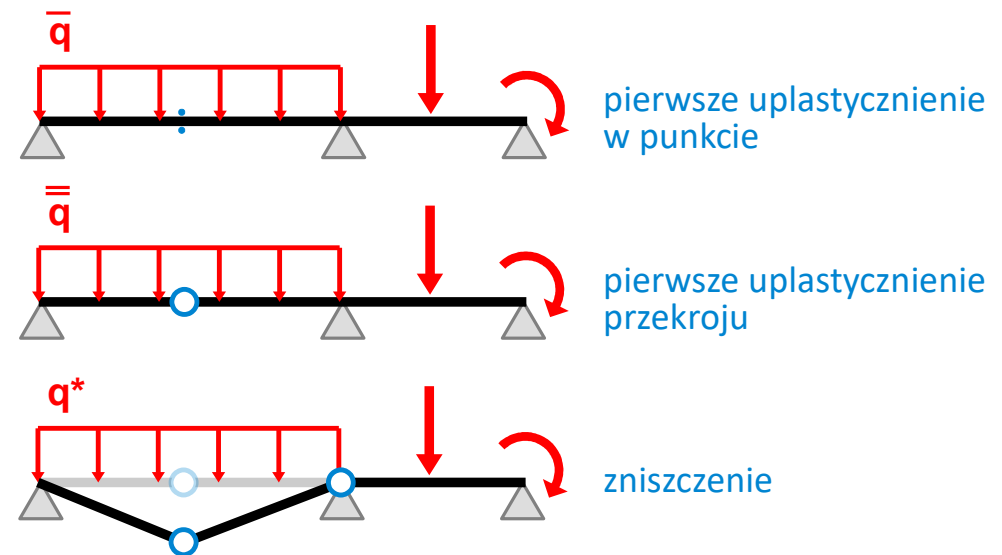
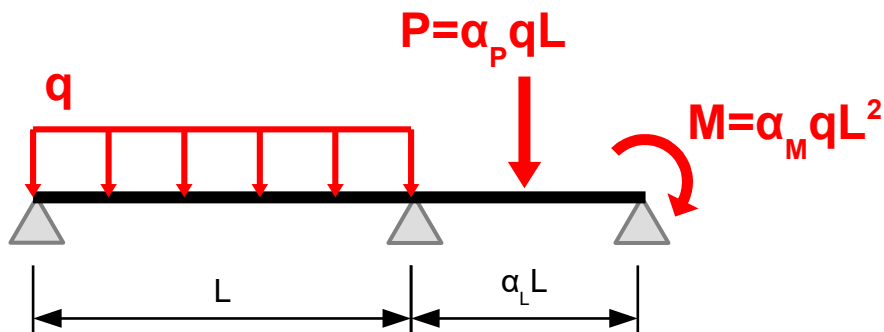
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

NOŚNOŚĆ GRANICZNA

graniczna nośność sprężysta \bar{q} – wartość parametru obciążenia q , dla której w układzie dochodzi do pierwszego uplastycznienia w punkcie.

graniczna nośność plastyczna $\bar{\bar{q}}$ – wartość parametru obciążenia q , dla której w układzie dochodzi do pełnego uplastycznienia pierwszego przekroju.

nośność graniczna układu q^* – wartość parametru obciążenia q , dla której geometrycznie niezmienny układ mechaniczny zamienia się w mechanizm.



DEFORMACJA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA PRĘTÓW LITYCH

ROZCIĄGANIE

ROZCIĄGANIE

ZAŁOŻENIA:

- jednoosiowy stan naprężenia zarówno z zakresie sprężystym jak i sprężysto-plastycznym
- jednorodny stan naprężenia w każdym przekroju w obydwu zakresach
- uplastycznienie zachodzi jednocześnie we wszystkich punktach
- w zakresie sprężystym spełnione jest prawo Hooke'a.
- w zakresie plastycznym materiał nie wykazuje wzmocnienia.

W zakresie sprężystym:

tensor naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{N}{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tensor odkształcenia sprężystego:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \frac{N}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

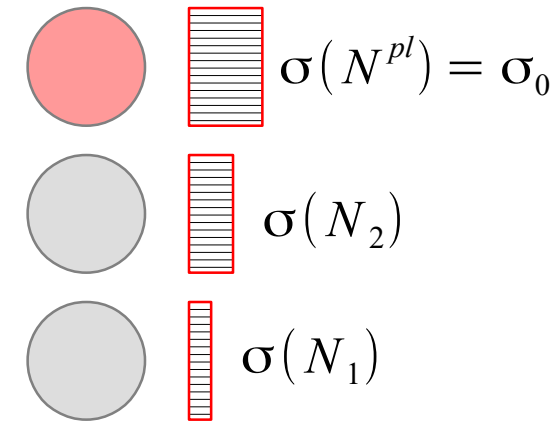
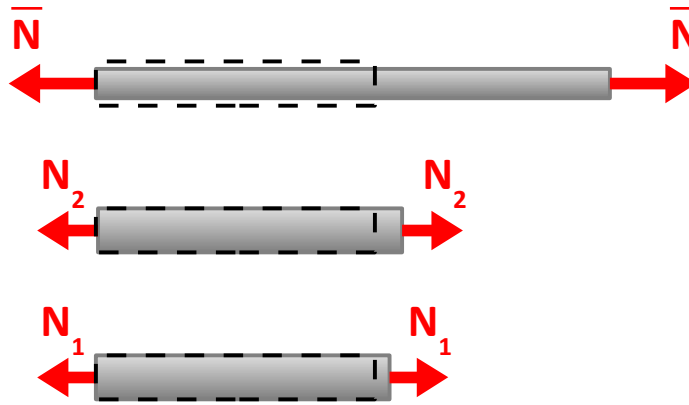
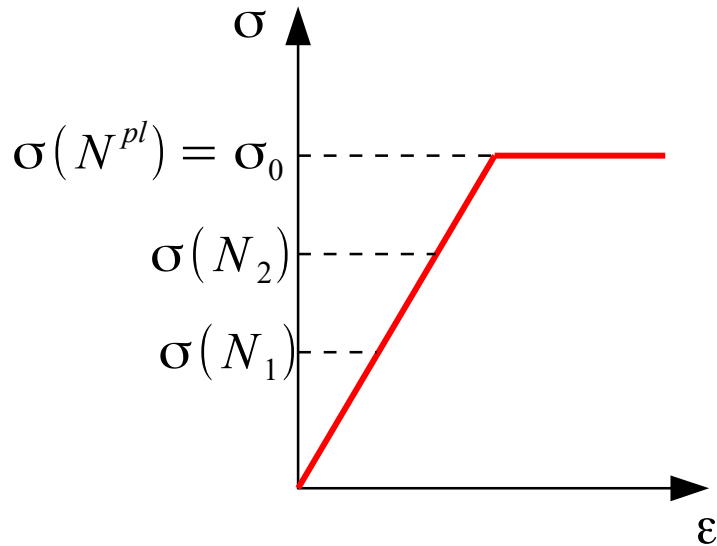
Tensor odkształcenia plastycznego:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{0}$$

Tensor odkształcenia całkowitego:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el}$$

ROZCIĄGANIE



UWAGI:

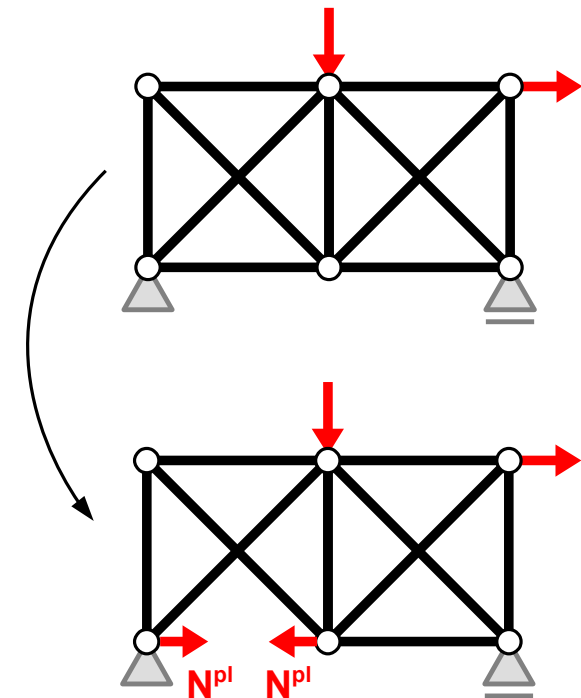
- Uplastycznienie zachodzi jednocześnie we wszystkich punktach przekroju i całego pręta.
- Graniczna nośność sprężysta = graniczna nośność plastyczna: $\bar{N} = \bar{N}$

ROZCIĄGANIE

UWAGI:

- Po uplastycznieniu:
 - pręt ma zerową sztywność (swoboda wydłużenia)
 - pręt nie przeniesie większej siły niż $N^{pl} = \sigma_0 A$, będzie się tylko wydłużał
 - naprężenie nie zmienia się, równe granicy plastyczności $\sigma = \sigma_0$
 - odkształcenie sprężyste nie zmienia się, jest równe $\varepsilon^{el} = \sigma_0 / E$
 - przyrasta jedynie odkształcenie plastyczne

- Modelowanie **deformacji sprężysto – plastycznej** w układach, w których uplastycznieniu ulega pręt kratowy polega na:
 - usunięciu pręta z układu (swoboda deformacji \rightarrow zerowa sztywność \rightarrow brak przyczynku do sztywności układu)
 - wprowadzeniu dwójki sił przeciwnych na kierunku osi pręta przyłożonych w jego węzłach końcowych. Wartość tych sił jest równa nośności plastycznej przekroju (pręt wciąż przenosi siłę, dla materiału bez wzmocnienia wartość tej siły po uplastycznieniu pręta już się nie zmienia)



DEFORMACJA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA PRĘTÓW LITYCH

ZGINANIE

ZGINANIE

ZAŁOŻENIA:

- liniowy rozkład odkształceń (hipoteza **płaskich przekrojów** Bernoulliego) zarówno z zakresie sprężystym jak i sprężysto-plastycznym.
- w zakresie **sprężystym** spełnione jest **prawo Hooke'a**.
- w zakresie **plastycznym** materiał **nie wykazuje wzmocnienia**.

