TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI

dr inż. Paweł Szeptyński

adres: p. 320 – III p. WIL
tel. 12 628 20 30
e-mail: pszeptynski@pk.edu.pl

RACHUNEK MACIERZOWY

RACHUNEK MACIERZOWY

Macierzą nazywamy **prostokątną** (**dwuwymiarową**) **tablicę liczb**, które numerowane są z użyciem **dwóch wskaźników**:

- **pierwszy wskaźnik** informuje nas o **wierszu** tablicy, w którym liczba się znajduje
- **drugi wskaźnik** informuje nas o **kolumnie** tablicy, w którym liczba się znajduje

Liczby występujące w macierzy nazywać będziemy jej **elementami**.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{kolumna 1} \downarrow & \text{kolumna 2} \downarrow & \text{kolumna 3} \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{wiersz 1} \rightarrow \\ \text{wiersz 2} \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \end{array}$$

RACHUNEK MACIERZOWY

UWAGA:

- W **mechanice ośrodków ciągłych** macierze interesują nas tylko o tyle, o ile są reprezentacjami tensorów, tj. macierzami, których **elementy są równe składowym tensorów w rozpatrywanym układzie współrzędnych**.

- **Składowe tensorów** (w tym wektorów), **zmieniają się, jeśli zmieni się układ współrzędnych**. W konsekwencji przy zmianie układu współrzędnych **zmienia się reprezentacja macierzowa** tensorów (**zmieniają się wartości elementów** macierzy).

ZAPIS

KONWENCJA SUMACYJNA

Stosować będziemy następujące symbole:

DELTA KRONECKERA

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad i = j \\ 0 & \Leftrightarrow \quad i \neq j \end{cases}$$

SYMBOL PERMUTACYJNY LEVI-CIVITY

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \quad (i,j,k) \in \{(1,2,3);(2,3,1);(3,1,2)\} & \leftarrow \text{parzyste permutacje } (1,2,3) \\ -1 & \Leftrightarrow \quad (i,j,k) \in \{(2,1,3);(1,3,2);(3,2,1)\} & \leftarrow \text{nieparzyste permutacje } (1,2,3) \\ 0 & \Leftrightarrow \quad \text{jakiekolwiek wskaźniki się powtarzają} \end{cases}$$

KONWENCJA SUMACYJNA

Stosować będziemy konwencją sumacyjną Einsteina, zgodnie z którą:

> *Jeśli w zapisie wskaźnikowym w pewnym wyrażeniu będącym iloczynem liczb numerowanych wskaźnikami pewien **wskaźnik powtarza się dwa razy**, raz na górze, raz na dole, **oznacza to sumowanie względem tego wskaźnika** dla wszystkich wartości jakie może on przyjmować.*

UWAGI:

- W poruszanych przez nas zagadnieniach (układy kartezjańskie, odwzorowanie ortogonalne) **nie ma potrzeby rozróżniania wskaźników dolnych i górnych**. Wszystkie **będziemy pisać na dole**.
- **Wskaźnik, względem którego odbywa się sumowanie** nazywamy wskaźnikiem **niemym**.
- Wskaźnik, nie będący wskaźnikiem niemym, nazywamy wskaźnikiem **wolnym**.
- Wskaźniki nieme w ramach jednego wyrażenia można zmieniać.
- Operacja różniczkowania w zapisie wskaźnikowym oznaczana jest dopisaniem po przecinku kolejnego dolnego wskaźnika, który wskazuje na zmienną względem której się różniczkuje. Wskaźnik ten podlega tym samym zasadom konwencji, co zwykłe wskaźniki.

