


Paweł
Szeptyński



**krótkie
wprowadzenie
do teorii
plastyczności**

Szczególne podziękowania kieruję w stronę
mojej ukochanej czteroletniej córeczki Klary,
która wykonywała na kalkulatorze rachunki
do przykładu nr 3, gdy nie chciało się jej spać.

SPIS TREŚCI

Spis oznaczeń.....	3
1 Charakter deformacji plastycznej.....	5
2 Mechanizmy deformacji plastycznej.....	10
3 Warunek plastyczności.....	15
3.1 Powierzchnia plastyczności.....	16
3.2 Warunek plastyczności dla materiałów izotropowych.....	17
3.2.1 Warunek plastyczności Coulomba-Tresci-Guesta.....	20
3.2.2 Warunek plastyczności Maxwella-Hubera-Misesa-Hencky'ego.....	21
3.2.3 Warunek plastyczności Burzyńskiego.....	24
3.3 Stateczność materiału w sensie Druckera.....	26
4 Wybrane zjawiska zachodzące podczas deformacji plastycznej.....	31
4.1 Proces deformacji plastycznej.....	31
4.2 Sprężysty charakter odciążenia.....	32
4.3 Nieściśliwy charakter deformacji plastycznej i niezależność warunku plastyczności od naprężenia hydrostatycznego.....	32
4.4 Wzmocnienie.....	33
4.5 Efekt Bauschingera.....	36
4.6 Anizotropia wymuszona.....	36
5 Równania matematycznej teorii plastyczności.....	37
5.1 Kinematyka ośrodka ciągłego – równania geometryczne.....	37
5.2 Dynamika ośrodka ciągłego – równania ruchu.....	41
5.3 Związki konstytutywne w deformacji sprężysto-plastycznej.....	43
5.3.1 Odkształceniowe modele plastyczności.....	46
5.3.1.1 Teoria Naddaia – Hencky'ego – Iliuszyna.....	46
5.3.2 Przyrostowe modele plastyczności.....	48
5.3.2.1 Teoria Prandtla – Reussa.....	50
5.3.2.2 Teoria Lévy'ego – Misesa.....	50
6 Uplastycznienie przekroju.....	51
6.1 Uplastycznienie przekroju obciążonego osiowo.....	51
6.2 Uplastycznienie przekroju zginanego.....	53
6.2.1 Klasy przekrojów stalowych.....	58
6.3 Uplastycznienie przekroju skręcanego.....	59
6.4 Uplastycznienie rury grubościennej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym.....	63
7 Nośność plastyczna układu konstrukcyjnego.....	67
7.1 Analiza sprężysto-plastyczna.....	68
7.2 Oszacowanie od góry i od dołu nośności plastycznej.....	78
8 Literatura.....	96

SPIS OZNACZEŃ

a, b, c, \dots	- skalary
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	- skalary
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$	- wektory, tensory
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \dots$	- wektory tensory
σ_0	- naprężenie graniczne (granica plastyczności) w stanie jednoosiowym
τ_0	- naprężenie graniczne (granica plastyczności) przy czystym ścinaniu
σ_{eq}	- naprężenie zredukowane (równoważne)
k_t	- naprężenie graniczne przy rozciąganiu
k_c	- naprężenie graniczne przy ściskaniu
k_s	- naprężenie graniczne przy ścinaniu
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- naprężenia główne
I_1	- pierwszy niezmiennik tensora
I_2	- drugi niezmiennik tensora
I_3	- trzeci niezmiennik tensora
J_2	- drugi niezmiennik dewiatora
J_3	- trzeci niezmiennik dewiatora
p	- naprężenie hydrostatyczne
q	- naprężenie dewiatorowe
θ	- kąt Lodego
ϕ	- gęstość energii odkształcenia
ϕ_v	- gęstość energii odkształcenia objętościowego
ϕ_f	- gęstość energii odkształcenia postaciowego
Ψ	- potencjał plastyczny
$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$	- warunek stanu granicznego (warunek plastyczności)
E	- moduł Younga
G	- moduł Kirchhoffa
ν	- współczynnik Poissona
λ	- pierwszy parametr Lamego
n	- wykładnik wzmocnienia potęgowego
$d\lambda$	- parametr historii obciążenia

σ	- tensor naprężenia
s	- dewiator tensora naprężenia
ϵ	- tensor odkształceń całkowitych
ϵ^e	- tensor odkształceń sprężystych
ϵ^{pl}	- tensor odkształceń plastycznych
e	- dewiator tensora odkształceń całkowitych
e^e	- dewiator tensora odkształceń sprężystych
e^{pl}	- dewiator tensora odkształceń plastycznych
$d\epsilon$	- tensor przyrostu odkształceń całkowitych
$d\epsilon^e$	- tensor przyrostu odkształceń sprężystych
$d\epsilon^{pl}$	- tensor przyrostu odkształceń plastycznych
$d\sigma$	- tensor przyrostu naprężenia

Jeśli w pewnym wyrażeniu wskaźnik dolny powtarza się, oznacza to sumowanie względem tego wskaźnika po wszystkich wartościach, jakie może on przyjąć np.

$$\sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j, \quad \epsilon_{kk} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk}, \quad \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \text{ itp.}$$

	notacja absolutna	notacja wskaźnikowa
Dodawanie wektorów	$\mathbf{v} + \mathbf{w}$	$v_i + w_i$
Dodawanie tensorów	$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$	$\alpha_{ij} + \beta_{ij}$
Nasunięcie wektora na tensor	$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$	$\sigma_{ij} n_j$
Iloczyn skalarny wektorów	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$	$v_i w_i$
Iloczyn skalarny tensorów	$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$	$\alpha_{ij} \beta_{ij}$
Ślad tensora	$\text{tr}(\boldsymbol{\alpha})$	α_{ii}

WPROWADZENIE DO TEORII PLASTYCZNOŚCI

Aby móc skorzystać z tego opracowania, konieczna jest znajomość podstaw rachunku różniczkowo-całkowego oraz liniowej teorii sprężystości. Podstawowe zagadnienia teorii sprężystości przypomniane są skrótowo w rozdziale 5.

1. CHARAKTER DEFORMACJI PLASTYCZNEJ

W odróżnieniu od deformacji **sprężystej**, która jest deformacją **odwracalną**, deformacja **plastyczna** jest deformacją **trwałą**:

MATERIAŁ SPRĘŻYSTY



MATERIAŁ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY



Terminów **odkształceń trwałych** i **odkształceń plastycznych** można używać do pewnego stopnia wymiennie. Trwałość deformacji oznacza, że **nowa konfiguracja ciała jest w istocie nowym stanem równowagi sił wewnętrznych**. W ogólności można zatem powiedzieć, że odkształcenie plastyczne zachodzi wtedy, gdy **cząsteczki ciała** (w szczególności atomy w sieci krystalicznej) **pod wpływem przyłożonego obciążenia zajmują taką konfigurację przestrzenną, że siły interakcji między wszystkimi cząsteczkami są w równowadze**.

Pewne odkształcenia trwałe pojawiają się nawet przy bardzo niewielkich obciążeniach czy odkształceniach i jest to spowodowane złożoną i niejednorodną strukturą materiału w skali mikroskopowej (ziarnista budowa materiału) i atomowej – deformacje te są jednak podobnego rzędu wielkości co wielkości owych obszarów w strukturze materiału, stąd najczęściej pomija się je jako małe i makroskopowo deformacja określana jest jako sprężysta. Ważne jest, by zdawać sobie sprawę, że **deformacja plastyczna zachodzi zawsze równoległe do deformacji sprężystej**, nawet jeśli wielkość odkształceń odwracalnych jest o wiele rzędów mniejsza od wielkości odkształceń trwałych, lub gdy odkształcenia sprężyste są niezauważalne lub – z uwagi na charakter zagadnienia

– pomijalnie małe.

W ogólności jednak zawsze występować będą zarówno odkształcenia sprężyste jak i odkształcenia plastyczne, które należy rozróżniać jeśli chcemy opisywać dowolne procesy uwzględniające zjawiska plastyczne. Przykładowo, w procesach odciążenia odkształcenia sprężyste spadają, podczas gdy odkształcenia plastyczne pozostają trwałe. W związku z tym **tensor odkształceń całkowitych** $\boldsymbol{\varepsilon}$ zapisuje się jako sumę **tensora odkształceń sprężystych** $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ oraz **tensora odkształceń plastycznych** $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$$

przy czym związek każdego z nich z tensorem naprężenia (związki konstytutywne) jest różny.

Deformacja plastyczna w zauważalnej skali zachodzi dopiero po tym, gdy **spełniony zostanie tzw. warunek plastyczności**, co w pewnych przypadkach (proste stany obciążenia lub elementarne warunki plastyczności) równoważne jest stwierdzeniu, że **wielkość naprężenia przekroczy pewną graniczną wartość**, którą określamy jako **granice plastyczności** i oznaczać będziemy przez σ_0 . W ogólniejszych przypadkach złożonego stanu naprężenia warunek inicjacji deformacji plastycznej – tzw. **warunek plastyczności** – zapisuje się w postaci

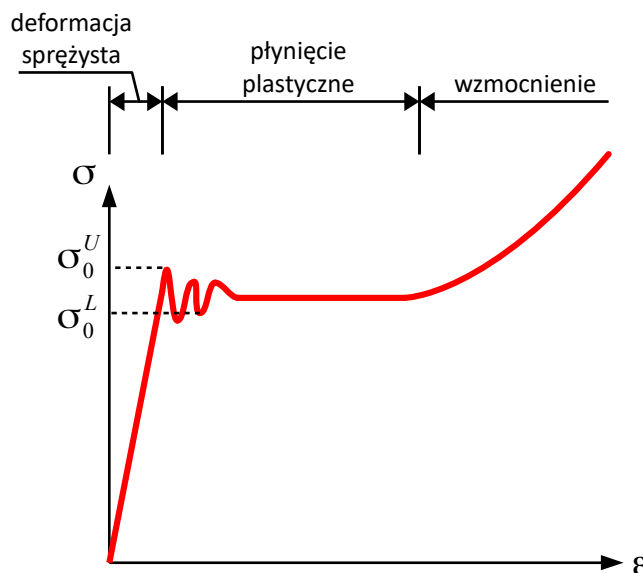
$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

gdzie $f(\boldsymbol{\sigma})$ jest pewną funkcją stanu naprężenia.