W zakresie **sprężystym**:

tensor naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{M}{I} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tensor odkształcenia sprężystego:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \frac{M}{EI} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu x_3 \end{bmatrix}$$

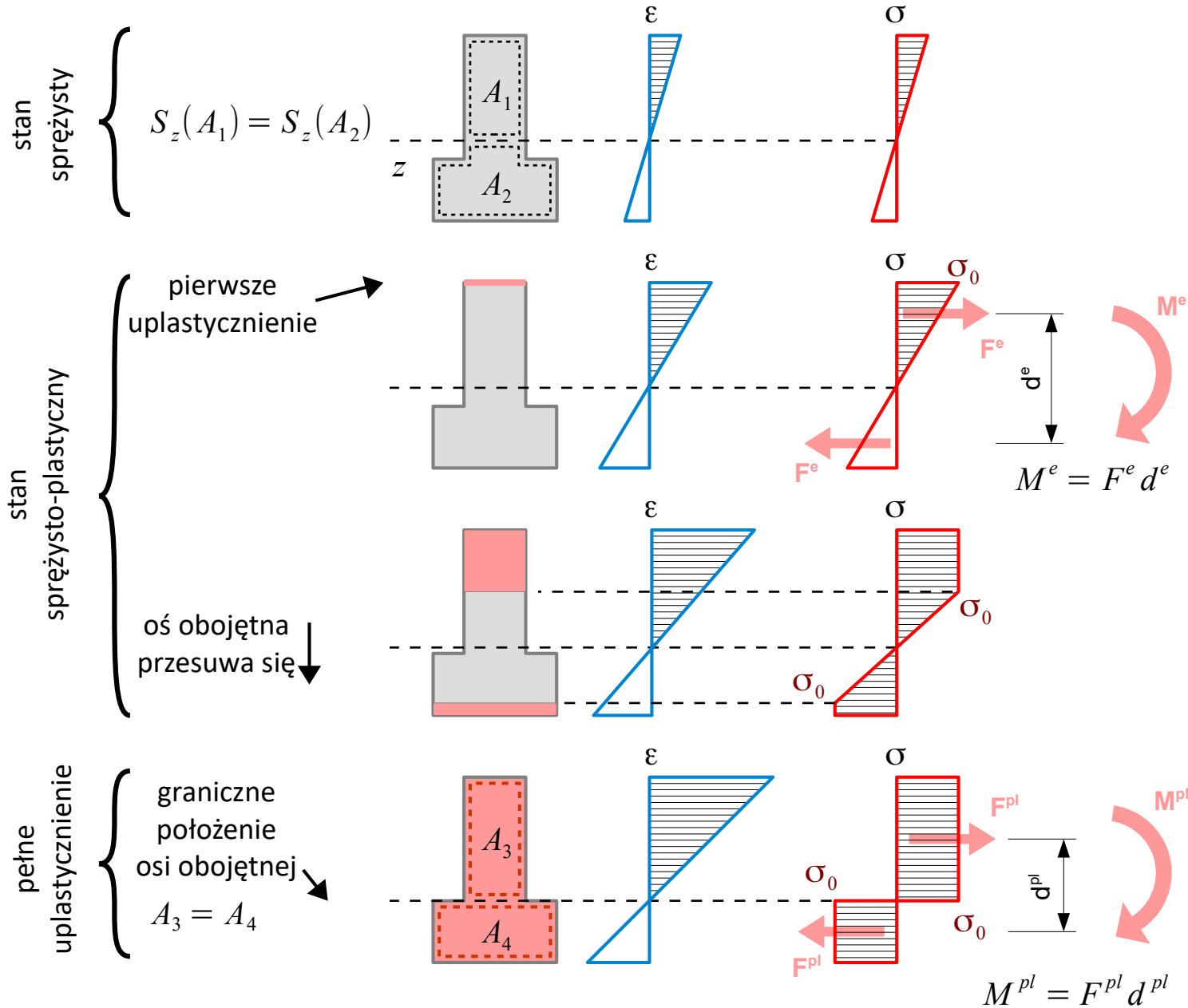
Tensor odkształcenia plastycznego:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{0}$$

Tensor odkształcenia całkowitego:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el}$$

ZGINANIE



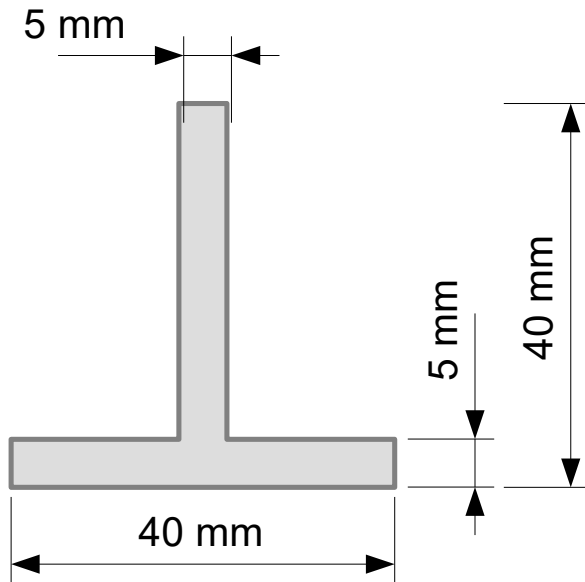
ZGINANIE

UWAGI:

- W zakresie sprężystym oś obojętna zawiera środek ciężkości przekroju.
- Pierwsze uplastycznienie zachodzi we włóknie najbardziej oddalonym od osi obojętnej.
- **Graniczna nośność sprężysta:** $\bar{M} = W \sigma_0$
- Strefa plastyczna postępuje z dwóch stron.
- W przekrojach niesymetrycznych oś obojętna przesuwa się.
- Przy **pełnym uplastycznieniu** przekroju przekrój dzieli się na **dwie strefy** (rozciąganą i ściskaną) **jednorodnie obciążone** naprężeniem normalnym równym **granicy plastyczności** σ_0 .
 - naprężenie normalne na kierunku osi pręta zmienia się w sposób **nieciągły** (skokowa zmiana wartości z $-\sigma_0$ na σ_0).
 - **poła powierzchni obydwu stref są równe** – na podstawie tego spostrzeżenia wyznacza się **graniczną nośność plastyczną** przekroju zginanego.

NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTA I PLASTYCZNA PRZEKROJU ZGINANEGO - PRZYKŁAD

Wyznaczyć **graniczną nośność sprężystą** i **graniczną nośność plastyczną** przekroju teowego przedstawionego na rysunku. Granica plastyczności jest równa 200 MPa:



NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTA I PLASTYCZNA PRZEKROJU ZGINANEGO - PRZYKŁAD

pole powierzchni:

$$A = [40 \cdot 5] + [35 \cdot 5] = 375 \text{ mm}^2$$

moment statyczny:

$$S = \left[40 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \right] + \left[35 \cdot 5 \cdot \left(5 + \frac{35}{2} \right) \right] = 4437,5 \text{ mm}^3$$

środek ciężkości:

$$y = \frac{S}{A} \approx 11,83 \text{ mm}$$

moment bezwładności:

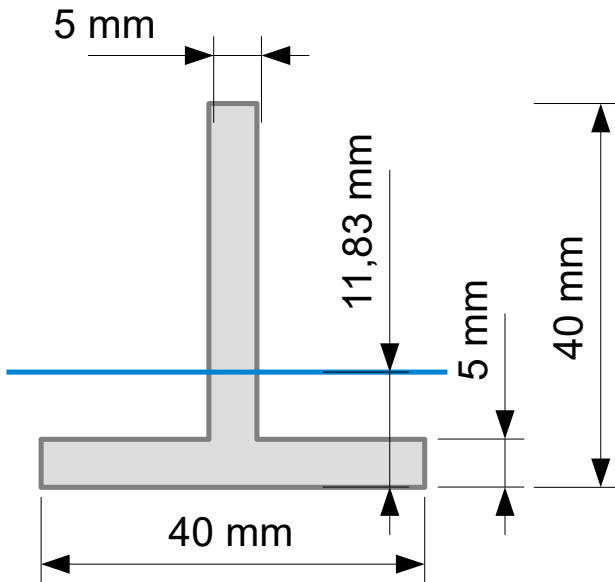
$$I = \left[\frac{40 \cdot 5^3}{12} + 40 \cdot 5 \cdot \left(\frac{5}{2} - y \right)^2 \right] + \left[\frac{5 \cdot 35^3}{12} + 35 \cdot 5 \cdot \left(5 + \frac{35}{2} - y \right)^2 \right] = 47531,25 \text{ mm}^4$$

włókno skrajne:

$$y_{max} = \max(y, 40 - y) \approx 28,17 \text{ mm}$$

wskaźnik wytrzymałości:

$$W = \frac{I}{y_{max}} = 1687,5 \text{ mm}^3$$



$$\bar{M} = W \sigma_0 = 337,5 \text{ Nm}$$

NOŚNOŚĆ SPRĘŻYSTA I PLASTYCZNA PRZEKROJU ZGINANEGO - PRZYKŁAD

podział na równe strefy:

$$40 \cdot y_{pl} = 35 \cdot 5 + 40 \cdot (5 - y_{pl}) \Rightarrow y_{pl} = 4.6875 \text{ mm}$$

poła stref:

$$A_d = [40 \cdot y_{pl}] = 187,5 \text{ mm}^2$$

$$A_g = [35 \cdot 5 + 40 \cdot (5 - y_{pl})] = 187,5 \text{ mm}^2$$

momenty statyczne stref:

$$S_d = \left[40 \cdot y_{pl} \cdot \frac{y_{pl}}{2} \right] \approx 439,45 \text{ mm}^3$$

