TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

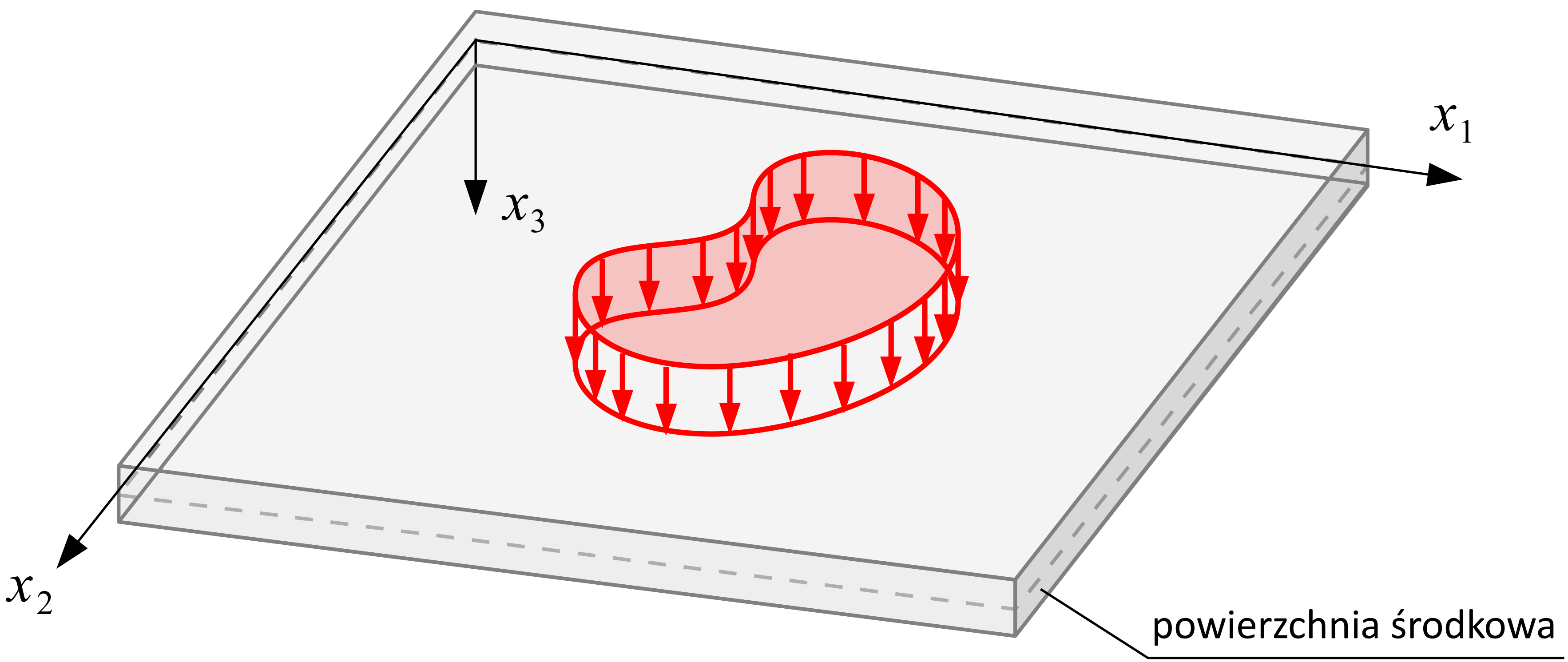
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

TEORIA PŁYT CIENKICH KIRCHHOFFA – LOVE'A

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

TEORIA PŁYT CIENKICH KIRCHHOFFA – LOVE'A

Płyta sprężysta – **sprężysty** ustrój **powierzchniowy**, którego **wymiar poprzeczny jest wielokrotnie mniejszy od wymiarów w rzucie**, obciążony prostopadle do swojej powierzchni środkowej (równolegle do mniejszego wymiaru).



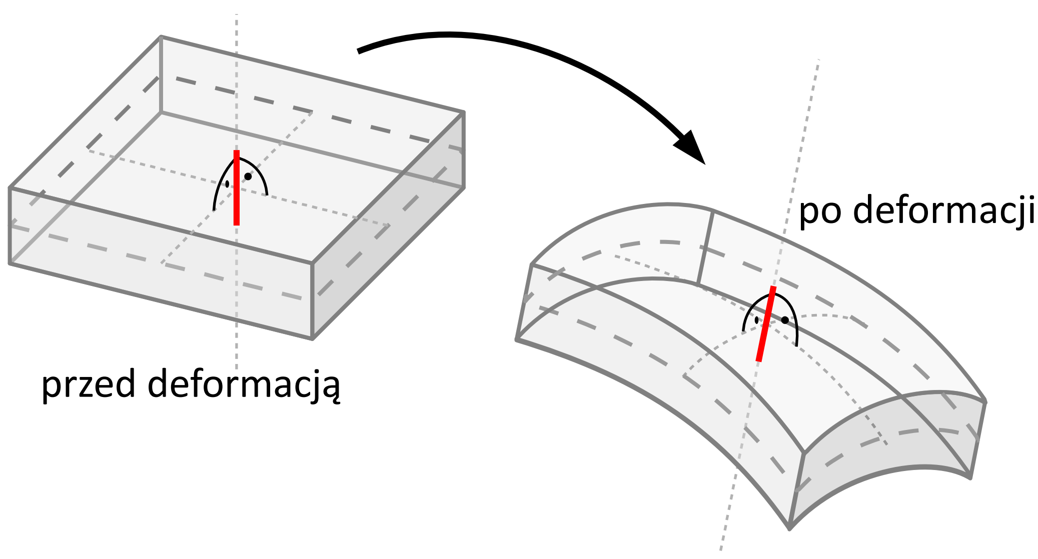
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

TEORIA PŁYT CIENKICH KIRCHHOFFA – LOVE'A

Jednym z modeli obliczeniowych płyt sprężystych jest teoria płyt cienkich Kirchhoffa – Love'a. U jej podstaw leży założenie dotyczące charakteru deformacji płyty, będące **uogólnieniem hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego** na przypadek **dwuwymiarowy**.