Dla zilustrowania kluczowych cech deformacji plastycznej skupmy się tymczasem na prostym stanie obciążenia, w którym warunek plastyczności sprowadza się do zależności $\sigma = \sigma_0$. Trzeba przy tym zwrócić uwagę na fakt, że ta wielkość graniczna nie jest „wyraźna” w tym sensie, że zawsze istnieje pewien zakres przejściowy, w którym przyrost odkształceń plastycznych dopiero wzrasta stopniowo aż do momentu, w którym deformacja plastyczna staje się obserwowalna i mierzalna. Z tego względu stosuje się różne definicje granicy plastyczności.

Ilustracjami dla tych rozważań niech będą schematyczne przebiegi naprężenie osiowe-odkształcenie liniowe w próbie quasistatycznego rozciągania charakterystyczne dla dwóch rodzajów materiałów.

Pierwszy wykres – przedstawiony powyżej – jest typowy dla **materiałów ciągłych o dość wyraźnie zarysowanej granicy między zakresem odkształceń sprężystych oraz zakresem odkształceń plastycznych** (np. dla stali nieskowęgłowej).



Najpierw obserwujemy zakres deformacji w przybliżeniu **liniowo sprężystej**, a następnie obszar, który charakteryzuje się **silnym przyrostem odkształceń przy minimalnej zmianie wielkości naprężenia** (tzw. „**płynięcie plastyczne**”). W tym miejscu trzeba zwrócić uwagę na ważny aspekt matematyczny tego zjawiska – jest bowiem jasne, że **zależność $\sigma(\epsilon)$ nie jest wzajemnie jednoznaczna w zakresie** tej tzw. „**półki plastycznej**” (*plateau*). Oznacza to, że jednej wartości naprężenia odpowiada nieskończenie wiele możliwych wartości odkształcenia, co sprawia, że rozwiązań niektórych zagadnień teorii plastyczności nie da się znaleźć dla jedynie statycznych warunków brzegowych. W szczególności, jednoosiowa próba rozciągania materiału z wyraźną półką plastyczną nie może być zrealizowana przy sterowaniu obciążeniem, ponieważ zwiększenie obciążenia powyżej wartości odpowiadającej półce plastycznej wymagałoby natychmiastowego przyrostu odkształcenia. W rzeczywistości proces ten sterowany jest odkształceniem – to wydłużenie próbki przyrasta stopniowo a mierzona jest siła, jaka jest potrzebna do utrzymania tego wydłużenia. W szczególności można nieraz zaobserwować spadek tej wymaganej wartości siły.

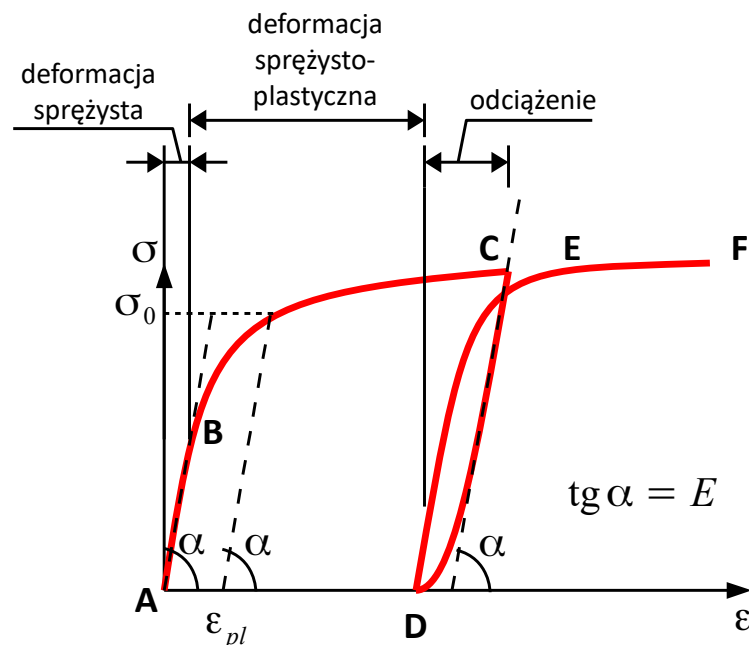
Brak jednoznaczności związków konstytutywnych w materiałach charakteryzujących się występowaniem półki plastycznej stał się przyczynkiem do sformułowania tzw. **przyrostowych modeli plastyczności** (nazywanych niekiedy **modelami płynięcia plastycznego**) – w szczególności chodzi o modele Lévy'ego – Misesa oraz Prandtla-Reussa, które będą omówione później. W modelach tych **tensor naprężenia σ wyznacza w sposób jednoznaczny** nie tyle tensor odkształcenia ϵ , ile **tensor przyrostu odkształcenia** - całkowitego $d\epsilon$ lub plastycznego $d\epsilon^p$, w zależności od przyjętego modelu.

Po obszarze półki plastycznej konieczne jest przyłożenie coraz większego obciążenia – jest to obszar **wzmocnienia**. W większości przypadków wzmocnienie trwa aż do utraty spójności przez materiał, tj. aż do **pęknięcia**, choć nie jest to regułą.

Wśród najczęściej przywoływanych **definicji granicy plastyczności** dla ciągłych materiałów sprężysto-plastycznych warto wymienić:

- **dolną granicę plastyczności** σ_0^L – jest definiowana na kilka sposobów, przy czym często są to te same wartości. Spotykane definicje to:
 - najmniejsza wartość naprężenia, jaka jest konieczna do dalszego przyrostu odkształcenia plastycznego po inicjacji deformacji plastycznej (po spełnieniu warunku plastyczności),
 - najmniejsza wartość naprężenia w zakresie deformacji plastycznej z wyłączeniem pierwszego minimum lokalnego po inicjacji deformacji plastycznej,
 - ostatnie minimum wartości naprężenia w zakresie deformacji plastycznej przed wystąpieniem wzmocnienia.
- **górną granicę plastyczności** σ_0^U – jest definiowana na kilka sposobów, przy czym często są to te same wartości. Spotykane definicje to:
 - pierwsze lokalne maksimum wartości naprężenia po rozpoczęciu procesu deformacji plastycznej (po spełnieniu warunku plastyczności).
 - największa wartość naprężenia w zakresie deformacji plastycznej.

Nie zawsze jednak granica plastyczności jest wyraźnie zarysowana, tak jak to widać na wykresie poniżej. Jest on typowy dla **materiałów ciągłych o nieliniowej charakterystyce** (np. stal wysokowęglowa).



W takich sytuacjach stosuje się odmienną definicję:

- **umowna granica plastyczności** – jest to naprężenie, któremu odpowiada ustalona wielkość odkształcenia trwałego, wyznaczanego przy założeniu, że proces odciążenia jest w całości sprężysty i charakterystyka sprężysta materiału nie ulega zmianie w wyniku deformacji plastycznej. Często przyjmowaną wartością umownego odkształcenia granicznego dla ciągliwych materiałów sprężysto-plastycznych jest $\varepsilon_{pl} = 0,2\%$.

Na omawianym wykresie możemy zaobserwować obszar deformacji sprężystej (AB), po którym daje się zauważyć coraz silniejszy przyrost odkształceń plastycznych. Jednocześnie **cały czas możemy zaobserwować wzmocnienie materiału**. Specyficzny charakter deformacji plastycznej daje się zauważyć w przypadku obciążenia niemonotonicznego. Jeśli bowiem odciążymy próbkę, okaże się, że **proces odciążenia (CD) jest sprężysty**, przy czym **charakterystyka sprężysta tego procesu jest niemal identyczna z charakterystyką pierwszego obszaru deformacji sprężystej**, jeszcze sprzed wystąpienia istotnych odkształceń plastycznych. W rzeczywistości obserwuje się pewną nieliniowość tego procesu, która związana jest z obecnością w materiale naprężeń resztkowych (związanych z niejednorodnością wewnętrznej struktury materiału), które wobec spadku obciążenia zewnętrznego mogą doprowadzić do kolejnych poślizgów. **Ponowny proces obciążenia ma charakter analogiczny do obciążenia w zakresie sprężystym** – najpierw występuje zakres deformacji w przybliżeniu liniowo-sprężystej a następnie powoli przyrastają kolejne odkształcenia plastyczne, tak że krzywa EF stanowi do pewnego stopnia kontynuację wykresu krzywej BC. **Pętla CDE jest pętlą histerezy**, a jej wielkość jest miarą **energii rozproszonej** w czasie procesu odciążenia i ponownego obciążenia. Warto przy tym zauważyć, że zjawisko wzmocnienia w efekcie objawia się zwiększeniem aktualnej wartości granicy plastyczności. Rzeczywiście, deformacja plastyczna materiałów ze wzmocnieniem jest jednym ze sposobów zwiększenia ich zakresu sprężystego – ograniczenia tego procesu wynikają z skończonej wytrzymałości materiału (postępujące wzmocnianie prowadzi ostatecznie do pęknięcia) oraz obecności w materiale naprężeń resztkowych, które sprawiają, że po odciążeniu materiał nadmiernie umocniony może wykazywać niepożądane cechy mechaniczne.

Przykład powyższy ma jeszcze jedną cechę odróżniającą go od pierwszego – chodzi o **brak pólki plastycznej**. W takim przypadku **związek naprężenie-odkształcenie jest wzajemnie jednoznaczny**, przynajmniej dopóki nie dojdzie do procesu odciążenia. W takich sytuacjach często stosowanym – choć ze ściśle teoretycznego punktu widzenia niepoprawnym – podejściem jest wykorzystanie tzw. **deformacyjnych modeli plastyczności**, lub – lepiej – **modelów całkowitego odkształcenia**, np. równań Hencky'ego – Iliuszyna omówionych później, w których **stan naprężenia wyznacza jednoznacznie całkowity stan odkształcenia**.