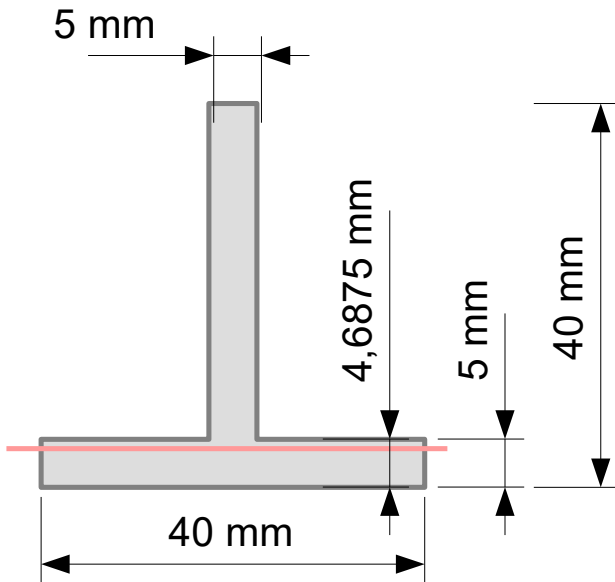
$$S_g = \left[35 \cdot 5 \cdot \left(5 + \frac{35}{2} \right) \right] + \left[40 \cdot (5 - y_{pl}) \cdot \left(y_{pl} + \frac{5 - y_{pl}}{2} \right) \right] \approx 3998,05 \text{ mm}^3$$

środki ciężkości stref:

$$y_d = \frac{S_d}{A_d} \approx 2,34 \text{ mm} \quad y_g = \frac{S_g}{A_g} \approx 21,32 \text{ mm}$$

ramię:

$$d_{pl} = y_g - y_d \approx 18,98 \text{ mm}$$



$$\bar{M} = \sigma_0 A_d d_{pl} = \sigma_0 A_g d_{pl}$$

$$\bar{M} = 711,72 \text{ Nm}$$

ODKSZTAŁCENIA TRWAŁE, NAPRĘŻENIA RESZTKOWE – PRZYKŁAD

Dany jest zginany **przekrój prostokątny** o wymiarach $b \times h$. Wyznaczyć:

- **graniczną nośność sprężystą** przekroju
- **graniczną nośność plastyczną** przekroju:
- wartość momentu M_1 , przy który **uplastycznieniu ulega łącznie 1/3 wysokości** przekroju
- **rozkład naprężeń resztkowych** po odciążeniu przekroju obciążonego momentem M_1

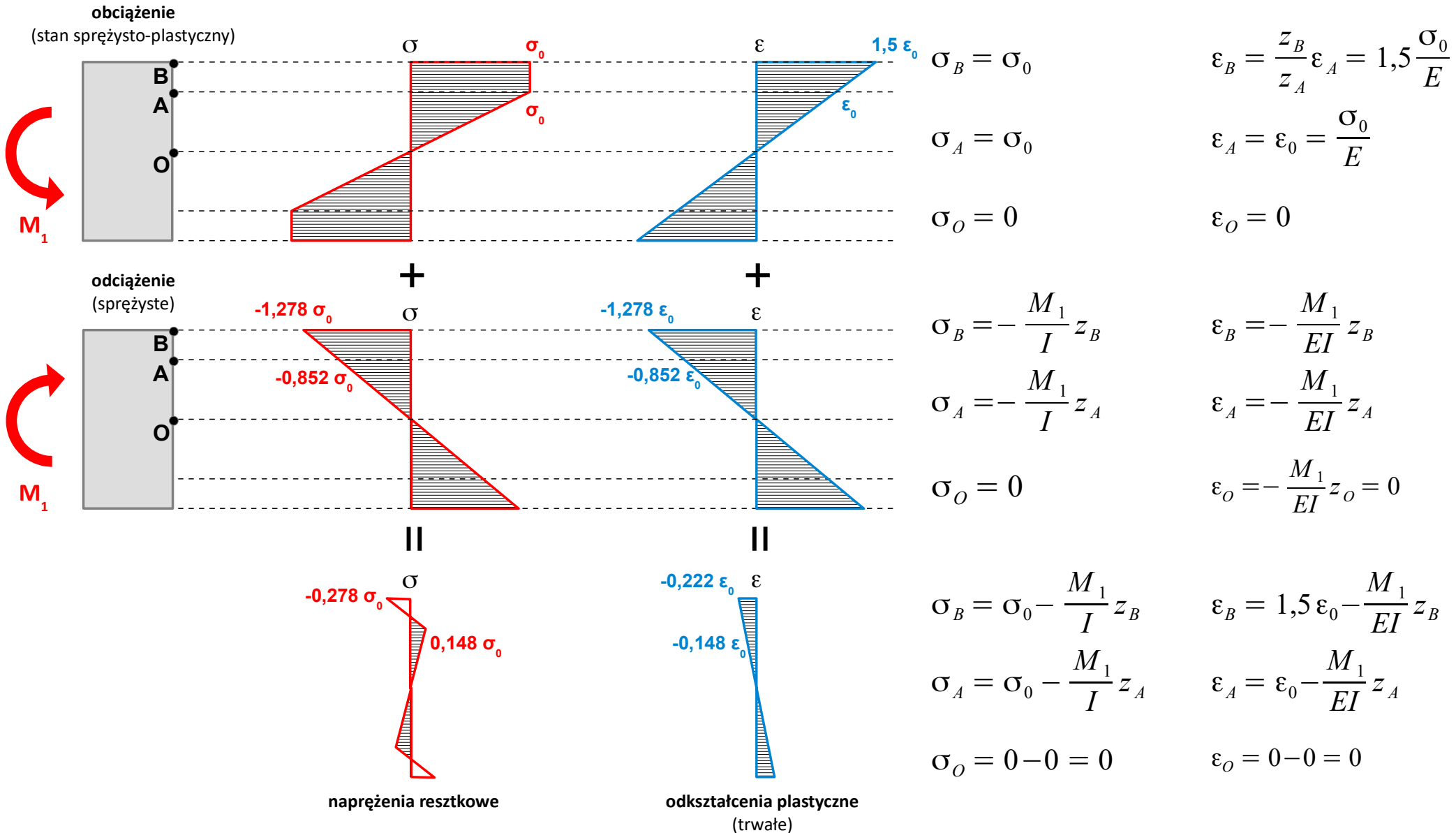
ROZWIĄZANIE:

graniczna nośność sprężysta $\bar{M} = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_0 \approx 0,167 b h^2 \sigma_0$

graniczna nośność plastyczna $\bar{\bar{M}} = \frac{1}{4} b h^2 \sigma_0 \approx 0,250 b h^2 \sigma_0$

Moment: M_1 :
$$M_1 = 2 \left[\left(\sigma_0 \cdot b \cdot \frac{h}{6} \cdot \left(\frac{h}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{6} \right) \right) + \frac{1}{2} \sigma_0 \cdot b \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{3} \right] = \frac{23}{108} b h^2 \sigma_0 \approx 0,213 b h^2 \sigma_0$$

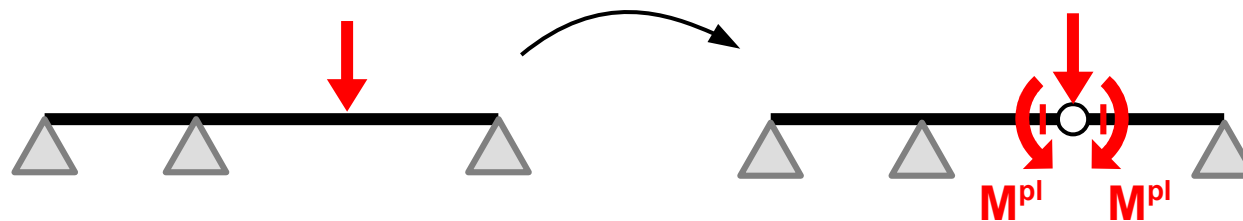
ODKSZTAŁCENIA TRWAŁE, NAPRĘŻENIA RESZTKOWE – PRZYKŁAD



ZGINANIE

UWAGI:

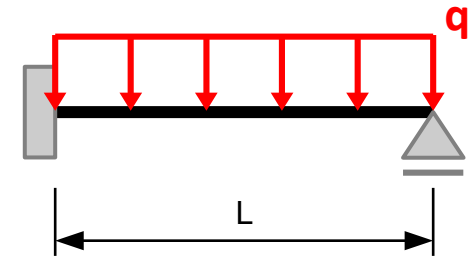
- **przekrój w pełni uplastyczniony** (dla materiału bez wzmocnienia) ma **pełną swobodę obrotu** – powstaje w nim **przegub plastyczny**.
 - przegub plastyczny ma **swobodę obrotu tylko w jednym kierunku** – w kierunku przeciwnym wykazuje sztywność przekroju nieuplastycznionego (odciążenie ma charakter sprężysty)
 - przegub plastyczny tym różni się od rzeczywistego przegubu, że **przenosi moment** – jego wartość jest **stała i równa nośności plastycznej przekroju na zginanie**.
 - obecność przegubu plastycznego modeluje się **wprowadzając do konstrukcji przegub obciążony obustronnie momentem uplastyczniającym**



- Modelowanie **deformacji sprężysto-plastycznej konstrukcji stalowej** poprzez wprowadzenie **przegubu plastycznego** jest dopuszczalne jedynie dla **przekrojów klasy I**.

ANALIZA SPRĘŻYSTO – PLASTYCZNA BELKI - PRZYKŁAD

Wyznaczyć nośność graniczną belki statycznie niewyznaczalnej drogą analizy sprężysto – plastycznej.