HIPOTEZA KIRCHHOFFA

odcinek prosty i prostopadły do płaszczyzny środkowej płyty przed deformacją pozostaje prosty i prostopadły do zdeformowanej powierzchni środkowej płyty



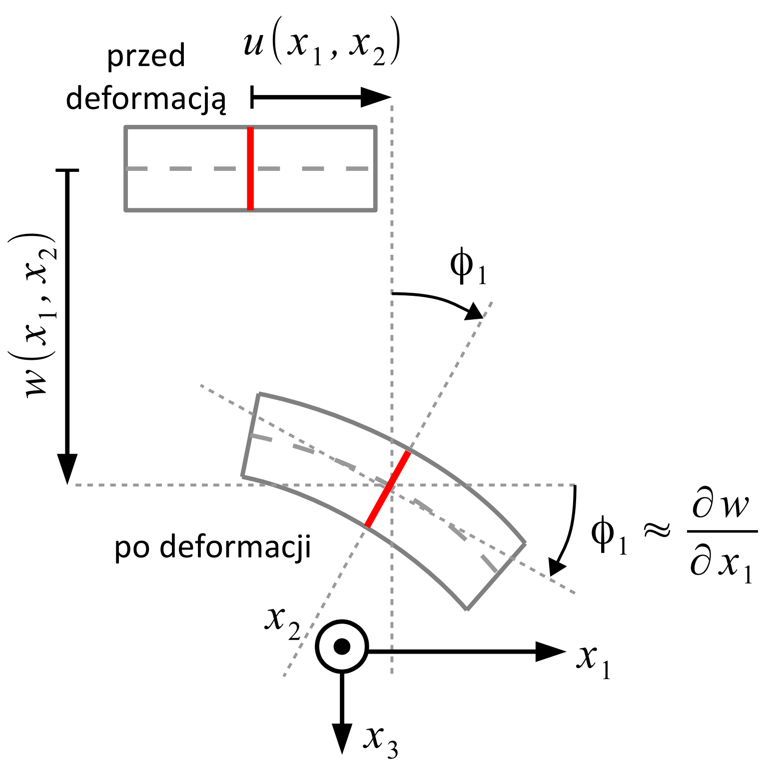
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

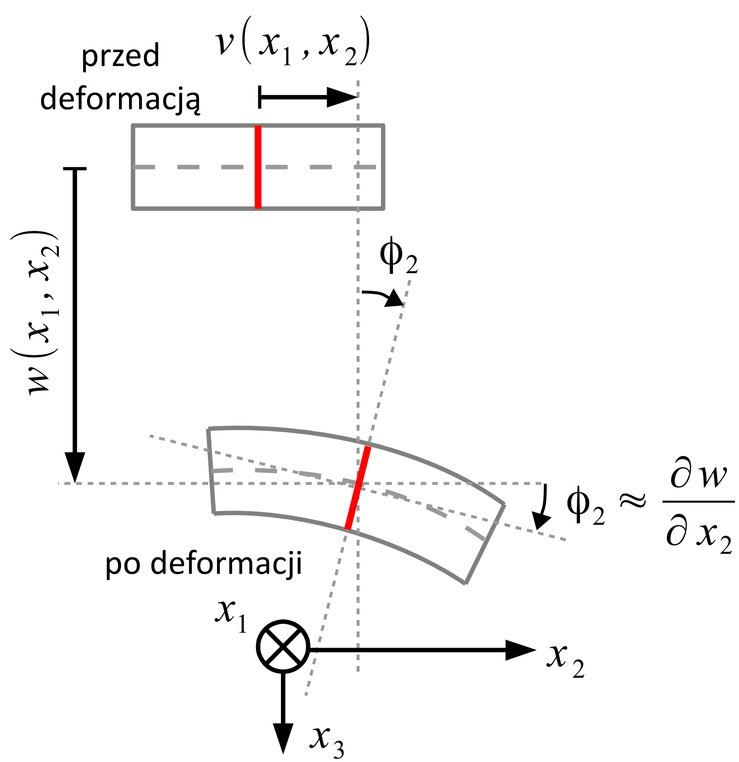
dr inż. Paweł Szeptyński

TEORIA PŁYT CIENKICH KIRCHHOFFA – LOVE'A

HIPOTEZA KIRCHHOFFA

odcinek prosty i prostopadły do płaszczyzny środkowej płyty przed deformacją pozostaje prosty i prostopadły do zdeformowanej powierzchni środkowej płyty





Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

TEORIA PŁYT CIENKICH KIRCHHOFFA – LOVE'A

ZAŁOŻENIA:

- obowiązuje **liniowa teoria sprężystości:**
  - małe przemieszczenia
  - małe odkształcenia - liniowe związki geometryczne
  - liniowe związki konstytutywne (materiał liniowo-sprężysty Hooke'a)

- obowiązuje **hipoteza Kirchhoffa.**

- wymiar płyty w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej płyty jest wielokrotnie mniejszy od pozostałych wymiarów płyty.