KONWENCJA SUMACYJNA

PRZYKŁADY:

- nasunięcie tensorów (mnożenie macierzy):

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} B_{kj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \ldots + A_{iN} B_{Nj}$$

i, j – wskaźniki wolne, k – wskaźnik niemy $\left(C_{ij} = A_{ik} B_{kj} = A_{im} B_{mj} \text{ itp.}\right)$

- zwężenie (kontrakcja) tensora:

$$\theta = \varepsilon_{ii} \quad \Rightarrow \quad \theta = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \ldots + \varepsilon_{NN}$$

- długość wektora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_k v_k} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} v_k v_k} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

KONWENCJA SUMACYJNA

PRZYKŁADY:

- dywergencja pola wektorowego:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = v_{k,k} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3} v_{k,k} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

- układ równań ruchu ośrodka ciągłego w opisie przestrzennym:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 = \rho \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 = \rho \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = \rho \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{cases}$$

dr inż. Paweł Szeptyński

KONWENCJA SUMACYJNA

PRZYKŁADY:

- związki geometryczne nieliniowej teorii sprężystości

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}
E_{11}=\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right]\\
E_{22}=\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\\
E_{33}=\frac{1}{2}\left[2\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2\right]\\
E_{23}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]\\
E_{31}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right]\\
E_{12}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right]
\end{cases}$$

ZAPIS

Odnosząc się do **tensorów** lub ich **reprezentacji macierzowych** stosować będziemy **3 formy zapisu**:

$$A_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad [A_{ij}]$$

$$\mathbf{A}$$

ZAPIS WSKAŹNIKOWY

- Odnosimy się do składowych tensorów (elementów macierzy) w pewnym układzie współrzędnych

ZAPIS MACIERZOWY

- Przywołujemy całą postać macierzy – jest to zapis najbardziej użyteczny w kontekście praktycznych rachunków na macierzach.
- Niekiedy stosować będziemy zapis uproszczony. Dotyczy to sytuacji, w których pewne działania na tensorach w zapisie wskaźnikowym dają się łatwiej zinterpretować w kontekście rachunków na macierzach reprezentacji tych tensorów

ZAPIS ABSOLUTNY

- Odnosimy się do tensora (macierzy) jako takiego, bez odniesienia do jego składowych (elementów) w jakimkolwiek układzie współrzędnych.

ZAPIS

	ZAPIS ABSOLUTNY	ZAPIS WSKAŹNIKOWY
• skalar	α	α
• wektor	$\mathbf{a}$	a_i
• tensor	$\mathbf{A}$	A_{ij}
• iloczyn skalarny wektorów	$\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\alpha = a_i b_i$
• długość wektora	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{v_i v_i}$
• iloczyn wektorowy wektorów	$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$
• nasunięcie tensora na wektor	$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$	$y_i = A_{ij} x_j$
• nasunięcie tensorów	$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$	$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$
• iloczyn skalarny tensorów	$\alpha = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\alpha = A_{ij} B_{ij}$
• tensor jednostkowy	$\mathbf{1}$	δ_{ij}

DZIAŁANIA NA TENSORACH

DZIAŁANIA NA TENSORACH

UWAGI:

- Ponieważ zajmujemy się tylko **reprezentacjami macierzowymi tensorów i wektorów trójwymiarowych,** zatem interesować nas będą tylko:
  - **macierze jednowierszowe i jednokolumnowe o 3 elementach** – reprezentacje wektorów
  - **macierze kwadratowe 3 x 3** – reprezentacje tensorów 2 rzędu
- Wektory będziemy reprezentować przez macierze jednokolumnowe (3-wierszowe). W pewnych określonych sytuacjach będziemy stosować transpozycje tych macierzy.

DZIAŁANIA NA TENSORACH

DODAWANIE WEKTORÓW

- **dodawaniu wektorów** odpowiada **dodawanie macierzy** ich reprezentacji
- dodawanie wektorów (macierzy) jest **łączne** $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
- dodawanie wektorów (macierzy) **przemienne** $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

$$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad w_i=u_i+v_i$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