ANALIZA SPRĘŻYSTO – PLASTYCZNA BELKI - PRZYKŁAD

KROK 1 – Analiza sprężysta

Zadanie 1-krotnie statycznie niewyznaczalne

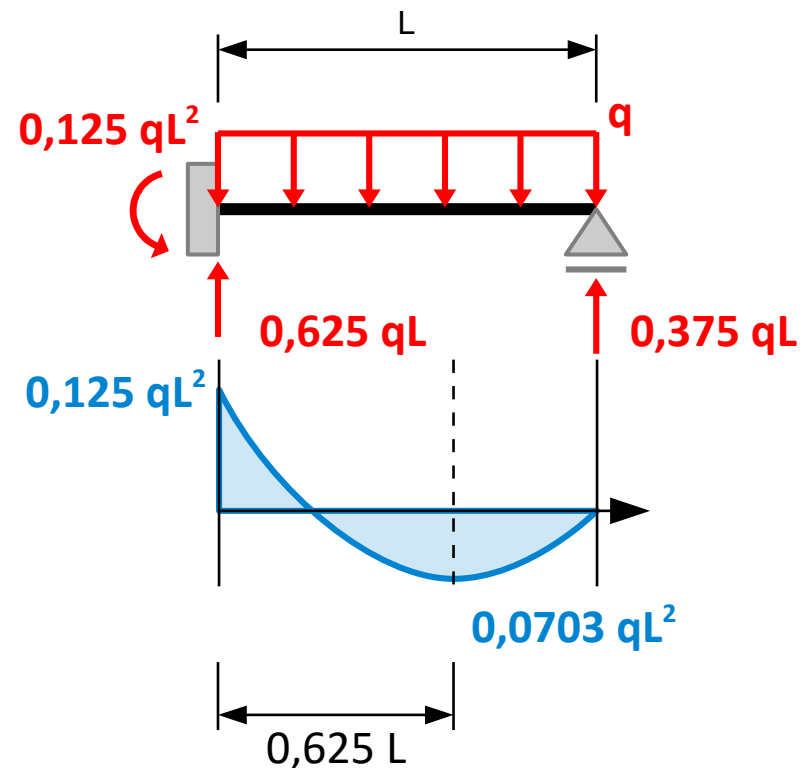
Maksymalny moment występuje w utwierdzeniu - tam dojdzie do pierwszego uplastycznienia.

graniczna nośność sprężysta – wartość parametru obciążenia prowadząca do **pierwszego uplastycznienia w punkcie**:

$$0,125 q L^2 = M^{el} = W \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{q} = 8 \frac{W^{el} \sigma_0}{L^2}$$

graniczna nośność plastyczna – wartość parametru obciążenia prowadząca do **pierwszego pełnego uplastycznienia przekroju**:

$$0,125 q L^2 = M^{pl} \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{q}} = 8 \frac{M^{pl}}{L^2}$$

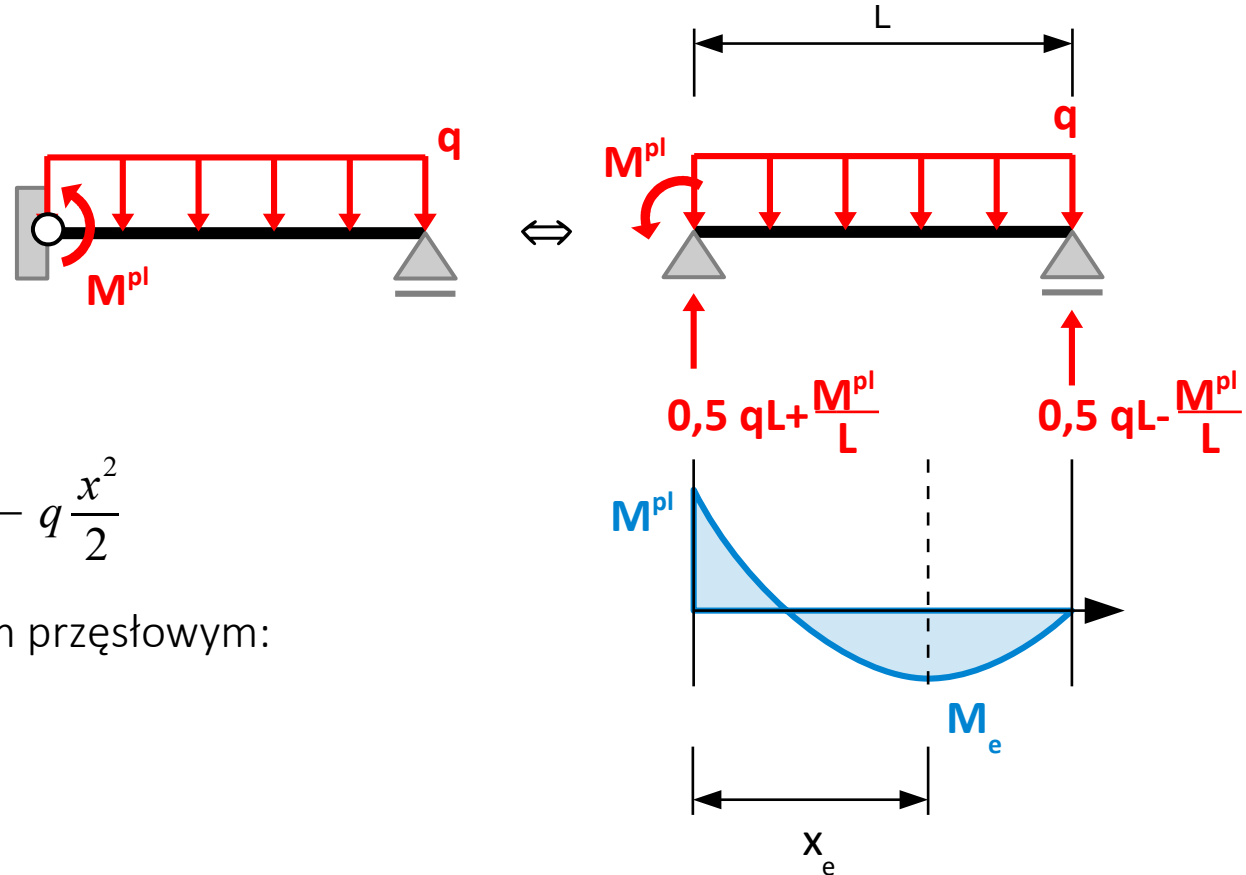


ANALIZA SPRĘŻYSTO – PLASTYCZNA BELKI - PRZYKŁAD

KROK 2 – Analiza sprężysto-plastyczna

Wprowadzamy przegub plastyczny.

Zadanie statycznie wyznaczalne



Rozkład momentów:

$$M(x) = -M^{pl} + \left(\frac{qL}{2} + \frac{M^{pl}}{L} \right) x - q \frac{x^2}{2}$$

Położenie przekroju z max. momentem przęsłowym:

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x_e = \frac{L}{2} + \frac{M^{pl}}{qL}$$

Maksymalny moment przęsłowy:

$$M(x_e) = \frac{(M^{pl})^2}{2qL^2} - \frac{M^{pl}}{2} + \frac{qL^2}{2}$$

ANALIZA SPRĘŻYSTO – PLASTYCZNA BELKI - PRZYKŁAD

KROK 2 – Analiza sprężysto-plastyczna

W chwili uplastycznienia: $M(x_e) = +M^{pl}$

$$4(M^{pl})^2 - 12qL^2M^{pl} + q^2L^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vee$$

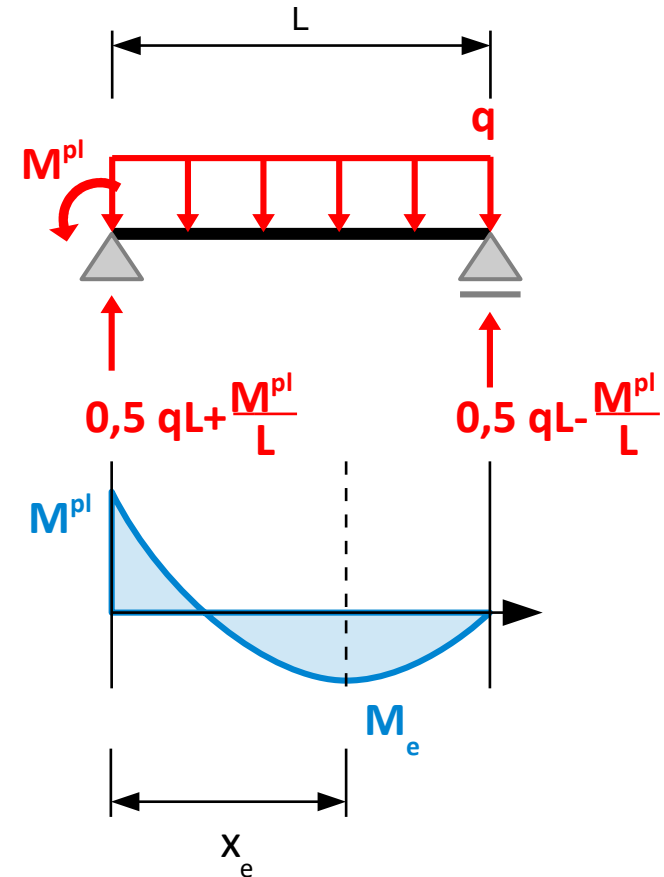
$$q_1 \approx 0,34315 \frac{M^{pl}}{L^2}$$

$$q_2 \approx 11,657 \frac{M^{pl}}{L^2}$$

Położenie drugiego przegubu plastycznego:

$$x_{e,1} = \frac{L}{2} + \frac{M^{pl}}{q_1 L} \approx 3,4142 L \quad \leftarrow \text{rozwiązanie bez sensu fizycznego}$$

$$x_{e,2} = \frac{L}{2} - \frac{M^{pl}}{q_1 L} \approx 0,58579 L$$



Po uplastycznieniu drugiego przekroju **układ zamienia się w mechanizm**.

Nośność graniczna belki:

$$q^* = \frac{(M^{pl})^2}{2q_2 L^2} - \frac{M^{pl}}{2} + \frac{q_2 L^2}{2} \approx 11,657 \frac{M^{pl}}{L^2}$$

DEFORMACJA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA PRĘTÓW LITYCH

SKRĘCANIE

SKRĘCANIE

ZAŁOŻENIA:

- w zakresie sprężystym przekrój doznaje sztywnego obrotu i deplanacji
- skręcanie **swobodne** (de Saint-Venanta) – możliwość **swobodnej deplanacji przekroju** poprzecznego
- jedynymi niezerowymi składowymi stanu naprężenia są **naprężenia styczne w płaszczyźnie przekroju**
- w zakresie **sprężystym** spełnione jest **prawo Hooke'a**.
- w zakresie **plastycznym** materiał **nie wykazuje wzmocnienia**.