- **naprężenia normalne prostopadłe do powierzchni środkowej** płyty są **pomijalnie małe:** $\sigma_{33} \approx 0$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZWIĄZKI KINEMATYCZNE W PŁYTACH CIENKICH

Wektor przemieszczenia punktów powierzchni środkowej $(z \neq 0)$:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \begin{bmatrix} u(x_1, x_2) \\ v(x_1, x_2) \\ w(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Wektor przemieszczenia punktów o współrzędnych $z \neq 0$ wyznaczamy z **hipotezy Kirchhoffa**:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} u(x_1, x_2) - \dfrac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot x_3 \\ v(x_1, x_2) - \dfrac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot x_3 \\ w(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZWIĄZKI KINEMATYCZNE W PŁYTACH CIENKICH

Z ogólnych **związków geometrycznych**: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

wyznaczamy składowe **tensora odkształcenia**:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot x_3, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\cdot x_3, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(v - \frac{\partial w}{\partial x_2}x_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u - \frac{\partial w}{\partial x_1}x_3\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2\frac{\partial w}{\partial x_1 \partial x_2}x_3\right],$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(v - \frac{\partial w}{\partial x_2}x_3\right) + \frac{\partial w}{\partial x_2}\right] = 0, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(u - \frac{\partial w}{\partial x_1}x_3\right) + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right] = 0$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZWIĄZKI KINEMATYCZNE W PŁYTACH CIENKICH

UWAGI:

- Zerowanie się odkształceń postaciowych ε_{31} oraz ε_{23} wynika z **hipotezy Kirchhoffa**.

- Z uwagi na **liniowość związków konstytutywnych** pociąga to za sobą **zerowanie się odpowiednich naprężeń stycznych**: $\sigma_{31}=\sigma_{23}=0$

- Spodziewamy się jednak, że w płycie obciążonej poprzecznie (na kierunku x_3) powinny być obecne naprężenia styczne σ_{31} oraz σ_{23} .

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZWIĄZKI KINEMATYCZNE W PŁYTACH CIENKICH

Związki kinematyczne możemy formalnie zapisać w odmienny sposób:

$$\varepsilon_{11} = \bar{\varepsilon}_{11} + \varkappa_{11} x_3, \qquad \varepsilon_{22} = \bar{\varepsilon}_{22} + \varkappa_{22} x_3, \qquad \varepsilon_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = \bar{\varepsilon}_{12} + \varkappa_{12} x_3 \qquad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) \qquad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\right)$$

gdzie:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad \bar{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v}{\partial x_2}, \qquad \bar{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right), \qquad \phi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \qquad \phi_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\varkappa_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \qquad \varkappa_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \qquad \varkappa_{12} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}\right) = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

„Sztuczka” polega na tym, że potraktowaliśmy ϕ_i oraz $\dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ jako wielkości niezależne.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE W PŁYTACH CIENKICH

- Stan mechaniczny, w jakim znajdują się cząstki płyty jest **płaskim stanem odkształcenia**.

- Z uwagi na **pomijalnie małą wartość poprzecznego naprężenia normalnego** $\sigma_{33} \approx 0$ możemy uznać, że jest to jednocześnie w przybliżeniu **płaski stan naprężenia**.

- Uogólnione stałe sprężyste ze związków konstytutywnych dla stanu płaskiego możemy wtedy utożsamiać z rzeczywistymi stałymi sprężystymi opisującymi zagadnienia trójwymiarowe.

- W sensie ścisłym odpowiada to sytuacji, w której **współczynnik Poissona jest zerowy**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

ZWIĄZKI KONSTYTUTYWNE W PŁYTACH CIENKICH

Związki konstytutywne dla płyt **izotropowych**:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot x_3\right) + \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\cdot x_3\right)\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\cdot x_3\right) + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\cdot x_3\right)\right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2\frac{\partial w}{\partial x_1 \partial x_2}x_3\right]$$

W postaci **macierzowej**:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ & 1 & 0\\ \mathrm{sym} & & 1+\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ & 1 & 0\\ \mathrm{sym} & & 1-\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

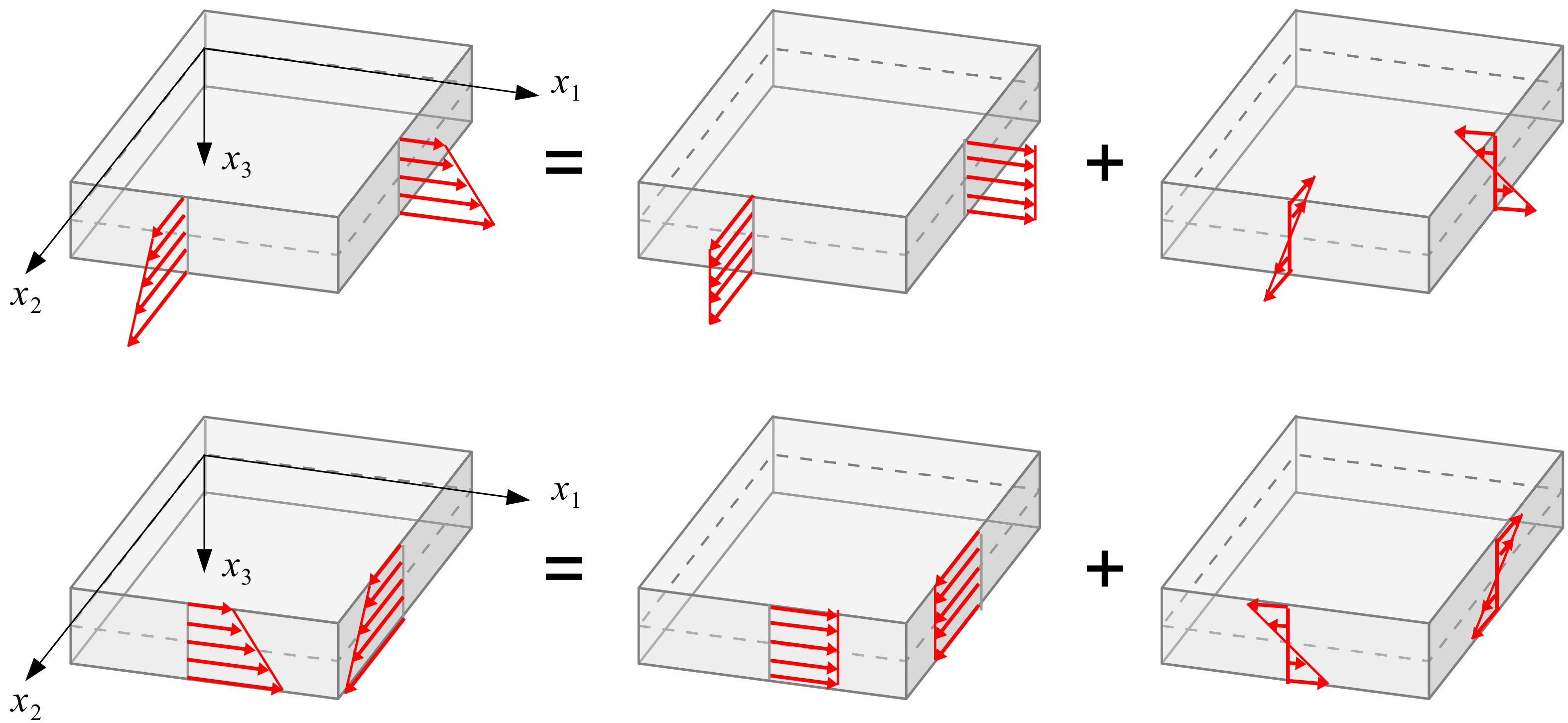
Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