DODAWANIE TENSORÓW

- **dodawaniu tensorów** odpowiada **dodawanie macierzy** ich reprezentacji
- dodawać możemy tylko **tensory tego samego typu** (**macierze o tych samych wymiarach**)
- dodawanie tensorów (macierzy) jest **łączne** $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
- dodawanie tensorów (macierzy) **przemienne** $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B} \qquad \Leftrightarrow \qquad C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \\ A_{31}+B_{31} & A_{32}+B_{32} & A_{33}+B_{33} \end{bmatrix}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

TRANSPOZYCJA TENSORA

- **Transpozycji tensora** odpowiada **transpozycja macierzy** jego reprezentacji, tj.:
  - zamiana wierszy na kolumny a kolumn na wierze
  - zamiana kolejności wskaźników
- **Transpozycja transpozycji daje tensor wyjściowy** $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad B_{ij} = A_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \quad \Leftrightarrow \quad w_i = v_i$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

- **Nasunięciu tensorów** odpowiada **mnożenie macierzy** ich reprezentacji.
- Nasunięcie tensorów (mnożenie macierzy) jest **łączne** $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$
- Nasunięcie tensorów (mnożenie macierzy) **nie jest przemienne** $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}) & (A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32}) & (A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33}) \\ (A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31}) & (A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32}) & (A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23} + A_{33}B_{33}) \end{bmatrix}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\boxed{M=N}$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & N\left\{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}\right. \\
\overbrace{\hphantom{A_{11}\quad A_{12}\quad A_{13}}}^{M} & \\
\hline
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \text{kolumna } j \quad j=1 \\
 & & & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\
i=1 & \text{wiersz } i & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$C_{ij} = C_{11} =$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

kolumna j

$$j=1$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

$$i=1$$

wiersz i

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = C_{11} = A_{11} B_{11}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} \text{kolumna j} \quad j=1 \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\
i=1 \quad \text{wiersz i} \; \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$C_{ij} = C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\begin{array}{rc|c}
 & & \begin{array}{l} \text{kolumna } j \quad j=1 \end{array} \\
 & & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\
\hline
i=1 \quad \text{wiersz } i & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$C_{ij} = C_{11} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + A_{13} B_{31} = \sum_{k=1}^{3} A_{1k} B_{k1} \qquad \Rightarrow \qquad C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\begin{array}{rr|c} & & \begin{array}{ccc} \phantom{B_{11}} & \phantom{B_{12}} & \text{kolumna } j \end{array} \quad j=3 \\ & & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\ \hline i=2 & \begin{array}{c} \\ \text{wiersz } i \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$C_{ij} = C_{23} =$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{kolumna } j \quad j=3 \\
 & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\
\hline
i=2 \quad \text{wiersz } i \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$C_{ij} = C_{23} = A_{21} B_{13}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & \text{kolumna } j & j=3 \\
 & & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} & \\
\hline
i=2 \quad \text{wiersz } i & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} &
\end{array}$$

$$C_{ij} = C_{23} = A_{21} B_{13} + A_{22} B_{23}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$
\begin{array}{cc|c}
 & & \begin{array}{ccc} & & \text{kolumna } j \end{array} \quad j=3 \\
 & & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\
\hline
i=2 \quad \text{wiersz } i & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$C_{ij} = C_{23} = A_{21} B_{13} + A_{22} B_{23} + A_{23} B_{33} = \sum_{1}^{3} A_{2k} B_{k3} \qquad \Rightarrow \qquad C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

- Nasunięcie tensora na wektor daje wektor. Tensor utożsamiać można z odwzorowaniem (więc i z macierzą) przyporządkowującym wektorowi wektor.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad y_i = A_{ij} x_j$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 \\ A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 \end{bmatrix}$$

- Jeśli **wektory** utożsamiamy z **macierzami jednokolumnowymi**, to odwzorowanie takie realizowane jest przez **nasunięcie tensora z lewej strony** na wektor (**lewostronne mnożenie przez macierz kwadratową**)

- W zapisie wskaźnikowym nasunięcie oznaczane jest przez powtarzające się sąsiednie indeksy.