W zakresie sprężystym:

wektor przemieszczenia:

$$\mathbf{u} = \Theta \begin{bmatrix} \psi(x_1, x_2) \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

tensor odkształcenia sprężystego:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\Theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_3\right) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_2\right) \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

tensor naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Theta G \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_3\right) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_2\right) \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

SKRĘCANIE

Korzystamy z **funkcji naprężeń Prandtla** ϕ : $\sigma_{12} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$, $\sigma_{31} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2}$

Tak wyrażone naprężenia **zawsze spełniają równania równowagi**.

Warunek nierozdzielności odkształceń: $\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}$

Pozostałe równania są albo zależne albo tożsamościowo spełnione.

Ponieważ $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$: $\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} = \text{const.} \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} = \text{const.}$

Rzeczywiście: $\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} = \Theta G \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} + 1 \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} - 1 \right) \right] = 2 \Theta G$

Jeśli wyrazimy naprężenia za pomocą **funkcji Prandtla**:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial x_3^2} = -2 G \Theta$$

SKRĘCANIE

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial x_3^2} = -2 G \Theta$$

UWAGI:

- Funkcja ϕ spełniająca powyższe **równanie Poissona**, wyznacza **stan naprężenia**, który spełnia **warunki nierozdzielności odkształceń** oraz **równania równowagi**. Stan ten będzie rozwiązaniem zagadnienia, jeśli spełniać będzie warunki brzegowe, bo związki konstytutywne spełnione są na mocy założenia.
- **Pochodna kierunkowa** funkcji ϕ wyznacza **naprężenie styczne na kierunku prostopadłym do kierunku pochodnej**.

$$\partial_{\mathbf{n}} \phi = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \tau_{\perp \mathbf{n}}$$

- **Statyczny warunek brzegowy** wymaga, aby **naprężenie styczne na kierunku normalnym do konturu przekroju było zerowe**. Warunek ten jest równoważny temu, aby **pochodna kierunkowa ϕ na kierunku stycznym do konturu przekroju była zerowa**, a to będzie spełnione, gdy ϕ będzie miała stałą wartość na całym konturze. Możemy przyjąć tę stałą wartość dowolnie, np. 0.
- Rozwiązanie równania Poissona z powyższym warunkiem brzegowym wyznacza funkcję naprężeń ϕ , która określa stan naprężenia będący **rozwiązaniem równania**, ponieważ zagadnienie nie nakłada kinematycznych warunków brzegowych.

SKRĘCANIE

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial x_3^2} = -2 G \Theta$$

UWAGI:

- Równanie powyższe z jednorodnym (zerowym) warunkiem brzegowym opisuje również **deformację sprężystej membrany utwierdzonej na brzegu o kształcie konturu przekroju poprzecznego i obciążonej jednorodnym ciśnieniem**. Funkcja ϕ określa wtedy **ugięcie membrany**.
- **Pochodna kierunkowa** funkcji ϕ na kierunku \mathbf{n} jest **tangensem kąta nachylenia membrany** w płaszczyźnie do niej prostopadłej i równoległej do \mathbf{n} . Wiemy ponadto, że:

$$\partial_{\mathbf{n}} \phi = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \tau_{\perp \mathbf{n}}$$

w takim razie **kąt nachylenia membrany** jest miarą **wielkości naprężenia stycznego**.

- Spostrzeżenie to nazywamy **analogią membrany Prandtla**.

SKRĘCANIE

ANALOGIA PRANDTLA

Całkowity moment skręcający odpowiadający ciągłemu układowi naprężeń stycznych jest równy:

$$M = \iint_A (\sigma_{12} x_3 - \sigma_{31} x_2) dA = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \right) dA$$

Całkujemy przez części:

$$M = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \right) dA = \oint_{\partial A} [\phi(x_2 n_2 + x_3 n_3)] dA - \iint_A \phi \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (x_3) \right] dA$$

Ponieważ ϕ jest zerowa na konturze, zatem całka po konturze jest równa 0. Mamy zatem:

$$M = -2 \iint_A \phi dA$$

Jeśli ϕ oznacza ugięcie membrany, to całka powyższa oznacza **dwukrotność objętości** (ze znakiem „-”) zawartej między zdeformowaną membraną a płaszczyzną (x_2, x_3) – objętość ta jest zatem **miara całkowitego momentu skręcającego w zakresie sprężystym**.

$$M = 2V$$

SKRĘCANIE

W chwili, gdy dochodzi do **uplastycznienia**, dla materiału **bez wzmocnienia**, **naprężenie styczne nie może przekroczyć wielkości odpowiadającej granicy plastyczności** przy skręcaniu – wszędzie tam, gdzie spełniony jest warunek plastyczności musi zachodzić:

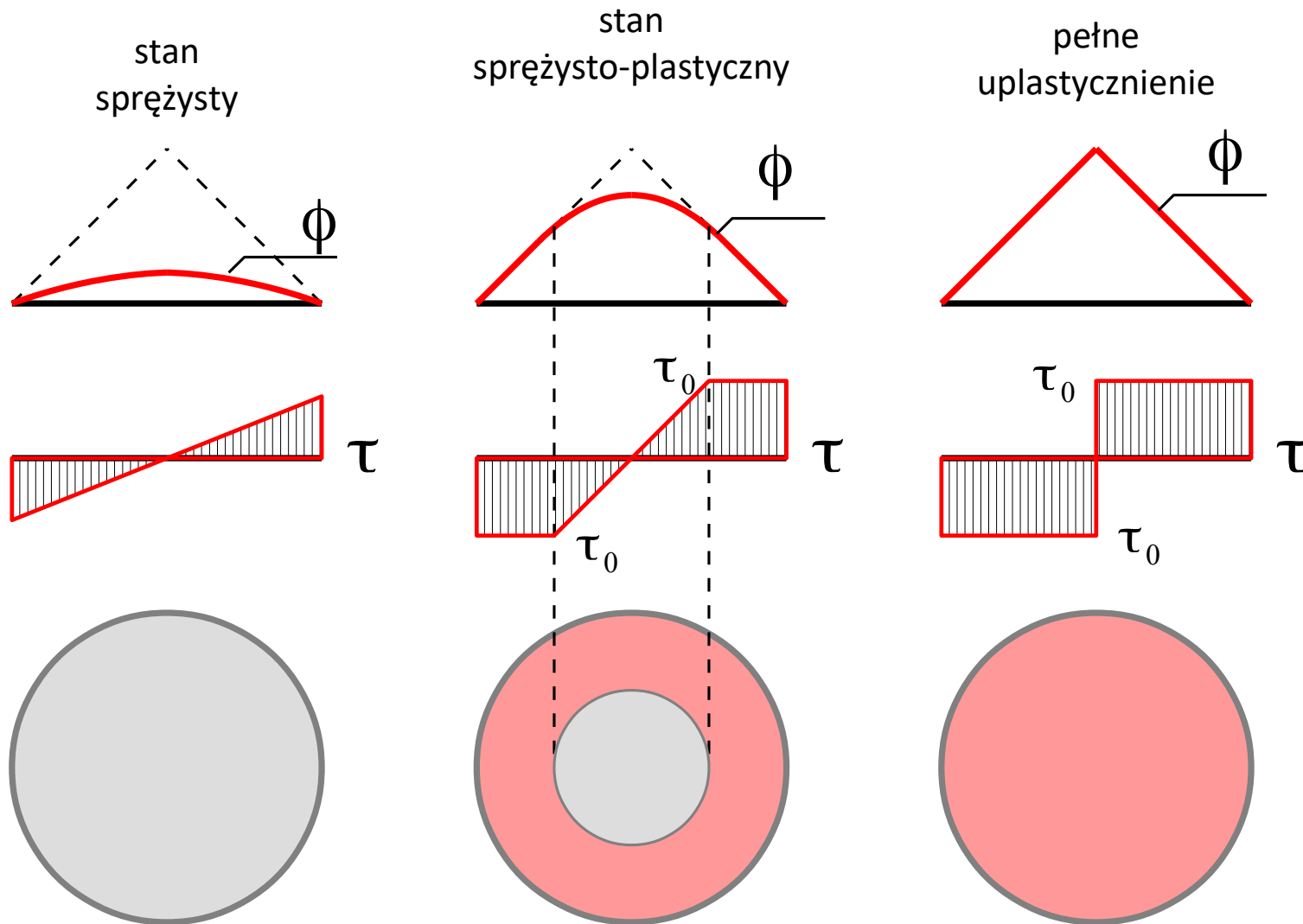
$$\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2} = \tau_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)^2 = |\text{grad } \phi|^2 = \tau_0^2 = \text{const.}$$

Jeśli posłużymy się **analogią membrany**, oznacza to, że **w strefie plastycznej kąt nachylenia membrany jest stały** – miarą tej granicznej wartości nachylenia jest granica plastyczności przy skręcaniu:

$$\tau_0^2 = \text{tg}^2 \alpha = \text{const.}$$

Zilustrować to można w ten sposób, że **odkształcająca się membrana napotyka nieodkształcalny dach o ustalonym spadku**. **W strefie plastycznej membrana przylega do dachu**. Spostrzeżenie to nosi nazwę **analogii dachu Nádaia**.