SIŁY PRZEKROJOWE W PŁYTACH CIENKICH

Na podstawie związków konstytutywnych możemy zauważyć, że dla ustalonego włókna prostopadłego do powierzchni środkowej, **naprężenia zmieniają się liniowo względem zmiennej** x_3 .

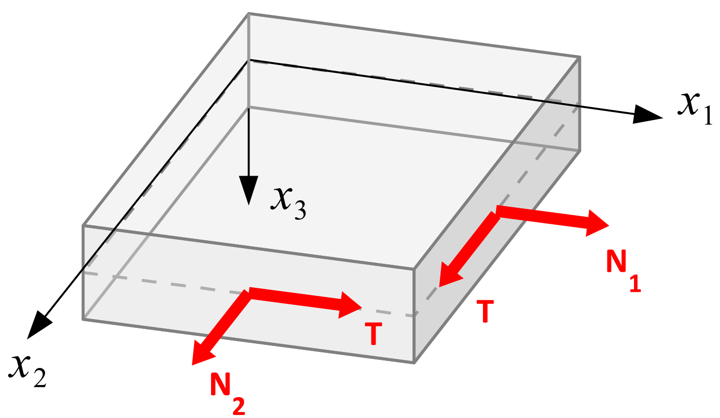
Naprężenia **normalne** i **styczne** można rozłożyć wtedy na:

- symetryczną składową **stałą**
- antysymetryczną składową **zmienną liniowo**



Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

SIŁY PRZEKROJOWE W PŁYTACH CIENKICH



siła podłużna – suma **symetrycznej** części naprężeń **normalnych**

$$N_1 = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\,\mathrm{d}x_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial v}{\partial x_2}\right]$$

$$N_2 = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \sigma_{22}\,\mathrm{d}x_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]$$

siła styczna – suma **symetrycznej** części naprężeń **stycznych**

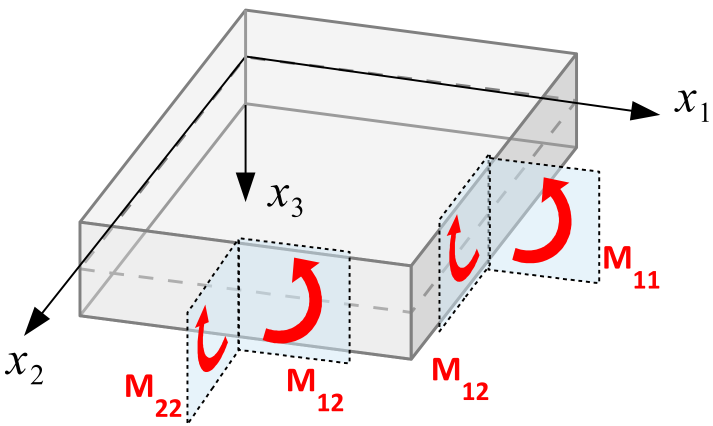
$$T = \int\limits_{x_3=-h/2}^{h/2} \sigma_{12}\,\mathrm{d}x_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right]$$

UWAGA:

- **wymiar fizyczny sił podłużnych i stycznych** to $\mathrm{N/m}$ – jest to **liniowa gęstość sił** odniesionych do przekroju poprzecznego o **jednostkowej szerokości**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

SIŁY PRZEKROJOWE W PŁYTACH CIENKICH



moment zginający – moment **antysymetrycznej** części naprężeń **normalnych** względem punktu na powierzchni środkowej.

$$M_{11} = \int_{x_3=-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{11} \, \mathrm{d} x_3 = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]$$

$$M_{22} = \int_{x_3=-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{22} \, \mathrm{d} x_3 = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right]$$

moment skręcający – moment **antysymetrycznej** części naprężeń **stycznych** względem punktu na powierzchni środkowej.

$$M_{12} = \int_{x_3=-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{12} \, \mathrm{d} x_3 = -(1-\nu) \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right]$$