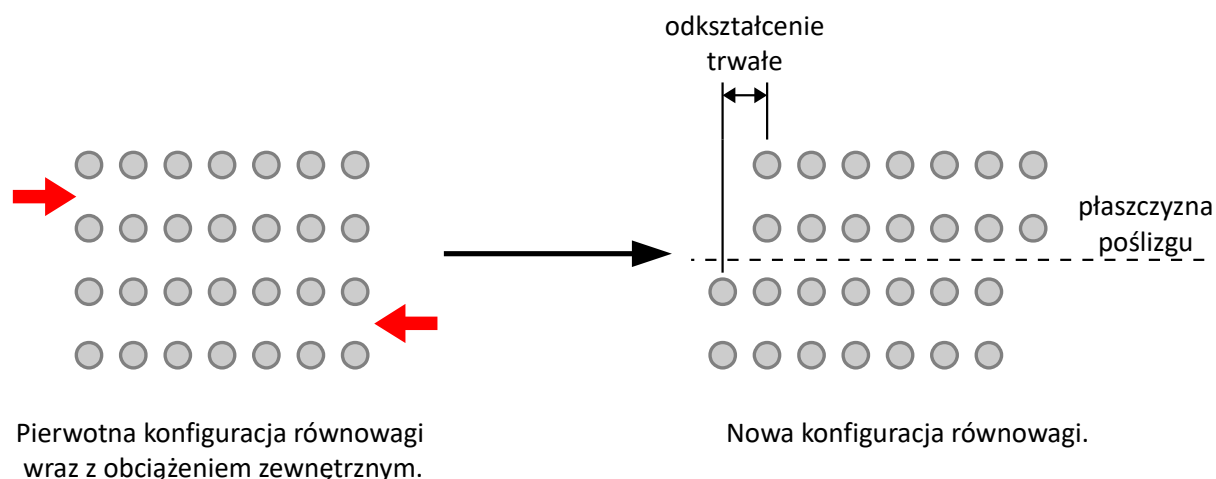
2. MECHANIZMY DEFORMACJI PLASTYCZNEJ

Mechanizm powstawania i przyrastania trwałych deformacji plastycznych w najczytelniejszy sposób można omówić na przykładzie ciała **monokrystalicznego**, tj. takiego, w którym wszystkie **atomy ułożone są w uporządkowaną sieć o powtarzalnej w przestrzeni geometrii**. W idealnej strukturze krystalicznej możliwych jest **wiele położeń równowagi**, tj. takich, które **lokalnie minimalizują energię potencjalną wiązań atomowych**. Jeśli wskutek działania sił zewnętrznych uda nam się przejść z jednego położenia równowagi, do drugiego, wtedy to nowe położenie będzie również konfiguracją trwałą, co makroskopowo objawi się obecnością trwałego (plastycznego) odkształcenia.

Wyróżnia się dwa podstawowe mechanizmy deformacji plastycznej w monokryształach:

- **poślizg**
- **bliźniakowanie**

Poślizg wzdłuż płaszczyzny najgęstszej wypełnienia atomami – zachodzi w obrębie pojedynczego kryształu, tj. obszaru w którym przestrzenne ułożenie atomów ma charakter uporządkowany i powtarzalny. W strukturze takiej możliwy jest ruch polegający w uproszczeniu na sztywnym **przesunięciu jednej części tej struktury względem drugiej w taki sposób, że cząsteczki części przesuwającej się zajmują miejsca, które w pierwotnej strukturze zajmowali ich sąsiedzi**. Proces ten może oczywiście postępować. Deformację taką nazywamy poślizgiem. **Wielkość obciążenia, jakie jest potrzebne, aby wymusić taki ruch jest tym większa, im większe są odległości między atomami**, które zamieniają się miejscami, dlatego **poślizg taki zachodzi w płaszczyźnie najgęstszej wypełnienia atomami**.

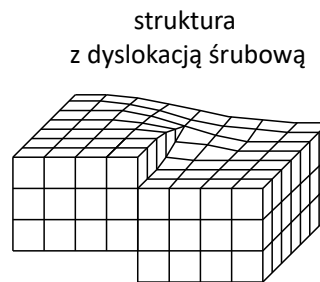
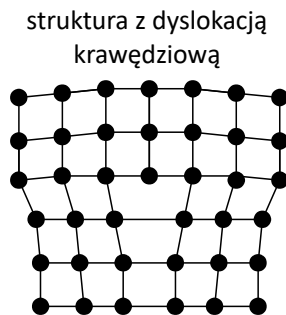


Trzeba przy tym podkreślić, że energia konieczna do wywołania poślizgu w idealnej sieci krystalicznej, tj. potrzebna do przesunięcia całej płaszczyzny atomów jest bardzo duża, zatem i siła potrzebna do powstania trwałej deformacji musiałaby być duża – w rzeczywistości obserwowane wartości obciążenia skutkującego odkształceniami plastycznymi są znacznie mniejsze. Przyczyna tego stanu rzeczy tkwi w **niedoskonałości sieci krystalicznej**, tj. w istnieniu w jej obrębie defektów

jej struktury. Obecność takiego defektu w strukturze powoduje, że zainicjowanie poślizgu wymaga wielokrotnie mniejszej energii niż w przypadku struktury bez defektów.

Wyróżnia się trzy rodzaje defektów sieci krystalicznej:

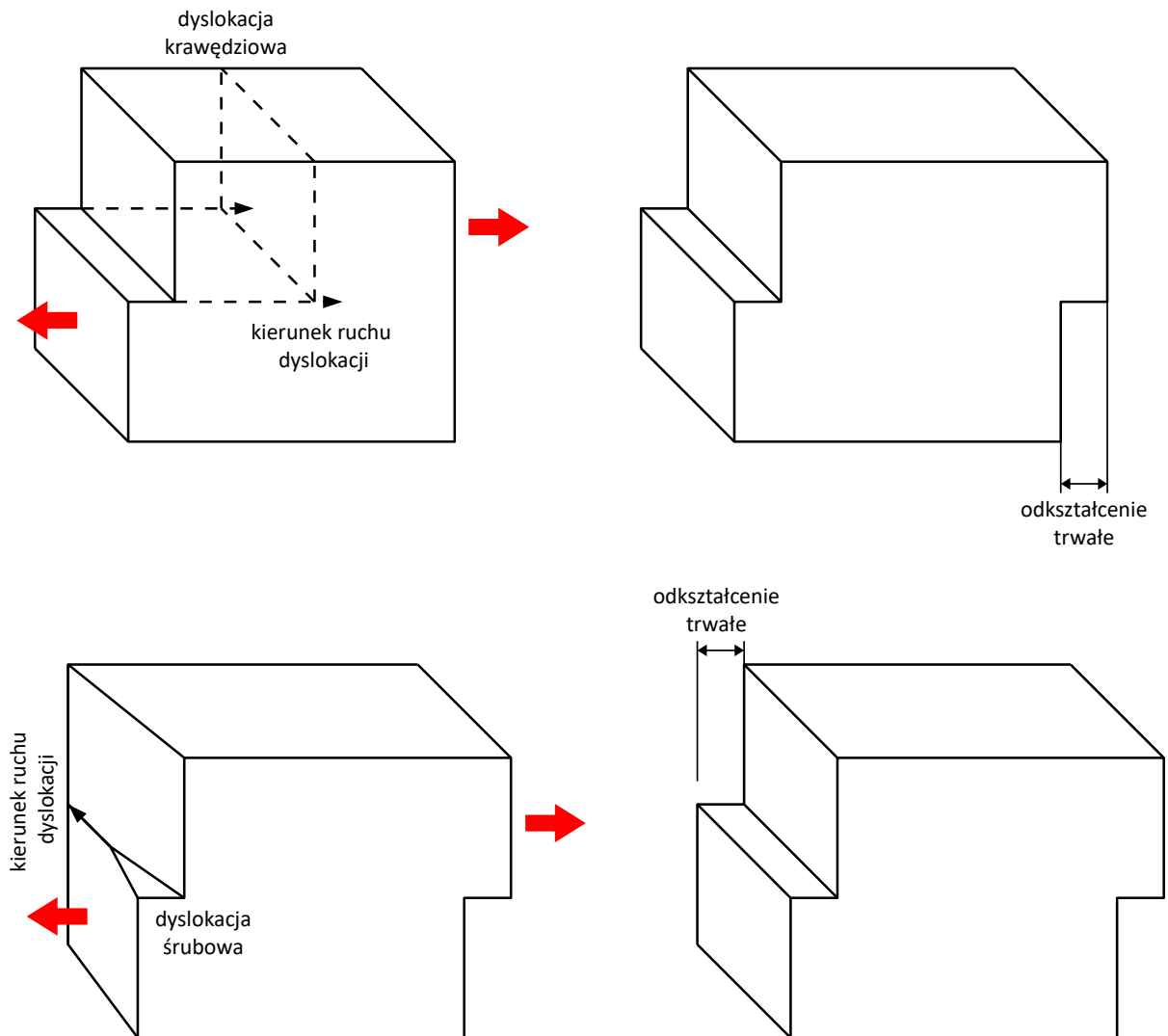
- **defekty punktowe**
 - **wakans** – brak atomu w pozycji przewidzianej strukturą idealną.
 - **atom międzywęzłowy** – obecność dodatkowego atomu w pozycji międzywęzłowej w luce strukturalnej. Ten dodatkowy atom może być atomem rodzimym kryształu lub atomem obcym (np. w przypadku stopów).
 - **obcy atom podstawieniowy** – obecność w pozycji przewidzianej strukturą idealną atomu obcego (np. w przypadku stopów).
- **defekty liniowe, czyli dyslokacje**
 - **dyslokacja krawędziowa** – defekt ten polega na wtrąceniu w strukturę monokryształu dodatkowej półpłaszczyzny atomów.
 - **dyslokacja śrubowa** – zdeformowana struktura przyjmuje kształt o charakterze krzywej śrubowej.
 - **dyslokacja mieszana** – złożenie dyslokacji krawędziowej i dyslokacji śrubowej.