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

- Nasunięcie tensora z prawej strony na wektor oblicza się tak samo

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\,\mathbf{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad y_i = x_j A_{ji}$$

  wtedy jednak w zapisie macierzowym wektor powinien być macierzą jednowierszową.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{11}x_1+A_{21}x_2+A_{31}x_3) & (A_{12}x_1+A_{22}x_2+A_{32}x_3) & (A_{31}x_1+A_{23}x_2+A_{33}x_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x_1+A_{21}x_2+A_{31}x_3 \\ A_{12}x_1+A_{22}x_2+A_{32}x_3 \\ A_{31}x_1+A_{23}x_2+A_{33}x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$[x_j]^{\mathrm{T}}[A_{ji}] = [y_i]^{\mathrm{T}}$$

- Działania na tensorach nie zawsze w naturalny sposób realizuje się w ramach rachunku macierzowego.

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

$$\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad k=1,2,3: \quad A_{ij}\delta_{jk} = A_{i1}\delta_{1k} + A_{i2}\delta_{2k} + A_{i3}\delta_{3k} = A_{ik}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1}\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad j=1,2,3: \quad v_i\delta_{ij} = v_1\delta_{1j} + v_2\delta_{2j} + v_3\delta_{3j} = v_j$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

- Transpozycja iloczynu macierzy to iloczyn transpozycji macierzy ze zmienioną kolejnością mnożenia

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad (C^{\mathrm{T}})_{ij} = C_{ji} = A_{jk} B_{ki} = (A^{\mathrm{T}})_{kj} (B^{\mathrm{T}})_{ik} = (B^{\mathrm{T}})_{ik} (A^{\mathrm{T}})_{kj} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$$

- Macierz odwrotna: $\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ik} B_{kj} = B_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}}$

- Transpozycja odwrotności to **odwrotność transpozycji**:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}}}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

NASUNIĘCIE TENSORÓW

- **Nasunięcie wektora na wektor** – iloczyn skalarny

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Iloczynowi skalarnemu wektorów odpowiada mnożenie transpozycji macierzy reprezentacji wektora z macierzą reprezentacji drugiego wektora:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad [a_i]^{\mathrm{T}}[b_i]$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} & a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{array}$$

Możemy umówić się, że:

- **kropką** oznaczamy **iloczyn skalarny**
- **nasunięcie** odpowiadające **mnożeniu macierzy** zapisujemy **bez żadnego znaku**.

- Długość wektora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}} = \sqrt{v_i v_i} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

ILOCZYN SKALARNY TENSORÓW

- Tak samo jak dla iloczynu skalarnego wektorów iloczyn skalarny tensorów obliczać będziemy jako sumę iloczynów odpowiadających sobie składowych.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{aligned} & A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} + \\ & + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{23} + \\ & + A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33} \end{aligned}$$

DZIAŁANIA NA TENSORACH

ZWĘŻENIE TENSORA

- **Zwężenie** albo **kontrakcja** **tensora** to **sumowanie względem ustalonej pary wskaźników**:

$$A_{ij}\delta_{ij} = A_{11}+A_{22}+A_{33} = A_{ii} = A_{jj} = A_{kk}$$

- ślad tensora $\quad \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(\mathbf{A}) = A_{ij}\delta_{ij} = A_{ii} = A_{11}+A_{22}+A_{33}$

- iloczyn skalarny tensorów $\quad \mathrm{tr}(\mathbf{A}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{ik}A_{kj}(B^{\mathrm{T}})_{ji} = \delta_{ik}A_{kj}B_{ij} = A_{ij}B_{ij}$

- dywergencja pola wektorowego $\quad \mathrm{tr}(\mathbf{v}\otimes\nabla) = \nabla\cdot\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad v_{i,j}\delta_{ij} = v_{i,i} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}$

- laplasjan pola skalarnego $\quad \mathrm{tr}(\phi\otimes\nabla\otimes\nabla) = \Delta\phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi_{,ij}\delta_{ij} = \phi_{,ii} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}$

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