UWAGA:

- **wymiar fizyczny momentów zginających i skręcających** to $\mathrm{Nm/m}$ – jest to **liniowa gęstość momentów** odniesionych do przekroju poprzecznego o **jednostkowej szerokości**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

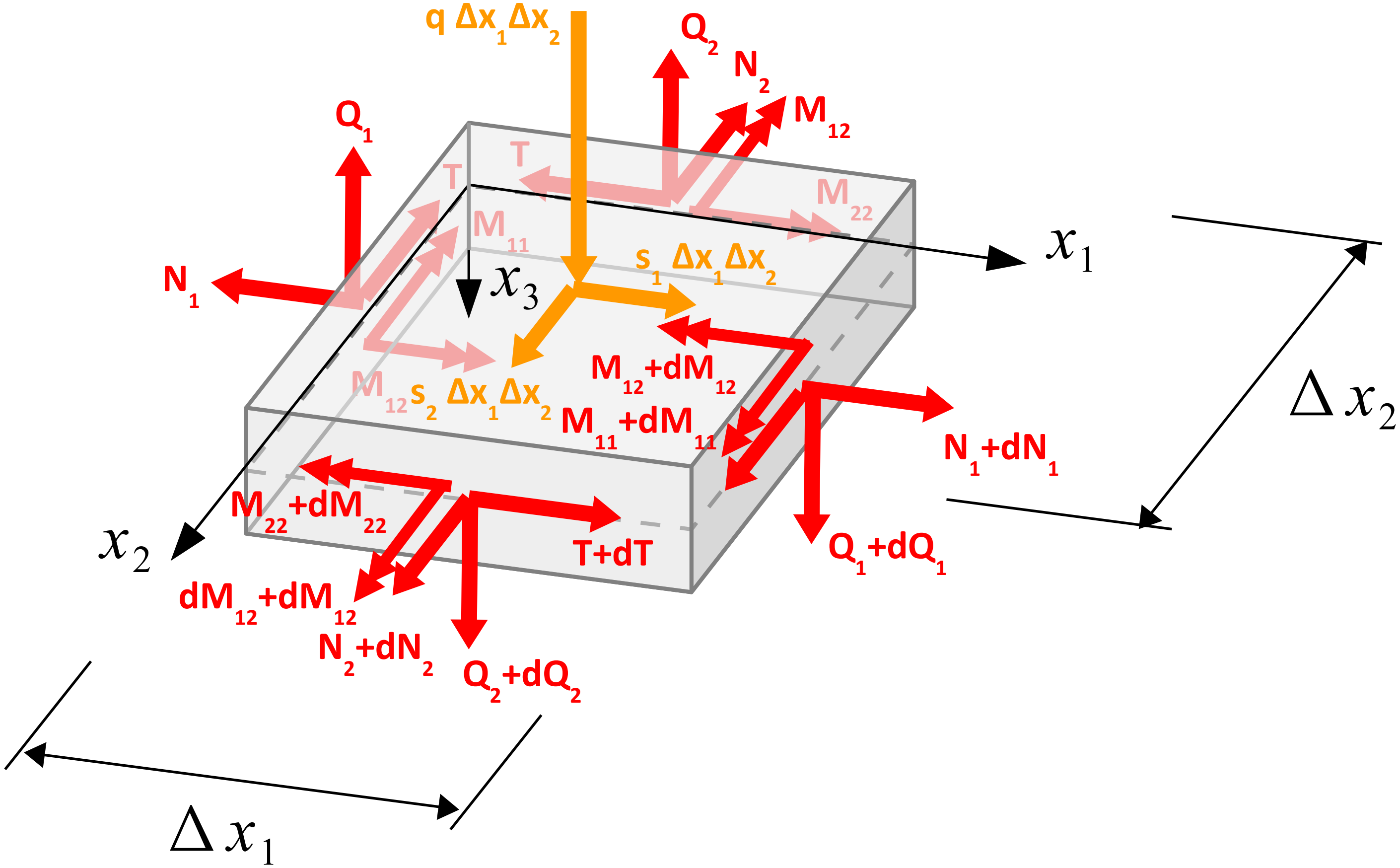
SIŁY PRZEKROJOWE W PŁYTACH CIENKICH

UWAGA:

- z założeń teorii Kirchhoffa – Love'a wynika, że **naprężenia styczne** $\sigma_{31}, \sigma_{23} = 0$
- **siła poprzeczna w płytach cienkich** formalnie jest **równa 0.**
- stwierdza się jednak obecność takich sił, co ma znaczenie przy weryfikacji nośności płyty. Dla płyt o umiarkowanej grubości stwierdza się ponadto, że naprężenia styczne mają wpływ na jej ugięcie.
- w celu wyprowadzenia **równań równowagi** nieskończenie małego elementu płytowego zakłada się istnienie **niezerowych sił poprzecznych**.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH



Zakładamy, że przyrost wartości każdej z sił poprzecznych związany z przyrostem wartości zmiennej x_i jest w przybliżeniu równy:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH

Równania równowagi dla rozważanego elementu płytowego dla $\Delta x_1, \Delta x_2 \to 0$