- **defekty powierzchniowe**
 - **granice** – powierzchnie oddzielające obszary sieci krystalicznych, które mają względem siebie odmienną orientację. W zależności od wielkości tego kąta dezorientacji mówi się o granicach wąskokątowych i szerokokątowych, a każda z nich ma odmienną strukturę. Szczególnym rodzajem granic szerokokątowych są granice bliźniacze – płaszczyzny między bliźniakami.
 - **błędy ułożenia** – zaburzenie sekwencji płaszczyzn atomowych.
 - **granice domen antyfazowych** – występują w sieciach zbudowanych z co najmniej dwóch rodzajów atomów, w których występują pewne obszary (domeny), w których miejsce w sieci idealnej zajęte jest przez niewłaściwy rodzaj atomu.

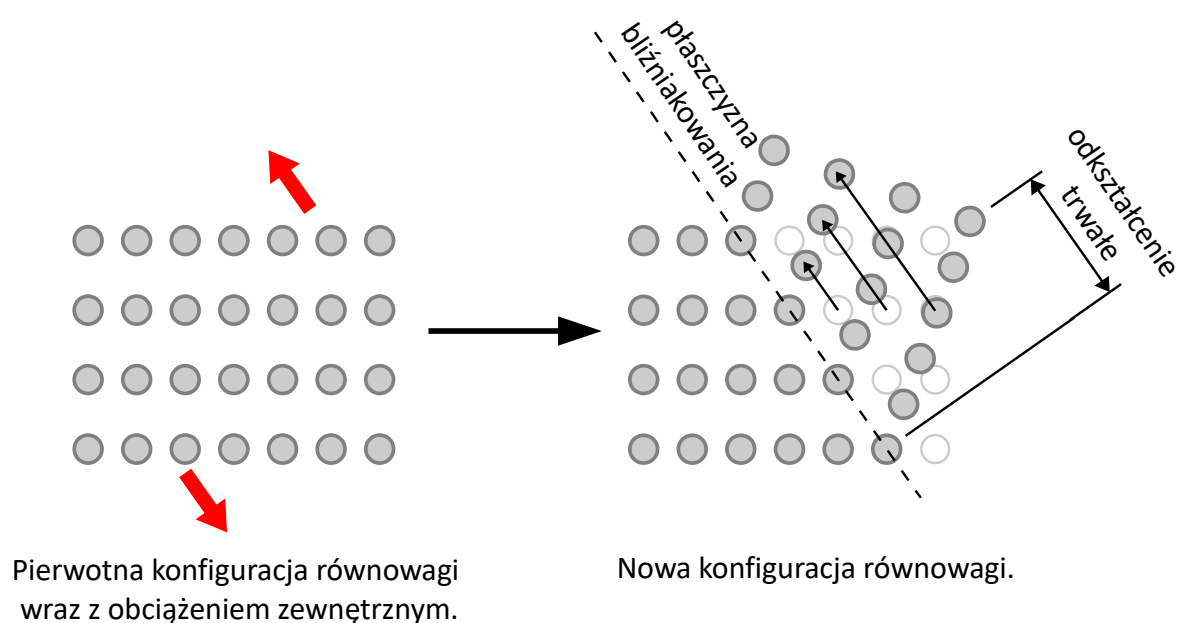
Defektami kluczowymi w opisie mechanizmów deformacji plastycznej są **dyslokacje**. Wspomniano już, że poślizg całej płaszczyzny atomów wymagałby ogromnej energii, za to przesunięcie jedynie fragmentu sieci krystalicznej wymaga jej znacznie mniej. Jeśli zatem w strukturze obecne są dyslokacje to poślizg obejmujący znaczny nawet fragment płaszczyzny może być zrealizowany przez wielokrotne przesunięcie kolejnych niewielkich jej fragmentów. Mówimy

wtedy o **ruchu dyslokacji**, przy czym mamy tu na myśli ruch, jako **przemieszczanie się w przestrzeni zaburzenia geometrii układu**, a nie jakiegoś określonego obiektu materialnego. Właśnie ruch dyslokacji jest podstawowym mechanizmem deformacji plastycznej. Poniższe ilustracje pokazują, w jaki sposób ruch dyslokacji skutkuje trwałą deformacją.



Jest jasne, że wielkość odkształcenia plastycznego i opór, jaki materiał stawia deformacji plastycznej (sztywność w zakresie plastycznym oraz twardość) wiąże się zatem z liczbą dyslokacji obecnych w strukturze – im dyslokacji jest więcej, tym większą można uzyskać trwałą deformacją dla zadanego obciążenia.

Drugim ze wspomnianych mechanizmów deformacji plastycznej jest **bliźniakowanie** – jest to zjawisko polegające na takiej **zmianie struktury krystalicznej pod wpływem obciążenia zewnętrznego, że jedna część tej struktury przekształca się w stosunku do drugiej poprzez przekształcenie symetrii** – może to być inwersja (odbicie punktowe), odbicie symetryczne względem prostej lub płaszczyzny. W tym ostatnim przypadku nowe ziarno **staje się odbiciem symetrycznym drugiej** względem pewnej płaszczyzny, zwanej **płaszczyzną bliźniakowania**. W rezultacie powstają dwa kryształy o tym samym składzie i strukturze przestrzennej, ale o odmiennej orientacji tej struktury – nazywamy je **bliźniakami**. Płaszczyzna graniczna między tymi kryształami jest nachylona pod takim samym kątem do odpowiadających sobie płaszczyzn krystalograficznych w obydwu kryształach. Przemieszczenie atomów jest proporcjonalne do odległości od płaszczyzny bliźniakowania.



Wszystko to, co zostało powiedziane do tej pory dotyczyło w zasadzie struktur monokrystalicznych o jednej orientacji sieci. Na to wszystko nakładają się jeszcze **zjawiska zachodzące między ziarnami** kryształów tego samego typu, ale o odmiennych orientacjach sieci oraz między ziarnami kryształów różnego rodzaju. W szczególności trzeba zwrócić tu uwagę na dwa zjawiska. Po pierwsze, chodzi o bliźniakowanie, które zostało już pokrótce omówione. Po drugie, opisany powyżej ruch dyslokacji dotyczył ruchu w obrębie sieci jednego rodzaju o ustalonej orientacji. **Ruch dyslokacji tego typu nie jest możliwy na granicy ziaren** – zachodzą tam odmiennie zjawiska.

Należy również zwrócić uwagę, że podstawowe mechanizmy deformacji plastycznej pozwalają nam wnioskować o wymaganej do inicjacji odkształcenia plastycznego wielkości naprężenia stycznego odpowiadającej tylko określonym płaszczyznom poślizgu – tymczasem **w ciele złożonym z wielu ziaren o odmiennie zorientowanych strukturach krystalograficznych, tj. w ciele polikrystalicznym**, to samo makroskopowo zmierzone naprężenie styczne oddziałuje na liczne odmiennie zorientowane płaszczyzny – **w zależności od orientacji danej potencjalnej płaszczyzny poślizgu względem kierunku obciążenia, obciążenie to może doprowadzić do poślizgu lub nie.**

Atomy w bliskim sąsiedztwie granicy między ziarnami zajmują pozycje w pewnym sensie „pośrednie” między pozycjami przewidywanymi przez idealną strukturę krystaliczną jednego i drugiego ziarna. W konsekwencji **atomy w warstwach przy granicy ziaren mają wyższą energię potencjalną i wprawienie ich w ruch wymaga znacznie mniejszego wymuszenia w postaci obciążenia**. Taki **poślizg na granicy ziaren** jest kolejnym mechanizmem deformacji plastycznej.

Choć odkształcenia plastyczne mierzone makroskopowo, jako uśrednione wzdłuż odpowiednio dużej bazy odkształcenia trwałe, zdają się być rozmieszczone dość jednorodnie w objętości materiału, w rzeczywistości rozkład odkształceń plastycznych charakteryzuje się występowaniem licznych **lokalizacji**, obszarów o znacznie większej ich intensywności. Obszarami takimi są np. **pasma poślizgu, wąskie obszary powstałe wskutek przejścia licznych dyslokacji wzdłuż bliskich sobie płaszczyzn poślizgu** – wiele z tych dyslokacji zostaje uwięzionych lub wzajemnie się blokują. Orientacja pasm poślizgu jest zatem ściśle związana z płaszczyznami poślizgu wyznaczanymi przez strukturę krystalograficzną ziarna.

Odmienne w swej naturze od pasm poślizgu są tzw. **pasma ścinania** – **wąskie obszary znacznych odkształceń postaciowych, które pojawiają się przy bardzo dużych odkształceniach plastycznych**. W odróżnieniu od pasm poślizgu, pasma ścinania nie zawierają się w obszarze pojedynczego ziarna, ale **obejmują swoim zasięgiem liczne ziarna i przechodzą przez ich granice**. Ponadto orientacja pasm ścinania jest zależna nie tyle od wewnętrznej struktury materiału, ale od obciążenia zewnętrznego – **są one skośnie nachylone do osi najsilniejszej deformacji plastycznej**.

3. WARUNEK PLASTYCZNOŚCI

Wspomniano, że deformacja plastyczna zachodzi dopiero wtedy, gdy obciążenie zewnętrzne będzie dostatecznie duże – na tyle duże aby uruchomić procesy ruchu dyslokacji. W prostych stanach obciążenia – np. jednoosiowe rozciąganie, czyste ścinanie, czyste zginanie, czyste skręcanie – warunek ten sprowadza się do tego, aby odpowiednie naprężenie – normalne przy rozciąganiu i zginaniu, styczne przy ścinaniu i skręcaniu – przekroczyło wartość graniczną. W przypadkach złożonego stanu naprężenia warunek plastyczności zapisuje się w ogólnej postaci:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (1)$$

Funkcja zmiennej tensorowej jest oczywiście **funkcją wszystkich jego składowych** w przyjętym układzie współrzędnych.

$$f(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = 0 \quad (2)$$

Funkcję f określamy w taki sposób, aby dla **procesów, w których nie dochodzi do deformacji plastycznej** $f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$. Oznacza to, że **wartość 0 jest największą dopuszczalną wartością warunku plastyczności**.