SKRĘCANIE



SKRĘCANIE

W stanie **pełnego uplastycznienia przekroju skręcanego membrana przyjmuje kształt dachu** o ustalonym spadku. Dach ten ma postać **powierzchni równego spadku**, będącej rozwiązaniem nieliniowego równania różniczkowego:

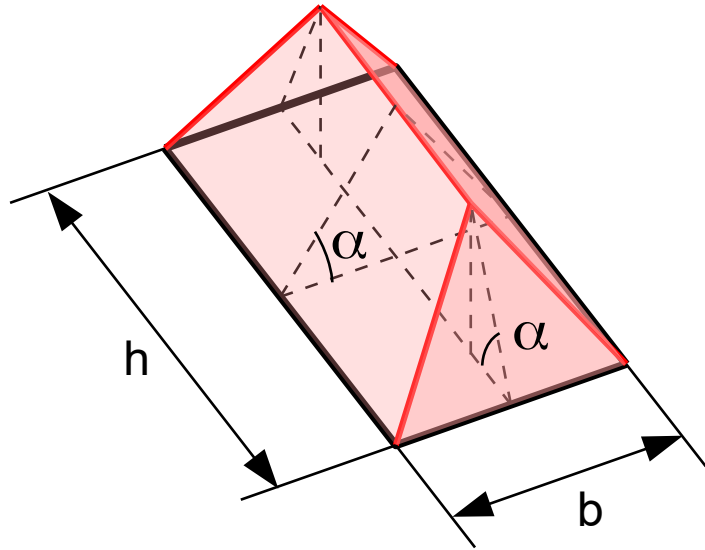
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)^2 = \text{const.}$$

Taki sam kształt przyjmuje **doskonale sypki materiał o ustalonym kącie tarcia wewnętrznego, sypany równomiernie na obszar o kształcie przekroju poprzecznego**. Objętość usypanego stosu jest zatem miarą **nośności plastycznej przekroju na skręcanie** – spostrzeżenie to nazywa się **analogią wzgórza piaskowego Nádaia**.

Uogólnienie analogii wzgórza piaskowego na przypadek przekrojów wielospójnych (z otworami) nosi nazwę **analogii Sadovsky'ego**:

- w miejscach otworów umieszczamy nieskończenie długie rury o kształcie otworu
- sypimy piasek – piasek nie wsypuje się do rur.
- obniżamy każdą z rur aż do chwili, gdy piasek wsypuje się do niej na całej długości konturu otworu.
- objętość wzgórza piaskowego jest miarą nośności plastycznej przekroju na skręcanie.

SKRĘCANIE



PRZEKRÓJ PROSTOKĄTNY

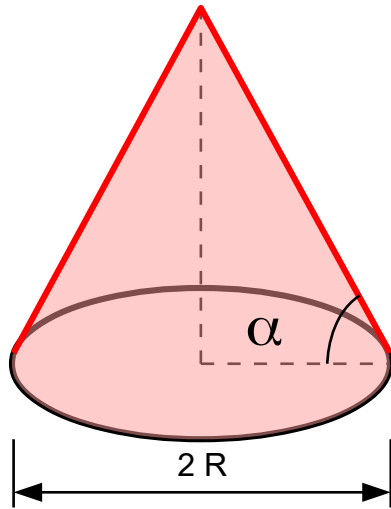
objętość wzgórza piaskowego:

$$V = \frac{1}{12} b^2 (3h - b) \operatorname{tg} \alpha$$

nośność plastyczna na skręcanie:

$$M^{pl} = \frac{1}{6} b^2 (3h - b) \tau_0$$

SKRĘCANIE



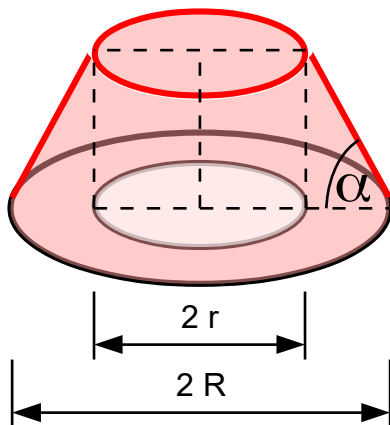
PRZEKRÓJ KOŁOWY

objętość wzgórza piaskowego:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$$

nośność plastyczna na skręcanie:

$$M^{pl} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_0$$



PRZEKRÓJ RUROWY

objętość wzgórza piaskowego:

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha$$

nośność plastyczna na skręcanie:

$$M^{pl} = \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) \tau_0$$

SKRĘCANIE



PRZEKRÓJ W KSZTAŁCIE CIĘŻARÓWKI

modele wykonali: Paweł, Klara, Józef, Barnaba Szeptyńscy



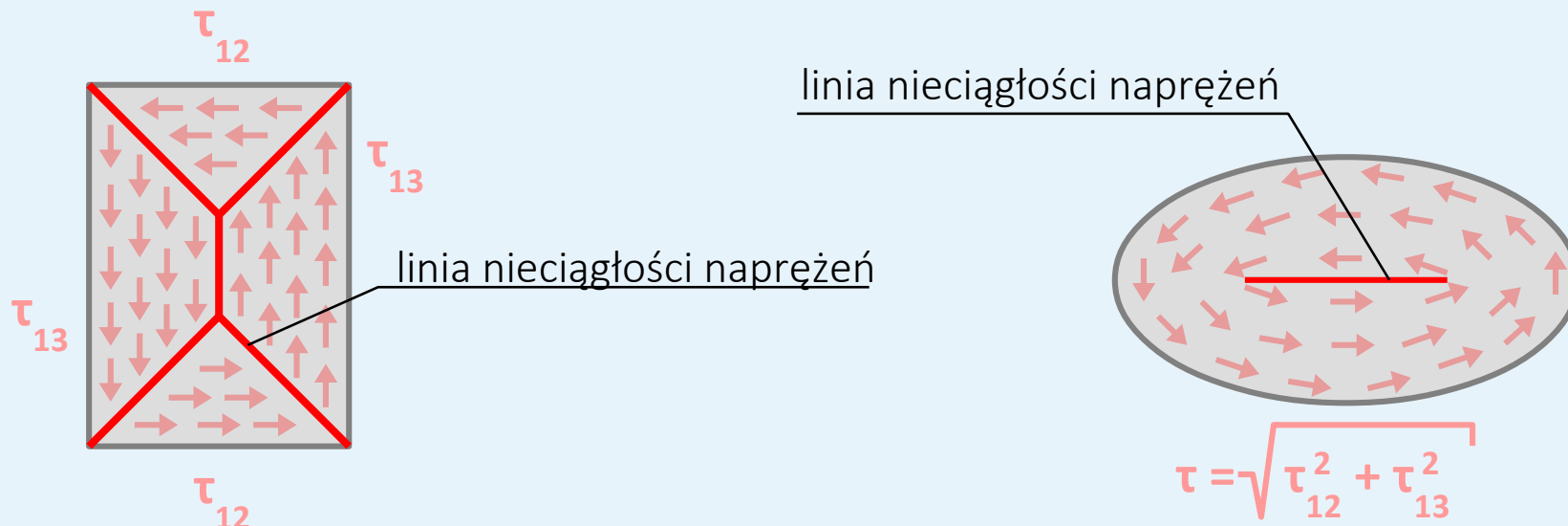
PRZEKRÓJ W KSZTAŁCIE SAMOLOTU

SKRĘCANIE

$$\partial_n \phi = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \tau_{\perp n}$$

- kąt nachylenia dachu jest miarą **wielkości naprężenia** stycznego
- orientacja nachylenia dachu jest prostopadła do **kierunku naprężenia** stycznego
- tam gdzie dach o stałym spadku zmienia skokowo swoją orientację, tam **stałe naprężenie** zmienia w sposób nieciągły swój kierunek

W przekroju w pełni uplastycznionym **naprężenia styczne** zmieniają się w sposób **nieciągły**.



PŁASKA DEFORMACJA SPRĘŻYSTO - PLASTYCZNA

DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ

Osiowosymetryczna rura grubościenna obciążona jednorodnym ciśnieniem wewnętrznym.

Materiał sprężysto – plastyczny:

- w zakresie sprężystym: **materiał Hooke'a**
- warunek plastyczności: **Coulomba – Treski – Guesta**
- w zakresie plastycznym: **brak wzmocnienia**

Rozwiązanie w zakresie liniowo-sprężystym:

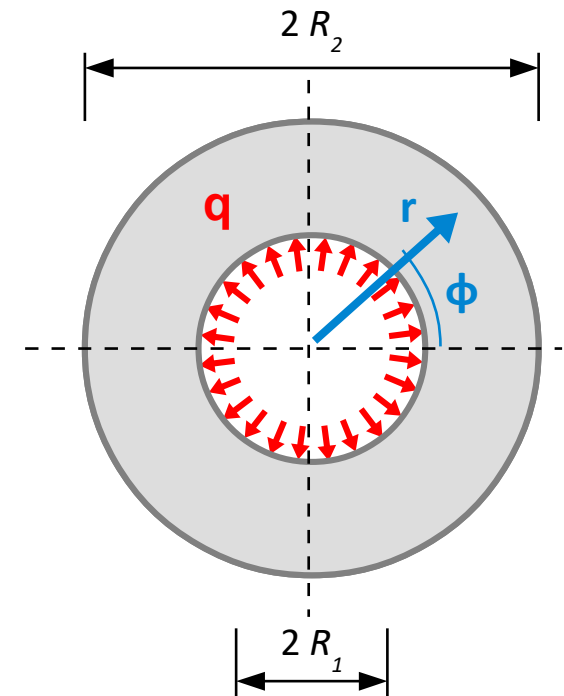
pole przemieszczenia:
$$u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

pole odkształcenia:
$$\varepsilon_{rr}^e(r) = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_{\phi\phi}^e(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

pole naprężenia:
$$\sigma_{rr}(r) = 2C_1(G + \lambda) - \frac{2C_2G}{r^2}$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r) = 2C_1(G + \lambda) + \frac{2C_2G}{r^2}$$



$$C_1 = \frac{q R_1^2}{(2G + \lambda)(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$C_2 = \frac{q R_1^2 R_2^2}{2G(R_2^2 - R_1^2)}$$

DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ

Zakładamy, że charakter rozkładu naprężeń w strefie sprężystej (I) jest taki sam jak w rozwiązaniu liniowej teorii sprężystości, przy czym stałe całkowania mogą być inne:

$$\sigma_{rr}^I(r) = D_1 - \frac{D_2}{r^2} \quad \sigma_{\phi\phi}^I(r) = D_1 + \frac{D_2}{r^2}$$

Warunki brzegowe:

- na powierzchni zewnętrznej:

$$\sigma_{rr}^I(R_2) = 0$$

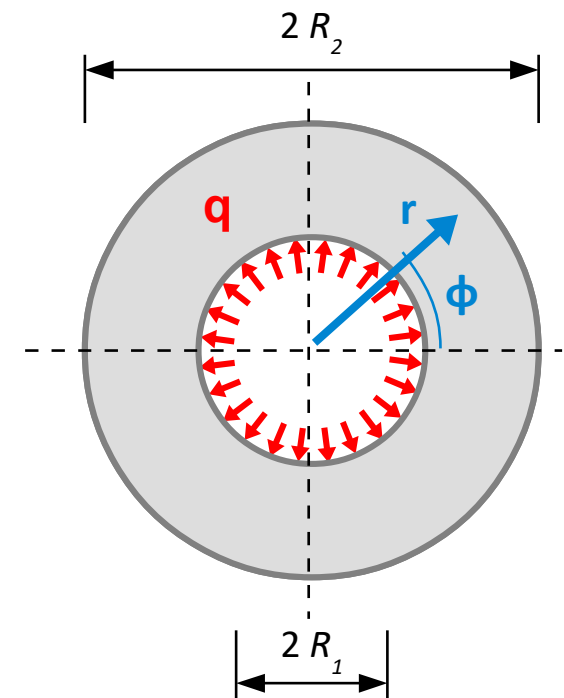
- na granicy strefy sprężystej (I) i plastycznej (II):

$$\sigma_{rr}^{II}(R_{pl}) = \sigma_{rr}^I(R_{pl})$$

$$\sigma_{r\phi}^{II}(R_{pl}) = \sigma_{r\phi}^I(R_{pl}) \quad (\text{spełnione, bo } \sigma_{r\phi}^{II} = \sigma_{r\phi}^I = 0)$$

- na powierzchni wewnętrznej:

$$\sigma_{rr}^{II}(R_q) = -q$$



DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ

Warunek plastyczności CTG w przypadku osiowej symetrii dla rozwiązania sprężystego:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr}}{2} = \frac{2 C_2 G}{r^2}$$

PIERWSZE UPLASTYCZNIENIE

Wyrażenie powyższe przyjmuje wartości największe dla najmniejszego r . **Uplastycznienie rozpocznie się od powierzchni wewnętrznej.** Wielkość obciążenia, które prowadzi do uplastycznienia pierwszych włókien na powierzchni wewnętrznej:

$$2 \tau_{max} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4 G C_2}{R_1^2} = \frac{2 q_0 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad q_0 = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)$$

GRANICA STREFY PLASTYCZNEJ

Warunek plastyczności zapisany dla rozkładu naprężeń w strefie sprężystej:

$$2 \tau_{max}^I(R_{pl}) = \sigma_{\phi\phi}^I(R_{pl}) - \sigma_{rr}^I(R_{pl}) = \frac{2 D_2}{R_{pl}^2} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad R_{pl} = \sqrt{\frac{2 D_2}{\sigma_0}} \quad \Leftrightarrow \quad D_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 R_{pl}^2$$

DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ

ROZWIĄZANIE W STREFIE PLASTYCZNEJ

W każdym punkcie strefy plastycznej musi być spełniony **warunek plastyczności**:

$$2 \tau_{max}^II = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\phi\phi}^II - \sigma_{rr}^II = \sigma_0$$

Równanie równowagi dla zagadnienia osiowosymetrycznego (takie samo w obydwu strefach):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0$$

Po podstawieniu warunku plastyczności otrzymujemy **równanie równowagi w strefie plastycznej**:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^II}{\partial r} = \frac{\sigma_0}{r}$$

Rozwiązanie powyższego równania

$$\sigma_{rr}^II = \sigma_0 \ln r + D_3$$

DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ

ROZWIĄZANIE W STREFIE PLASTYCZNEJ

Znając naprężenia radialne, **naprężenia obwodowe** wyznaczamy z warunku plastyczności:

$$\sigma_{\phi\phi}^{\text{II}} - \sigma_{rr}^{\text{II}} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\phi\phi}^{\text{II}} = \sigma_0(1 + \ln r) + D_3$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunku plastyczności zapisanego na granicy strefy sprężystej oraz z **warunków brzegowych** (4 równania na 4 niewiadome D_1, D_2, D_3, R_{pl}):

$$D_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 R_{pl}^2 \quad \leftarrow \text{warunek plastyczności na granicy strefy sprężystej}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{rr}^{\text{I}}(R_2) = 0 & \Rightarrow D_1 - \frac{D_2}{R_2^2} = 0 \quad \leftarrow \text{na powierzchni zewnętrznej} \\ \sigma_{rr}^{\text{II}}(R_1) = -q & \Rightarrow D_3 + \sigma_0 \ln R_1 = -q \quad \leftarrow \text{na powierzchni wewnętrznej} \\ \sigma_{rr}^{\text{I}}(R_{pl}) - \sigma_{rr}^{\text{II}}(R_{pl}) = 0 & \Rightarrow D_1 - \frac{\sigma_0}{2} - D_3 - \sigma_0 \ln R_{pl} = 0 \quad \leftarrow \text{na granicy stref} \end{array} \right.$$

$$D_1 = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2}$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 R_{pl}^2$$

$$D_3 = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_{pl}^2} \right) - \sigma_0 \ln R_{pl}$$

DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ

Granice strefy plastycznej wyznacza się z warunku brzegowego na powierzchni wewnętrznej:

$$\sigma_{rr}^{II}(R_1) = -q \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{R_{pl}}{R_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{pl}^2}{R_2^2} \right) = \frac{q}{\sigma_0}$$

Jest to nieliniowe równanie algebraiczne z uwagi na R_{pl} i musi być rozwiązane numerycznie.

Ostatecznie **rozkład naprężeń** w przekroju rury jest następujący:

w strefie **sprężystej**:

naprężenia **radialne**:
$$\sigma_{rr}^I(r) = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right)$$

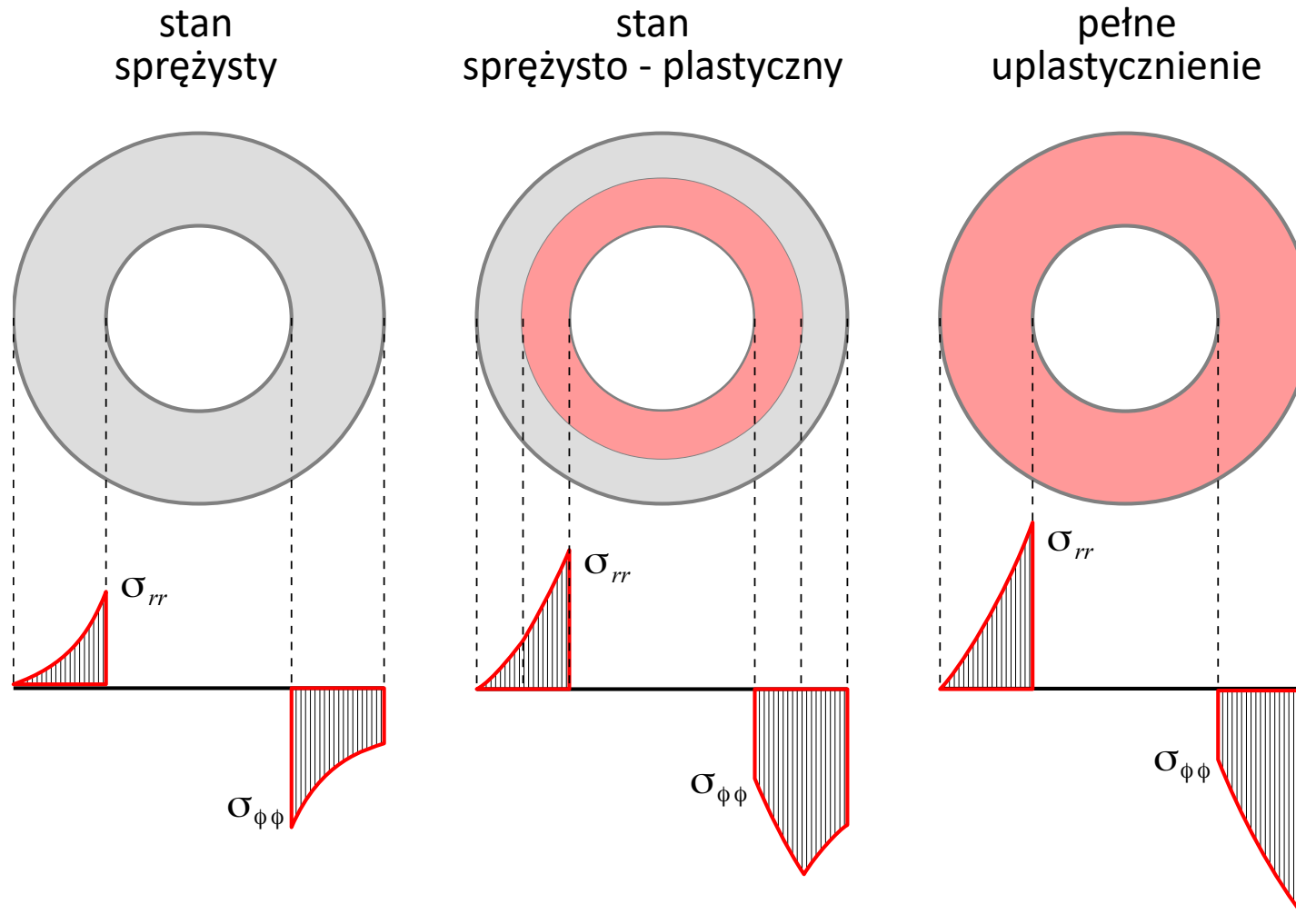
naprężenia **obwodowe**:
$$\sigma_{\phi\phi}^I(r) = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right)$$

w strefie **plastycznej**:

$$\sigma_{rr}^{II} = \sigma_0 \left[\frac{R_{pl}^2}{2 R_2^2} - \frac{1}{2} - \ln \frac{R_{pl}}{r} \right]$$

$$\sigma_{\phi\phi}^{II} = \sigma_0 \left[\frac{R_{pl}^2}{2 R_2^2} + \frac{1}{2} - \ln \frac{R_{pl}}{r} \right]$$

DEFORMACJA PLASTYCZNA RURY GRUBOŚCIENNEJ



UWAGI:

- Rozwiązanie otrzymano przy założeniu **płaskiego stanu naprężenia** i **warunku plastyczności CTG**.
- Dla płaskiego stanu odkształcenia lub dla innego warunku plastyczności, rozwiązanie jest inne.