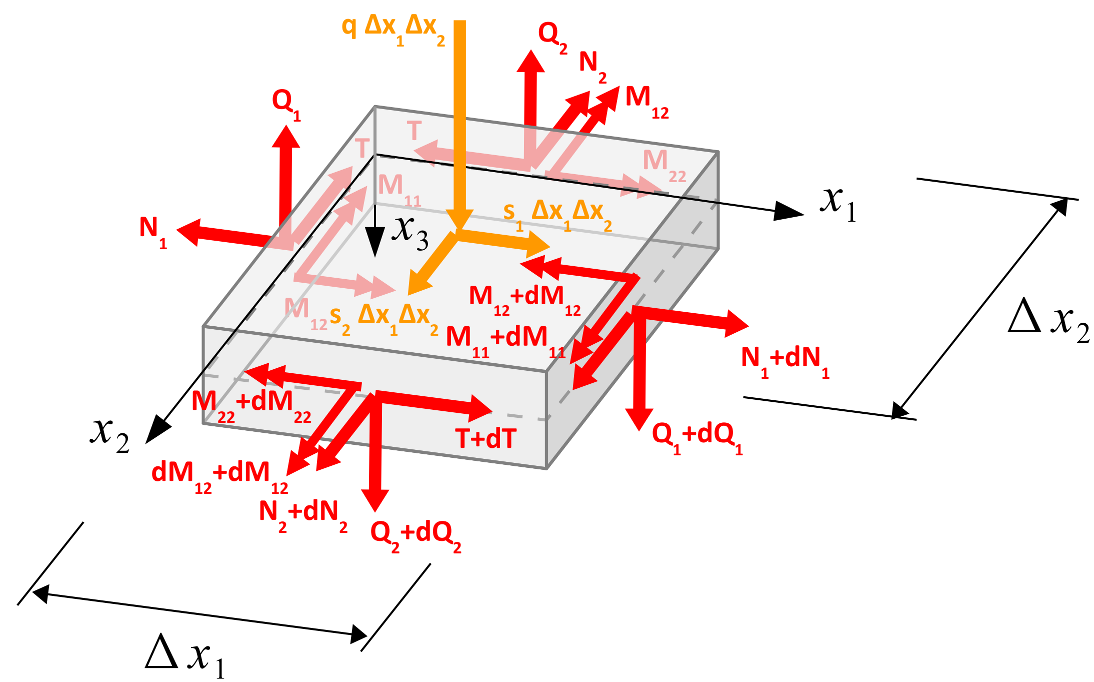
$$\Sigma F_1 = 0: \quad \boxed{\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial x_2} + s_1 = 0}$$

$$\Sigma F_2 = 0: \quad \boxed{\frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T}{\partial x_1} + s_2 = 0}$$

$$\Sigma F_3 = 0: \quad \boxed{\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + q = 0}$$

$$\Sigma M_1 = 0: \quad \boxed{Q_2 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = 0}$$

$$\Sigma M_2 = 0: \quad \boxed{Q_1 - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0}$$



$$\Sigma M_3 = 0: \quad T_{12} - T_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{12} = T_{21} = T$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH

Równania równowagi momentów stają się **definicją** sił poprzecznych:

$$Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right] = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_2 \partial x_1^2}\right] = -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH – STAN TARCZOWY

Rozważmy **równania równowagi sił w płaszczyźnie środkowej**: $\Sigma F_1 = 0, \quad \Sigma F_2 = 0.$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T}{\partial x_2} + s_1 = 0 \\ \dfrac{\partial N_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T}{\partial x_1} + s_2 = 0 \end{cases}$$

Siły przekrojowe wyrażamy przez **przemieszczenia**

$$\begin{cases} \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \nu\dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right] + \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right] + s_1 = 0 \\ \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left[\dfrac{\partial v}{\partial x_2} + \nu\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right] + \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\dfrac{1-\nu}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right] + s_2 = 0 \end{cases}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH – STAN TARCZOWY

Oznaczmy: $\bar{\sigma}_{11}=\dfrac{E}{1-\nu^2}[\bar{\varepsilon}_{11}-\nu\bar{\varepsilon}_{22}],\qquad \bar{\sigma}_{22}=\dfrac{E}{1-\nu^2}[\bar{\varepsilon}_{22}-\nu\bar{\varepsilon}_{11}],\qquad \bar{\sigma}_{12}=\dfrac{E}{(1+\nu)}\bar{\varepsilon}_{12}$

gdzie: $\bar{\varepsilon}_{11}=\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\qquad \bar{\varepsilon}_{22}=\dfrac{\partial v}{\partial x_2},\qquad \bar{\varepsilon}_{12}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right),$

wtedy **równania równowagi w płaszczyźnie** przyjmują postać:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\bar{\sigma}_{12}}{\partial x_2}+\dfrac{s_1}{h}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\bar{\sigma}_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\bar{\sigma}_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{s_2}{h}=0\end{cases}$$

Są to **równania równowagi** dla zagadnienia płaskiego w płaszczyźnie środkowej płyty.

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH – STAN PŁYTOWY

Równanie równowagi $\Sigma F_3 = 0$ po uwzględnieniu równań równowagi momentów ma postać:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} + q$$

Siły przekrojowe wyrażamy przez **przemieszczenia**:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right] = \frac{q}{D_b}$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie przemieszczeniowe rządzące **stanem płytowym** (giętnym):

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D_b} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D_b}}$$

gdzie:

$$D_b = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$ - **sztywność płytowa** (giętna)

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁYT CIENKICH

UWAGI:

- Jeśli tylko **warunki brzegowe** sformułowane są w taki sposób, że
  - przemieszczenia w płaszczyźnie płyty i siły tarczowe nie są określone przez ugięcia i momenty
  - ugięcia i momenty nie są określane przez przemieszczenia w płaszczyźnie płyty i siły tarczowe

- Wtedy **stan tarczowy i stan płytowy są niezależnymi zagadnieniami**:
  - stan tarczowy (**membranowy**) wyznaczamy jako **rozwiązanie zagadnienia płaskiego**, np. przez wykorzystanie **funkcji naprężeń Airy'ego**, będącej rozwiązaniem **jednorodnego równania biharmonicznego**:

$$\nabla^4 F = 0$$

  - stan płytowy (**giętny**) wyznaczamy przez wyznaczenie **rozkładu ugięcia** płyty, jako rozwiązania **niejednorodnego równania biharmonicznego**:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D_b}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