Do tej pory, na warunek plastyczności nie nałożyliśmy żadnych wymagań. Fakt, że warunek plastyczności da się wyrazić jako funkcja składowych tensora naprężenia jest jedynie założeniem – w rzeczywistości warunek plastyczności może być (i w niektórych propozycjach rzeczywiście jest) sformułowany jako **funkcja składowych tensora odkształcenia lub pewna złożona funkcja składowych obydwu tensorów**. W przypadku materiałów sprężystych związek między naprężeniem i odkształceniem jest odwracalny, zatem bez straty na ogólności możemy ograniczyć nasze rozważania właśnie do warunku plastyczności jako funkcji stanu naprężenia.

Oczywiście stan naprężenia w ciele jest w ogólności niejednorodny stąd warunek ten może być w jednym punkcie spełniony, w innym zaś nie. Możemy mówić o różnych poziomach uplastycznienia:

- **uplastycznienie w punkcie** – naprężenie tylko lokalnie przekracza wartość graniczną i tam tylko zachodzi odkształcenie trwałe, w pozostałych zaś punktach deformacja ma nadal **charakter sprężysty**. Przykładem może być uplastycznienie w skrajnych włóknach przekroju zginanego. Wartość parametru obciążenia P , które powoduje pierwsze uplastycznienie w pewnym punkcie układu nazywać możemy **graniczną nośnością sprężystą** i oznaczać będziemy pojedynczym nadkreśleniem, np. \bar{P} .
- **uplastycznienie przekroju** lub ogólniej: **uplastycznienie w obszarze, nie skutkujące utratą stateczności układu** – w przypadku układów prętowych, w których rozkład sił przekrojowych wzdłuż osi pręta określa jednoznacznie rozkład naprężeń w każdym przekroju, może dojść do sytuacji, w której **warunek plastyczności spełniony jest we wszystkich punktach pewnego przekroju** – w pozostałych zaś przekrojach uplastycznienie nie występuje lub jest tylko częściowe. W przypadku **układów statycznie wyznaczalnych**

uplastycznienie przekroju jest równoważne swobodzie deformacji w tym przekroju, co w istocie **oznacza nadanie układowi dodatkowego stopnia swobody** – skoro układ był statycznie wyznaczalny, zatem ten dodatkowy stopień swobody skutkuje **geometryczną zmiennością układu**. W przypadku **układów statycznie niewyznaczalnych uplastycznienie przekroju nie musi skutkować utratą stateczności** układu a skutkuje jedynie **zmianą jej schematu statycznego**. Wartość parametru obciążenia P , które powoduje pierwsze pełne uplastycznienie w pewnym przekroju nazywamy **graniczną nośnością plastyczną** i oznaczać będziemy podwójnym nadkreśleniem, np. $\bar{\bar{P}}$. Podobny charakter mają zjawiska częściowego uplastycznienia w ograniczonym obszarze np. dla tarcz, płyt, obiektów bryłowych itp.

- **uplastycznienie układu i utrata stateczności wskutek uplastycznienia** – przy odpowiednio dużej wartości lub odpowiednio dobranym charakterze obciążenia można doprowadzić do sytuacji, w której uplastycznieniu ulegają takie obszary w ciele, że **pewne części układu mechanicznego posiadają całkowitą swobodę deformacji**. O układzie takim mówimy, że utracił stateczność wskutek uplastycznienia, a wielkość parametru obciążenia P , które do tego doprowadziło nazywamy **nośnością graniczną układu** i oznaczać będziemy gwiazdką, np. P^* .

Obecnie zajmiemy się jedynie **lokalnym (punktowym) warunkiem plastyczności**, tj. samą funkcją $f(\sigma)$, jej własnościami i proponowanymi postaciami tej funkcji.

W przypadku opisu **materiałów bez wzmocnienia warunek plastyczności nie zmienia się** w toku postępującej deformacji plastycznej, jest stały. W przypadku **materiałów ze wzmocnieniem** odkształcenia plastyczne skutkują podwyższeniem granicy plastyczności, co pociąga za sobą zmianę w postaci warunku plastyczności – **po pewnej deformacji plastycznej wymagany jest większy** (w sensie warunku plastyczności) **niż pierwotnie stan naprężenia**, jeśli umożliwić ma on dalszy przyrost odkształceń plastycznych.

3.1 POWIERZCHNIA PLASTYCZNOŚCI

Warunek plastyczności (1) można interpretować w ramach geometrii analitycznej jako równanie powierzchni. Nie jest to jednak jakaś rzeczywista powierzchnia w przestrzeni trójwymiarowej – jest to abstrakcyjna **hiperpowierzchnia w sześciowymiarowej przestrzeni składowych tensora naprężenia**. Hiperpowierzchnię tę nazywamy **powierzchnią plastyczności**. Użyteczność takiej geometrycznej interpretacji warunku plastyczności w przypadku ogólnym jest niewielka, stanowi natomiast znakomitą ilustrację cech charakterystycznych rozważanego warunku plastyczności w przypadku materiałów izotropowych.

Podobnie jak w przypadku warunku plastyczności dla materiałów bez wzmocnienia powierzchnia plastyczności jest raz na zawsze ustalona. **W przypadku materiałów wykazujących wzmocnienie powierzchnia plastyczności zmienia swój kształt i rozmiar w toku postępującej deformacji plastycznej.**

3.2 WARUNEK PLASTYCZNOŚCI DLA MATERIAŁÓW IZOTROPOWYCH

Jest jasne, że **warunek plastyczności dla materiałów izotropowych w żaden sposób nie będzie zależał od orientacji przestrzennej kierunków naprężeń**, a jedynie od samych wartości składowych tensora naprężenia – z kolei składowe te można w sposób jednoznaczny określić poprzez wartości własne tensora naprężenia, tj. naprężenia główne lub przez niezmienniki tensora naprężenia. Ogólnie, można powiedzieć że **funkcja izotropowa argumentu tensorowego może być wyrażona jako funkcja niezmienników swego argumentu**. A zatem dla materiałów izotropowych funkcja (1) może być zapisana w jednej z poniższych postaci:

- **funkcja naprężeń głównych** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3)$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ są naprężeniami głównymi.

- **funkcja niezmienników tensora naprężenia** I_1, I_2, I_3 :

$$f = f(I_1, I_2, I_3) \quad (4)$$

gdzie

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (5)$$

$$I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}[\text{tr}^2(\boldsymbol{\sigma}) - \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)] = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \quad (6)$$

$$= \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{12}^2 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2$$

$$I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) - \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) + \frac{1}{6}\text{tr}^3(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym} & & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \quad (7)$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

- **funkcja niezmienników aksjatora i dewiatora naprężenia** I_1, J_2, J_3 :

$$f = f(I_1, J_2, J_3) \quad (8)$$

gdzie

$$J_2 = -I_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{s}^2) = \quad (9)$$

$$= \frac{1}{6}[(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2] + (\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2) =$$

$$= \frac{1}{6}[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2]$$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = I_3(\mathbf{s}) = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{s}^3) = \left(\sigma_1 - \frac{1}{3}I_1\right)\left(\sigma_2 - \frac{1}{3}I_1\right)\left(\sigma_3 - \frac{1}{3}I_1\right) \quad (10)$$

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{1}$$

- **funkcja niezmienników** p, q, θ :

$$f = f(p, q, \theta) \quad (11)$$

gdzie

napężenie (ciśnienie) hydrostatyczne: $p = \frac{1}{3} I_1$ (12)

napężenie dewiatorowe: $q = \sqrt{2J_2}$ (13)

kąt Lodego: $\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right]$ (14)

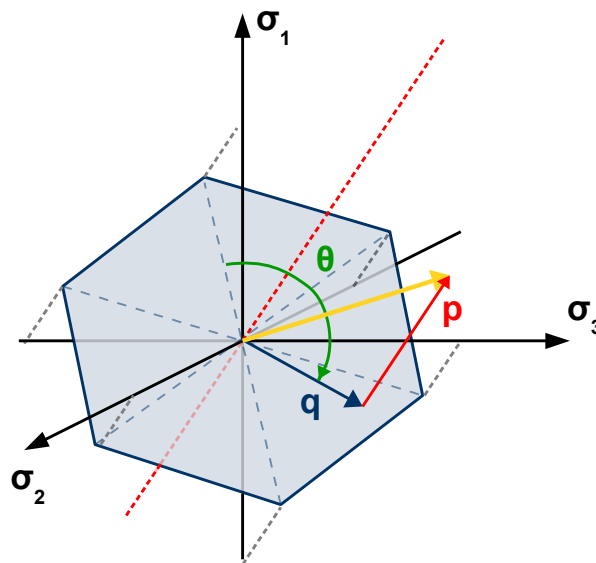
Niezmienniki p, q, θ są blisko związane ze współzrzednymi walcowymi w przestrzeni naprężeń głównych, przy czym oś symetrii tych współzrzednych jest osią równo nachyloną do osi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - odpowiada ona składowej hydrostatycznej tensora naprężenia. Składową ortogonalną do składowej hydrostatycznej jest składowa dewiatorowa, leżąca w płaszczyźnie dewiatorowej (oktaedrycznej), prostopadłej do osi naprężenia hydrostatycznego. Kąt nachylenia składowej hydrostatycznej względem rzutu ustalonego naprężenia głównego na płaszczyznę dewiatorową jest właśnie kątem Lodego.