TWIERDZENIA O OSZACOWANIACH NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

TEORIA NOŚNOŚCI GRANICZNEJ

W praktycznych zagadnieniach projektowania układów sprężysto-plastycznych jednym z kluczowych elementów jest **wyznaczenie nośności granicznej** układu, tj. takiej wielkości parametru obciążenia, przy której **układ traci geometryczną niezmienność**.

Dla modelu ciała sztywno – idealnie plastycznego (bez wzmocnienia), tj. dla modelu Lévy'ego – Misesa **dowodzi się prawdziwość dwóch twierdzeń, które pozwalają oszacować nośność graniczną układu od dołu i od góry**. W przypadku, gdy **obydwa oszacowania są identyczne** uzyskuje się **dokładną wartość nośności granicznej**.

TWIERDZENIE O OSZACOWANIU DOLNYM

TWIERDZENIE O OSZACOWANIU OD DOŁU (z niedomiarem)

Konstrukcja nie ulega zniszczeniu albo znajduje się w stanie równowagi granicznej pod wpływem obciążenia zewnętrznego, **jeśli da się znaleźć statycznie dopuszczalne pole naprężeń** odpowiadające temu obciążeniu. W takiej sytuacji **nośność graniczna jest co najmniej właśnie taka** jak to obciążenie lub większa – jest to oszacowanie od dołu.

Statyczna dopuszczalność pola naprężeń stawia następujące wymagania:

- układ naprężeń jest w **równowadze z obciążeniem zewnętrznym**,
- układ naprężeń spełnia **warunki równowagi wewnętrznej**,
- układ naprężeń spełnia **statyczne warunki brzegowe**,
- naprężenia **nie przekraczają naprężenia granicznego** σ_0

TWIERDZENIE O OSZACOWANIU GÓRNYM

TWIERDZENIE O OSZACOWANIU OD GÓRY (z nadmiarem)

Konstrukcja ulega zniszczeniu, jeśli da się znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości, takie że całkowita moc obciążeń zewnętrznych jest nie mniejsza od mocy sił wewnętrznych. W takiej sytuacji nośność graniczna jest co najwyżej właśnie taka jak odpowiadające obciążenie lub mniejsza – jest to oszacowanie od góry.

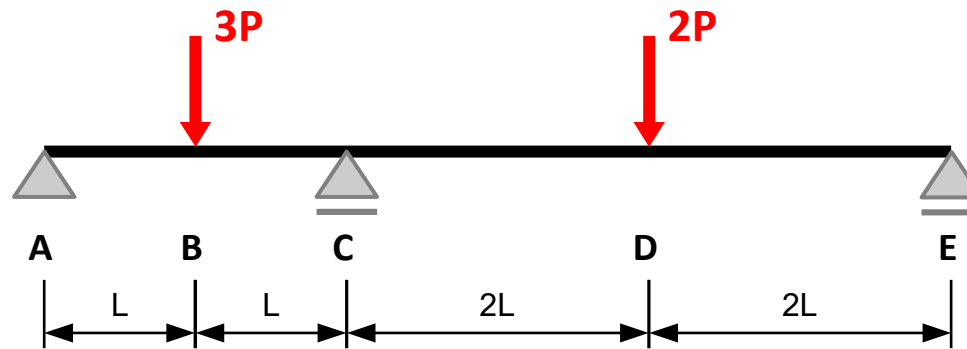
Kinematyczna dopuszczalność pola prędkości stawia następujące wymagania:

- pole prędkości **spełnia kinematyczne warunki brzegowe** (jest zgodne z więzami przyłożonymi do układu konstrukcyjnego),
- pole prędkości gwarantuje **ciągłość przemieszczeń**,
- **całkowita moc obciążenia zewnętrznego** na prędkościach jest **dodatnia**.

UWAGA: Pole prędkości wyznaczamy z zasadami kinematyki układu brył sztywnych (analogicznie jak przemieszczenia wirtualne w ZPW)

PRZYKŁAD

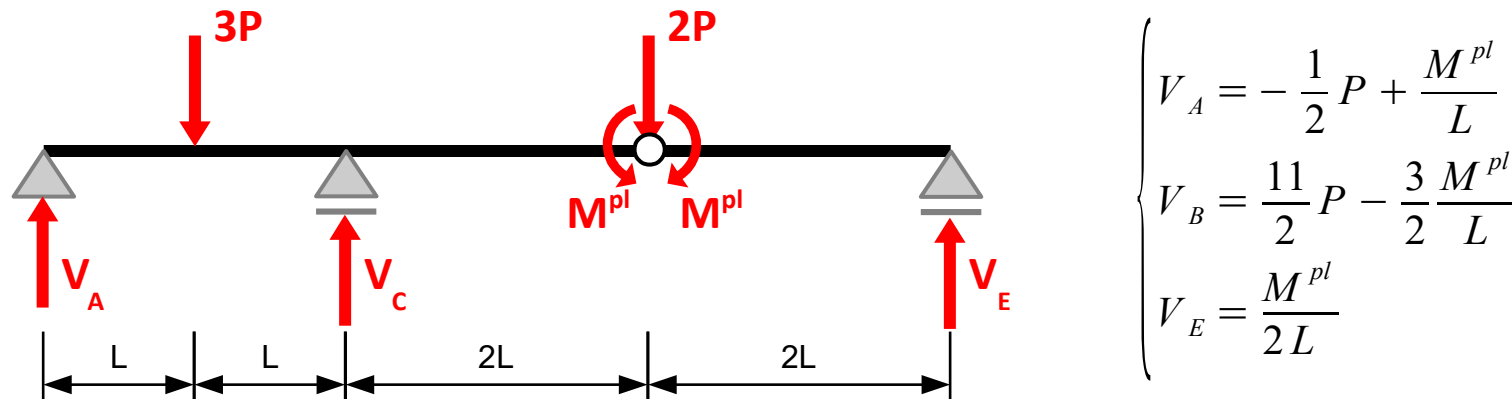
Oszacować nośność graniczną belki statycznie niewyznaczalnej:



PRZYKŁAD

Oszacowanie od dołu – podejście statyczne:

Zakładamy, że pierwsze uplastycznienie zajdzie w przekroju D. Otrzymujemy belkę statycznie wyznaczalną:



Belka obciążona jest siłami skupionymi. Rozkład momentów jest liniowy. Maksymalne momenty pojawiają się w przekrojach B lub C – tam może dojść do kolejnego uplastycznienia.

Kolejne uplastycznienie w B: $M_B = M^{pl} \Rightarrow P = 0$ wtedy $M_C = 2M^{pl} > M^{pl}$

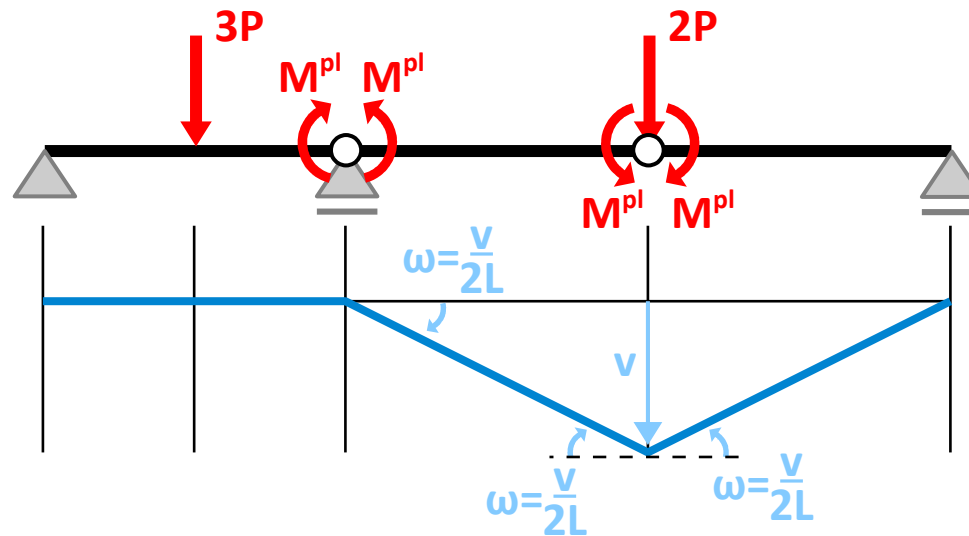
statycznie niedopuszczalne

Kolejne uplastycznienie w C: $M_C = -M^{pl} \Rightarrow P = \frac{3}{4}\frac{M^{pl}}{L}$ wtedy $M_B = \frac{5}{8}M^{pl}$

statycznie dopuszczalne

PRZYKŁAD

Oszacowanie od góry – podejście kinematyczne:



$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Moc sił zewnętrznych: } \dot{\Phi}_z = 2P \cdot v \quad \Rightarrow \quad P = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L} \\
 \text{Moc sił wewnętrznych: } \dot{\Phi}_w = M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{2L}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow P = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$$

PRZYKŁAD

Z twierdzenia o oszacowaniu od dołu:

$$P^* \geq \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$$

Z twierdzenia o oszacowaniu od góry:

$$P^* \leq \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$$

Zatem, **nośność graniczna** jest równa:

$$P^* = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$$

UWAGI:

- Jeśli schemat zniszczenia nie jest oczywisty lub łatwy do przewidzenia, wtedy z reguły trzeba rozważyć kilka możliwych rozkładów sił wewnętrznych (oszacowań od dołu) oraz kilka schematów zniszczenia (oszacowań od góry).
- Nie zawsze można łatwo znaleźć oszacowania górne i dolne o tej samej wartości. Wtedy rzeczywista nośność graniczna zawiera się w przedziale między oszacowaniem dolnym i oszacowaniem górnym.
- **Oszacowanie dolne** (podejście **statyczne**) jest oszacowaniem **bezpiecznym**

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