WARUNKI BRZEGOWE

- kinematyczne warunki brzegowe dla **stanu** tarczowego:

przemieszczenia poziome punktów brzegowych: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u_0} \,, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$

- statyczne warunki brzegowe dla **stanu** tarczowego:

obciążenie na brzegu: $(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})\big|_{\mathbf{x}} = \mathbf{q} \,, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$

- kinematyczne warunki brzegowe dla **stanu** płytowego:

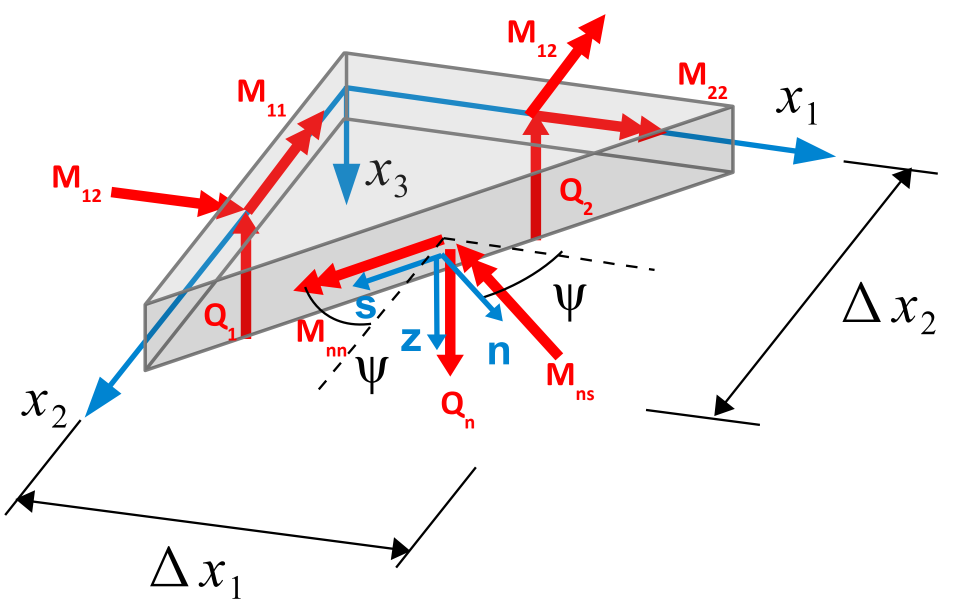
ugięcie punktów brzegowych: $w(\mathbf{x}) = w_0 \,, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$

kąt obrotu na kierunku normalnym do brzegu: $\phi_n(\mathbf{x}) = \nabla w \cdot \mathbf{n} = \dfrac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \dfrac{\partial w}{\partial x_2} n_2 = \phi_0 \,, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

WARUNKI BRZEGOWE

- statyczne warunki brzegowe dla **stanu** płytowego:
  - wymagają wzorów na **brzegowe siły przekrojowe** przy dowolnej orientacji brzegu względem osi przyjętego układu współrzędnych. Związki te wyznaczamy z **równowagi elementu płytowego**:



stan tarczowy:

$$\begin{cases} N_n = N_{11}\cos^2\psi + N_{22}\sin^2\psi + T\sin 2\psi \\ T_{ns} = \frac{1}{2}(N_{22}-N_{11})\sin 2\psi + T\cos 2\psi \end{cases}$$

stan płytowy:

$$\begin{cases} M_{ns} = \frac{1}{2}(M_{22}-M_{11})\sin 2\psi + M_{12}\cos 2\psi \\ M_{nn} = M_{11}\cos^2\psi + M_{22}\sin^2\psi + M_{12}\sin 2\psi \\ Q_n = Q_1\cos\psi + Q_2\sin\psi \end{cases}$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

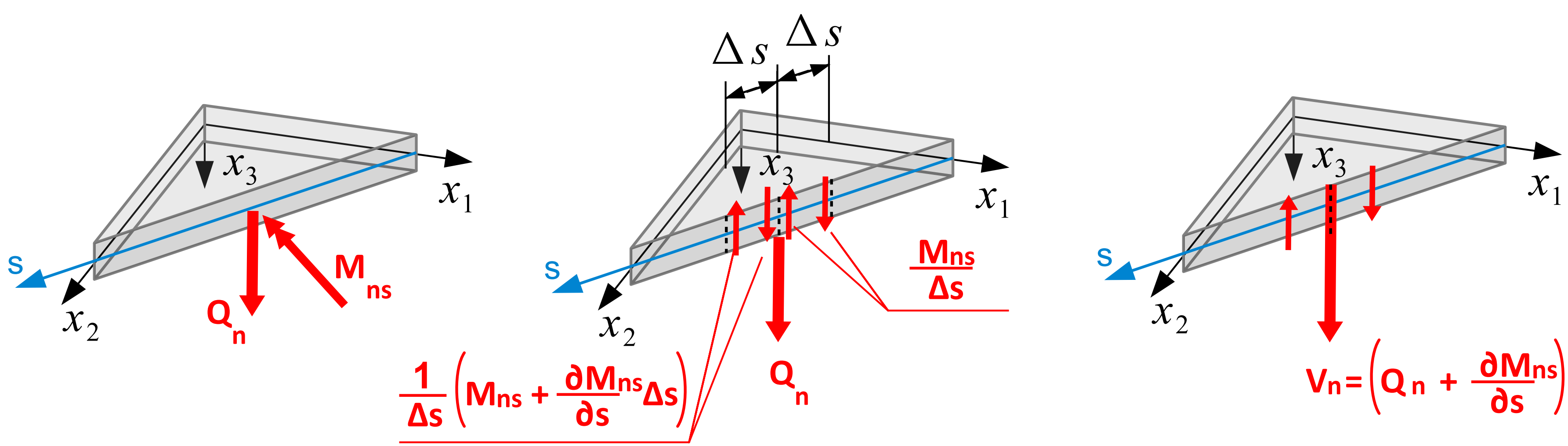
WARUNKI BRZEGOWE

- statyczne warunki brzegowe dla **stanu** płytowego:

obciążenie **momentem zginającym** na **brzegu**: $M_{nn} = \hat{M}_{nn}, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$

obciążenie **momentem skręcającym** na **brzegu**: $M_{ns} = \hat{M}_{ns}, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$

obciążenie si**łą poprzeczną** na **brzegu**: $V_n \overset{\text{df.}}{=} Q_n + \dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \hat{V}_s, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$



V_n - efektywna brzegowa siła poprzeczna (siła poprzeczna Kirchhoffa) $\quad [V_n] = [Q_n] = \mathrm{N/m}$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

WARUNKI BRZEGOWE

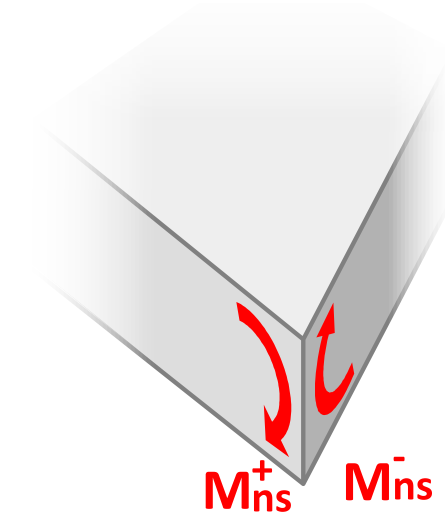
- statyczne warunki brzegowe dla **stanu** płytowego **w punktach narożnych**:

  suma efektywnej brzegowej siły poprzecznej w narożu brzegu:

$$P=\lim_{e\to 0}\int_{-e}^{e} V_n \,\mathrm{d}s=\lim_{e\to 0}\int_{-e}^{e}\left(Q_n+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)\mathrm{d}s=\lim_{e\to 0}\left[\int_{-e}^{e} Q_n \,\mathrm{d}s+\left[M_{ns}\right]_{-e}^{e}\right]=$$

$$=\lim_{e\to 0} M_{ns}(e)-\lim_{e\to 0} M_{ns}(-e)=M_{ns}^{+}-M_{ns}^{-}$$

$$[P]=[M_{ns}]=\mathrm{Nm/m}=\mathrm{N}$$



WNIOSKI:

- nawet jeśli **płyta nie jest obciążona siłami poprzecznymi na brzegu**, **warunki równowagi w narożu płyty wymagają obecności siły skupionej**.

- Przykładowo – dla naroża o **kącie prostym**: $P=2M_{ns}$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁYTY KOŁOWE I PIERŚCIENIOWE

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁYTY KOŁOWE I PIERŚCIENIOWE

Dla **płyt kołowych** i **pierścieniowych** właściwsze jest wykorzystanie **współrzędnych biegunowych**, w których **biharmoniczne** równanie przemieszczeniowe przyjmuje postać:

$$w_{,rrrr}+\frac{2}{r^2}w_{,rr\phi\phi}+\frac{1}{r^4}w_{,\phi\phi\phi\phi}+\frac{2}{r}w_{,rrr}-\frac{2}{r^3}w_{,r\phi\phi}-\frac{1}{r^2}w_{,rr}+\frac{4}{r^4}w_{,\phi\phi}+\frac{1}{r^3}w_{,r}=\frac{q(r,\phi)}{D_b}$$

Siły przekrojowe w **biegunowym układzie współrzędnych**:

$$M_{rr}=-D_b\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right)\right]$$

$$M_{\phi\phi}=-D_b\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right)+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]$$

$$M_{r\phi}=-D_b(1-\nu)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right]$$

$$Q_r=-D_b\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w$$

$$Q_\phi=-D_b\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\nabla^2 w$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

PŁYTY KOŁOWE I PIERŚCIENIOWE OSIOWOSYMETRYCZNE

Dla **osiowosymetrycznych płyt kołowych** i **pierścieniowych biharmoniczne** równanie przemieszczeniowe przyjmuje postać:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial w}{\partial r}\right]\right]\right]=\frac{q(r)}{D_b}$$

Rozwiązanie – rozkład ugięć:

$$w(r)=\left[A_{00}+A_{01}r^2+A_{02}r^2\ln r+A_{03}\ln r\right]+$$
$$+\frac{1}{D_b}\int\frac{1}{r}\left[\int r\left[\int\frac{1}{r}\left[\int r\,q(r)\,\mathrm{d}r+B_1\right]\mathrm{d}r+B_2\right]\mathrm{d}r+B_3\right]\mathrm{d}r+B_4$$

Stałe całkowania wyznaczamy z **warunków brzegowych**.

Niezerowe siły przekrojowe w **biegunowym układzie współrzędnych**:

$$M_{rr}=-D_b\left[\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right]\qquad M_{\phi\phi}=-D_b\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}+\nu\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}\right]\qquad Q_r=-D_b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right]$$

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Prezentacja: © 2021 – Paweł Szeptyński – Creative Commons BY-SA 4.0
Ilustracje: © 2021 – Paweł Szeptyński, Politechnika Krakowska – Creative Commons BY-NC-SA 4.0