Miara składowej hydrostatycznej: $|A_\sigma| = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \sqrt{3} p$

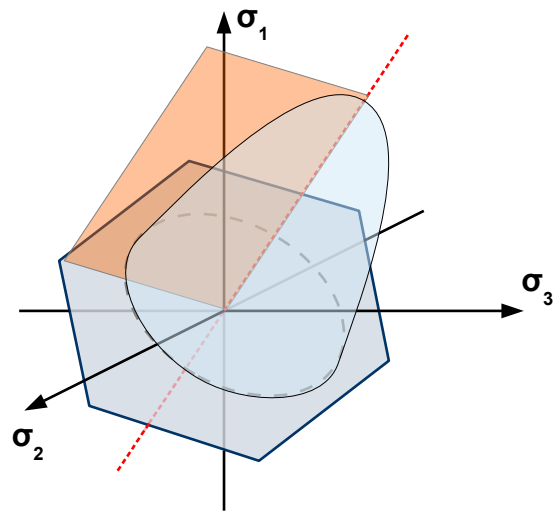
Norma składowej dewiatorowej: $|D_\sigma| = \sqrt{2J_2} = q$

Kąt Lodego: $\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right]$

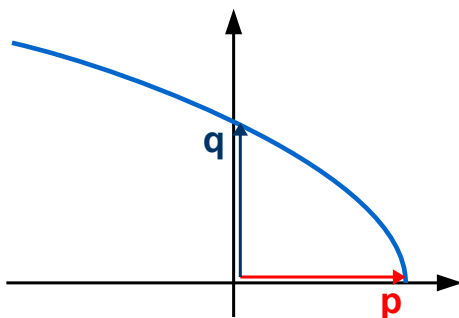
- jednoosiowe rozciąganie: $\theta = 0^\circ$
- jednoosiowe ściskanie: $\theta = 60^\circ$
- czyste ścinanie: $\theta = 30^\circ$



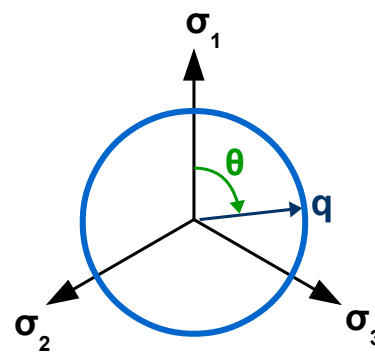
Używa się również innych kombinacji powyższych niezmienników, nie ma przy tym jednej wspólnej umowy dotyczącej stosowanych na ich oznaczenie symboli. Wspólną cechą powyższych propozycji jest to, że w każdym przypadku warunek plastyczności jest funkcją trzech zmiennych niezależnych – gdyby interpretować je jako współrzędne w pewnej przestrzeni trójwymiarowej, to powierzchnia plastyczności daje się łatwo zilustrować jako **zakrzywiona dwuwymiarowa powierzchnia zanurzona w przestrzeni trójwymiarowej**. Charakterystykę geometryczną powierzchni plastyczności wygodnie jest również opisywać za pomocą **przekrojów powierzchni plastyczności**:



- przekrój **płaszczyzną hydrostatyczną** (zawierającą oś naprężenia hydrostatycznego)
- przekrój **płaszczyzną dewiatorową** (prostopadłą do osi naprężenia hydrostatycznego)



Przekrój płaszczyzną hydrostatyczną.



Przekrój płaszczyzną dewiatorową.

W ogólności przekroje te nie są stałe, ale najpowszechniej stosowanymi warunkami plastyczności są warunki niezależne od kąta Lodego (powierzchnie obrotowe o stałym przekroju płaszczyzną hydrostatyczną) oraz warunki niezależne od naprężenia hydrostatycznego (powierzchnie walcowe o stałym przekroju płaszczyzną dewiatorową).

Poniżej omówione zostaną wybrane warunki plastyczności dla materiałów izotropowych. Związane są one bezpośrednio z kryteriami wytrzymałości lub ogólniej: kryteriami stanu granicznego znanymi z wytrzymałości materiałów – stanem granicznym może być w szczególności właśnie uplastycznienie. Niektóre klasyczne kryteria wytrzymałościowe dotyczą stanów granicznych o naturze całkiem odmienną niż stan uplastycznienia – np. kryterium Coulomba-Mohra dla gruntów i skał – stąd nie każde kryterium wytrzymałościowe może być z powodzeniem

stosowane jako warunek plastyczności, choć metody ich opisu są właściwie identyczne. Ostatecznym kryterium przydatności tej lub innej propozycji warunku plastyczności jest jego zgodność z doświadczeniem. Powszechną praktyką jest formułowanie czysto empirycznych warunków plastyczności w postaci prostych funkcji niezmienników tensora naprężenia (np. wielomianowych lub potęgowych), w których stałe współczynniki wyznaczone są na drodze eksperymentu.

3.2.1 WARUNEK PLASTYCZNOŚCI COULOMBA-TRESCI-GUESTA

Warunkiem plastyczności, który okazuje się nieustannie dobrym oszacowaniem w przypadku niektórych materiałów i niektórych stanów obciążenia jest klasyczny **warunek stanu granicznego Coulomba** (1776) – **Tresci** (1864) – **Guesta** (1899), tj. **kryterium maksymalnego naprężenia stycznego** (CTG):

$$\tau_{max} = \tau_0 = const. \quad (15)$$

gdzie τ_0 jest **graniczną wartością naprężenia stycznego**. Kryterium to w bezpośredni sposób odnosi się do faktu, że głównymi mechanizmami deformacji plastycznej są **poślizg i bliźniakowanie, które inicjowane są przez odpowiednio dużą wielkość naprężenia stycznego**. Warunek ten ignoruje jednak kwestię orientacji tego naprężenia względem struktury kryształu, a przecież wiadomo, że poślizg i bliźniakowanie zachodzić mogą tylko w ściśle określonych płaszczyznach. Należy jednak uznać w przypadku materiałów izotropowych naprężenie styczne nawet w niewielkim otoczeniu oddziałuje w istocie na liczne ziarna o różnie (odmiennie) zorientowanej strukturze, stąd w makroskopowym opisie tego zagadnienia dokonujemy swego rodzaju „uśrednienia” i maksymalna wartość naprężenia stycznego okazuje się dobrą (zweryfikowaną doświadczalnie) miarą wymuszenia odkształceń plastycznych.

Dla zadanego stanu naprężenia **ekstremalne wartości naprężeń stycznych odpowiadają naprężeniom stycznym w płaszczyznach równoległych do kierunku pośredniego naprężenia głównego i nachylonych pod kątem 45° do kierunków pozostałych dwóch naprężeń głównych – maksymalnego i minimalnego**. Wartość maksymalnego naprężenia stycznego wyznaczamy na podstawie wartości naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ w następujący sposób:

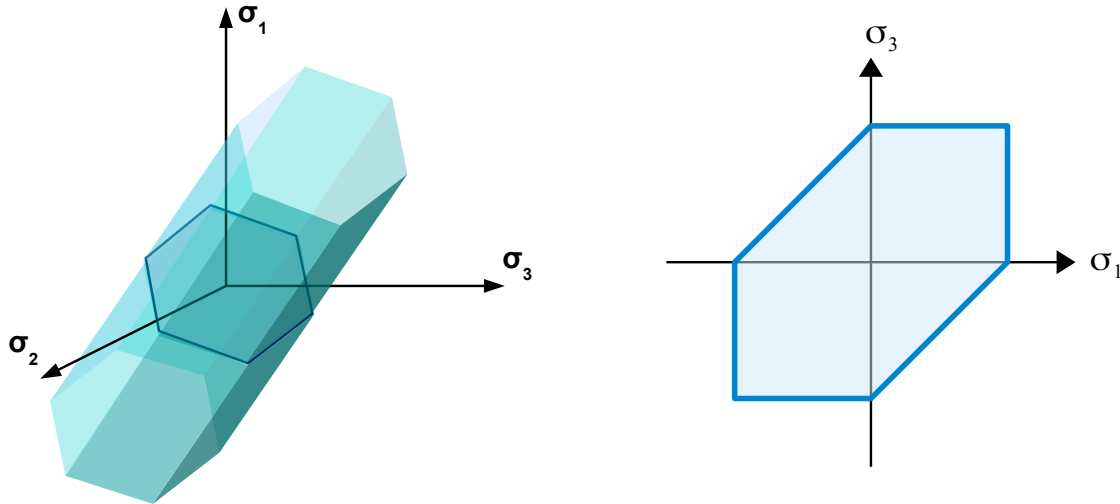
$$\tau_{max} = \max\left(\frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}; \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2}; \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}\right) \quad (16)$$

Powszechną praktyką jest zapisywanie warunku plastyczności w taki sposób, aby po prawej jego stronie znajdowała się **graniczna wartość naprężenia normalnego** σ_0 (granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu). Kryterium CTG przyjmuje wtedy postać:

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_2 - \sigma_3|; |\sigma_3 - \sigma_1|; |\sigma_1 - \sigma_2|) = \sigma_0 \quad (17)$$

Wielkość σ_{eq} nazywa się **naprężeniem równoważnym** lub **naprężeniem zredukowanym** wg hipotezy CTG.

Powierzchnia plastyczności odpowiadająca warunkowi CTG jest **powierzchnią boczną nieskończenie długiego graniastostupa prawidłowego o podstawie sześciokąta i nachylnego pod takim samym kątem do każdej z osi układu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$** :



3.2.2 WARUNEK PLASTYCZNOŚCI MAXWELLA-HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO

Najpowszechniej stosowanym warunkiem plastyczności jest **warunek stanu granicznego Maxwella-Hubera-Misesa-Hencky'ego**, tj. **kryterium energii odkształcenia postaciowego** (MHMH). Maxwell (1856) oraz Mises (1913) zaproponowali postać warunku plastyczności w postaci funkcji stanu naprężenia następującej postaci:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)]} = \sigma_0 \quad (18)$$

gdzie σ_0 jest **graniczną wartością naprężenia normalnego**, a wielkość σ_{eq} nazywa się **naprężeniem równoważnym** lub **naprężeniem zredukowanym** wg hipotezy MHMH. Naprężenie zredukowane MHMH można również wyrazić jako:

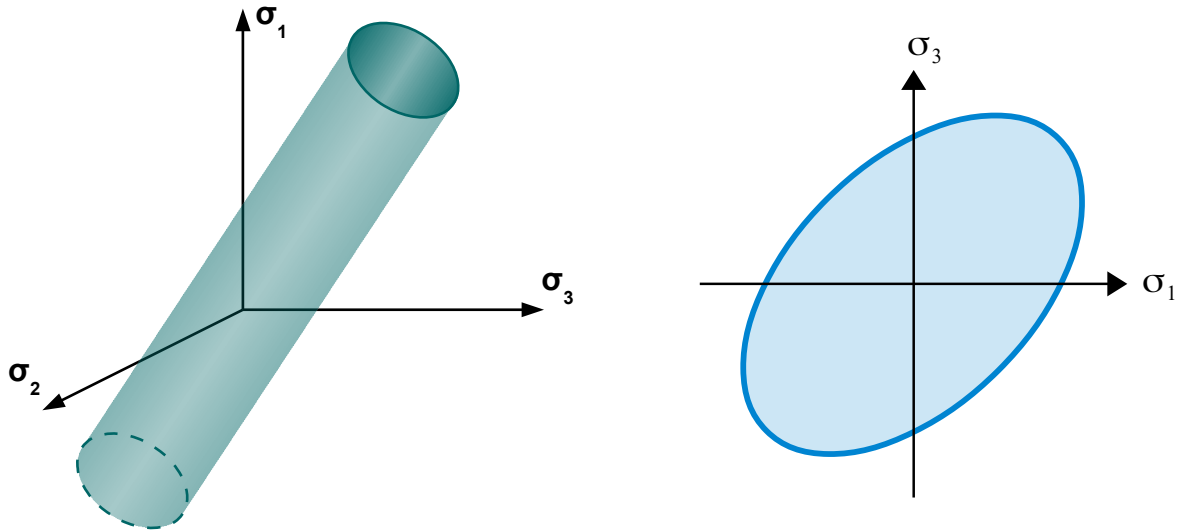
$$\sigma_{eq} = \sqrt{3} J_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} q = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij} \quad (19)$$

Do podobnego wyniku doszedł również Maksymilian Tytus Huber (1904) – postawił on hipotezę, zgodnie z którą miarą wyczerpania w punkcie przy ściskaniu (przy ujemnej wartości naprężenia hydrostatycznego) jest **gęstość energii odkształcenia postaciowego** ϕ_f :

$$\phi_f = \frac{1}{12G} [(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2)] = h \quad (20)$$

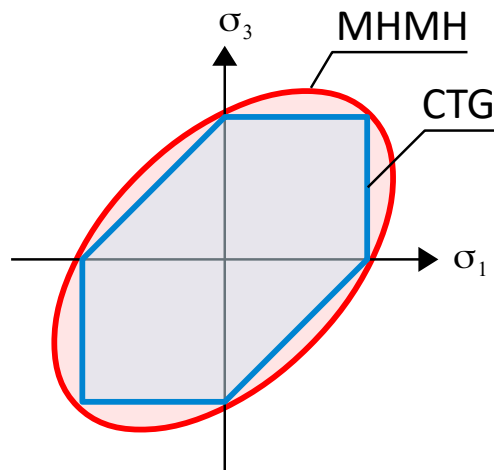
gdzie G jest **modułem Kirchhoffa**, a h jest **graniczną wartością gęstości energii odkształcenia**

postaciowego. Hencky (1924) wskazał na energetyczną interpretację warunku Misesa. Powierzchnię plastyczności warunku MHMH stanowi **osiowosymetryczny walec nachylony równomiernie do osi** $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.



W przypadku zagadnień płaskich ($\sigma_2=0$) powierzchnia graniczna redukuje się do elipsy w płaszczyźnie (σ_1, σ_3) nachylonej równomiernie do osi σ_1, σ_3 .

Jeśli warunki CTG i MHMH przewidują to samo graniczne naprężenie normalne σ_0 , to **warunek CTG jest bardziej zachowawczy – naprężenie zredukowane wg warunku MHMH jest mniejsze bądź równe od odpowiedniego naprężenia dla warunku CTG.** Walec MHMH jest opisany na graniastosłupie CTG.



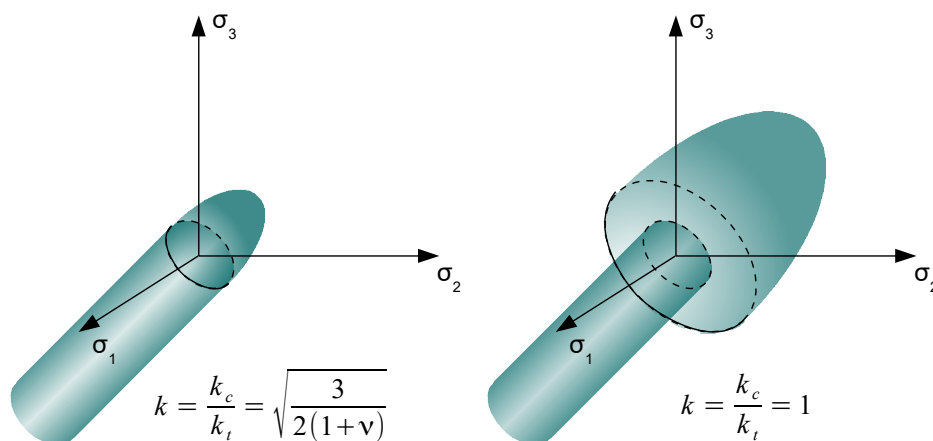
DYGRESJA DLA POLSKIEGO CZYTELNIKA

W tym miejscu warto podkreślić, że propozycja Hubera była jakościowo odmienna od warunku Misesa, wbrew szeroko rozpowszechnionemu w Polsce pogładowi. Huber przyjmował ϕ_f za miarę wyężenia jedynie, gdy $p < 0$. Dla stanów rozciągania ($p > 0$) przyjmował Huber za miarę wyężenia materiału całkowitą gęstość energii odkształcenia (podobnie, jak dla dowolnych stanów zakładał Beltrami), tj.:

$$\begin{cases} \phi_f = h & \Leftrightarrow p < 0 \\ \phi_f + \phi_v = h & \Leftrightarrow p \geq 0 \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad \phi_v = \frac{1}{18K} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \quad (21)$$

gdzie K jest **modułem sztywności objętościowej**. Niektórzy autorzy zachodni interpretowali hipotezę Hubera w taki sposób, jakoby wymagała ona równej wartości naprężenia granicznego w stanie jednoosiowym przy rozciąganiu i przy ściskaniu $k = k_c/k_t = 1$ – to mogłoby być możliwe jedynie wtedy, gdyby graniczna wartość gęstości energii odkształcenia była różna w tych dwóch przypadkach, co z kolei skutkowałoby nieciągłością powierzchni granicznej dla $p = 0$ – miałyby ona postać „grzybka” (walec o mniejszej średnicy przyległy do połówki elipsoidy obrotowej o większej średnicy). Tymczasem należy pamiętać, że w swej pracy Huber wielokrotnie używał w odniesieniu do stanu granicznego pojęcia „pęknięcia”, co sugerować może, że właściwym przedmiotem jego badań był nie tyle stan uplastycznienia ile właśnie stan, w którym próbka ulega zerwaniu. W sposób szczególny dotyczy to materiałów kruchych, które mogą mieć różną wytrzymałość na ściskanie k_c i rozciąganie k_t . Wtedy zgodnie z hipotezą Hubera stosunek tych dwóch wielkości miałby być równy:

$$k = \frac{k_c}{k_t} = \sqrt{\frac{3}{2(1+\nu)}} \quad (22)$$



Doświadczenie wskazuje, że zależność ta nie jest spełniona dla materiałów kruchych (np. skały, beton), dla których stosunek wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie mieści się często w przedziale $k \in (10; 30)$, tymczasem dla typowych wartości współczynnika Poissona dla materiałów tego typu $\nu \in (0,15; 0,4)$ mamy ze wzoru (22) $k \in (1,04; 1,14)$. Warto jednak zauważyć, że takie wartości k są typowe dla materiałów ciągliwych posiadających podobne wartości ν i wykazujących efekt SD (omówiony w dalszej części opracowania) – hipoteza Hubera może w takich przypadkach stanowić bardzo prosty warunek plastyczności, który ponadto ma prostą i przekonującą interpretację fizyczną.

3.2.3 WARUNEK PLASTYCZNOŚCI BURZYŃSKIEGO

Schleicher (1926) i Mises (1928) zasugerowali, że prawa strona warunku plastyczności MHHM może być w ogólności funkcją naprężenia hydrostatycznego, tj. graniczna wartość naprężenia zredukowanego miałaby zależeć od bieżącej wartości naprężenia hydrostatycznego, co już wcześniej zostało uwzględnione w oryginalnym sformułowaniu hipotezy Hubera. O ile jednak pomysł Hubera nie znajdował potwierdzenia doświadczalnego, a Schleicher i Mises nie zaproponowali żadnych ścisłych zależności od p , o tyle uczeń Hubera, Włodzimierz Burzyński, niezależnie od Schleichera i Misesa przedstawił warunek tego samego typu, charakteryzujący się prostotą matematyczną i dużymi możliwościami opisu powierzchni plastyczności o różnych cechach geometrycznych (1928) i posiadający przy tym dość jasną motywację fizyczną, choć bez odniesienia do konkretnych mechanizmów. W pierwotnym sformułowaniu, **warunek Burzyńskiego** przyjmuje postać:

$$\phi_f + \left(A + \frac{B}{p} \right) \phi_v = h \quad (23)$$

gdzie ϕ_f, ϕ_v są gęstościami energii odkształcenia odpowiednio postaciowego i objętościowego, p jest naprężeniem hydrostatycznym, h jest graniczną wartością gęstości energii odkształcenia, a A, B są pewnymi stałymi charakteryzującymi własności mechaniczne materiału.

Warunek Burzyńskiego można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - 2 \left(\frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1 \right) (\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22}) + \\ & + \frac{k_c k_r}{k_s^2} (\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2) + (k_c - k_r)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - k_c k_r = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

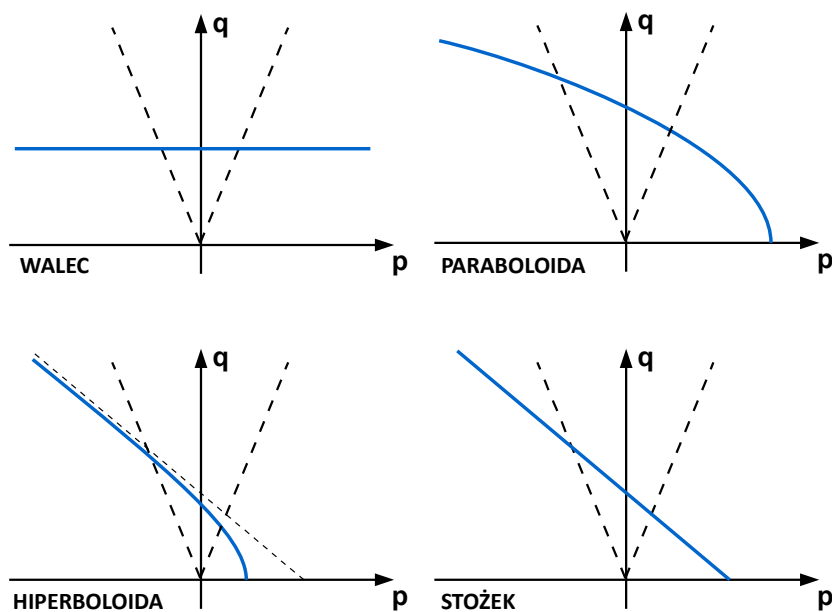
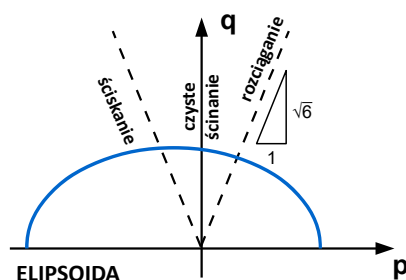
gdzie k_c jest granicznym naprężeniem normalnym przy ściskaniu, k_t jest granicznym naprężeniem normalnym przy rozciąganiu, k_s jest granicznym naprężeniem normalnym przy ścinaniu. Wszystkie te parametry można wyznaczyć na drodze prostych prób wytrzymałościowych. Kryterium Burzyńskiego uwzględnia zatem możliwość wystąpienia **niesymetrycznego zakresu sprężystego**, tj. **różnej wartości naprężenia granicznego przy rozciąganiu i ściskaniu**.

Równanie (24) jest ogólnym równaniem **kwadryki** – powierzchni drugiego stopnia. W zależności od stosunku wartości parametrów k_c, k_t, k_s może charakter tej powierzchni jest różny. Za każdym razem jednak jest to **powierzchnia obrotowa** – jej osią symetrii jest oś $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Wprowadzamy kolejne parametry:

$$\mu = \frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1, \quad k = \frac{k_c}{k_t}, \quad k_{s,h} = \sqrt{\frac{k_c k_t}{3}}, \quad k_{s,min} = \frac{2k_c k_t}{\sqrt{3}(k_c + k_t)}$$

Powierzchnia plastyczności warunku Burzyńskiego to:

- **elipsoida obrotowa** dla $\mu < 0,5$
- **paraboloida obrotowa** dla $\mu = 0,5$, $k \neq 1$
- **walec** dla $\mu = 0,5$, $k = 1$
- **dwupowłokowa hiperboloida obrotowa** dla $\mu > 0,5$, $k_s > k_{s, min}$
- **stożek** dla $\mu > 0,5$, $k_s = k_{s, min}$



W przypadku hiperboloidy dwupowłokowej rozpatrujemy jedynie jedną jej część, tę, dla której zerowy stan naprężenia znajduje się wewnątrz powłoki. Przypadek hiperboloidy jednopowłokowej jest odrzucany jako sprzeczny z doświadczeniem – wytrzymałość na ścinanie byłaby bowiem najmniejsza dla pewnego ustalonego naprężenia hydrostatycznego i rosłaby nieskocznie wraz ze zmianą naprężenia hydrostatycznego (niezależnie od znaku tej zmiany). Warto wskazać na dwa szczególne przypadki:

- przypadek **walca** jest tożsamy z **warunkiem plastyczności MHMH**.
- przypadek **stożka** jest tożsamy ze znacznie późniejszą propozycją warunku plastyczności **Druckera-Pragera** (1952).

3.3 STATECZNOŚĆ MATERIAŁU W SENSIE DRUCKERA

Drucker zaproponował następujące **pojęcie stateczności materiału**:

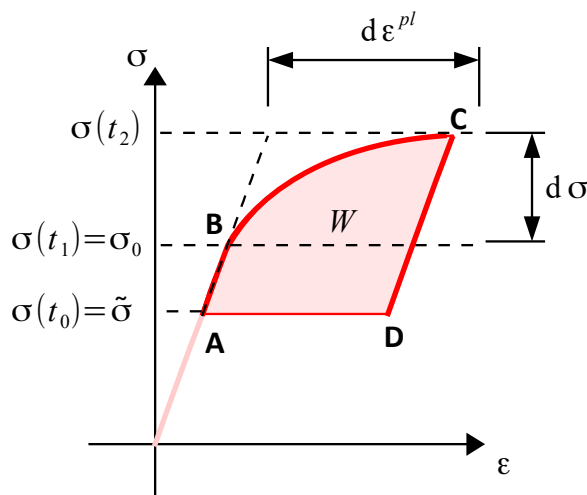
W materiale statecznym praca wykonana przez przyrost zewnętrznych sił powierzchniowych $\Delta \mathbf{q}$ oraz zewnętrznych sił objętościowych $\Delta \mathbf{b}$ na spowodowanych przez nie przyrostach przemieszczenia $\Delta \mathbf{u}$ jest nieujemna.

$$W = \int_{t_0}^{t_k} \left[\iint_S (\Delta \mathbf{q} \Delta \dot{\mathbf{u}}) dS + \iiint_V (\Delta \mathbf{b} \Delta \dot{\mathbf{u}}) dV \right] dt \geq 0 \quad (25)$$

Jeśli w całce powyższej przedział czasu $(t_0; t_k)$ może być przyjmowany dowolnie duży, mówimy wtedy o „**stateczności w dużym**”. Jeśli przedział ten może być przejmowany jedynie jako infinitezymalnie mały, tj. gdy $t_k \rightarrow t_0$ wtedy mówimy o „**stateczności w małym**”. Przyjmijmy teraz $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}$, $\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}$, $t_p = 0$. Obciążenia początkowe $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ są znane i ustalone. W chwili początkowej materiał może być w stanie sprężystym lub plastycznym. Przy tych oznaczeniach warunek stateczności można zapisać w postaci:

$$W = \int_{t=0}^{t_k} \left[\iint_S [(q_i - \tilde{q}_i)(\dot{u}_i - \dot{\tilde{u}}_i)] dS + \iiint_V [(b_i - \tilde{b}_i)(\dot{u}_i - \dot{\tilde{u}}_i)] dV \right] dt \geq 0$$

Rozważmy teraz następujący **cykl obciążenia**:



1. W chwili t_0 dany jest stan naprężenia σ odpowiadający obciążeniom $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ i rozpoczyna się proces **dociążenia obciążeniem dodatkowym**.
2. W chwili t_1 spełniony jest warunek plastyczności i pojawiają się nowe odkształcenia plastyczne.
3. W chwili t_2 **zaprzeszajemy dociążania i rozpoczynamy proces odciążenia**.
4. **Proces odciążenia kontynuujemy aż bieżący stan naprężenia będzie taki sam jak początkowy $\tilde{\sigma}$** . Chwilę, w której stan ten jest osiągnięty oznaczamy przez t_k .

Z zasady prac wirtualnych, dla dowolnego rzeczywistego pola przemieszczenia \mathbf{u} (a zatem spełniającego warunki ciągłości oraz kinematyczne warunki brzegowe) można napisać:

$$\iint_S q_i \dot{u}_i dS + \iiint_V b_i \dot{u}_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (26)$$

gdzie

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

Warto przy tym zwrócić uwagę, że nie określa się przy tym żadnego związku konstytutywnego między naprężeniem i odkształceniem – może być on dowolny. Stosując zasadę przemieszczeń wirtualnych do warunku stateczności możemy napisać:

$$W = \int_{t=0}^{t_k} \left[\iiint_V [(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij})] dV \right] dt \geq 0 \quad (27)$$

W przypadku jednorodnego stanu naprężenia i odkształcenia całkowanie przestrzenne sprowadza się do przemnożenia przez miarę objętości i nie wpływa na spełnienie warunku stateczności:

$$W = \int_{t=0}^{t_k} [(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\tilde{\epsilon}}_{ij})] dt \geq 0 \quad (28)$$

Praca naprężeń na odkształcenia sprężystych w całym cyklu będzie zerowa, ponieważ początkowy i końcowy stan naprężenia jest taki sam, a odkształcenia sprężyste są odwracalne. Odkształcenia plastyczne zaś pojawiają się dopiero po chwili t_1 , a po chwili t_2 nie ulegają już zmianie. Możemy więc napisać:

$$W_{pl} = \int_{t_1}^{t_2} [(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}] dt \geq 0 \quad (29)$$

Rozważmy obecnie przypadek stateczności w małym, tj. gdy $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$. Rozwińmy funkcję W_{pl} w szereg Taylora w otoczeniu t_1 . Musimy rozważyć dwa przypadki:

1. Gdy materiał był w chwili t_0 w stanie sprężystym, wtedy

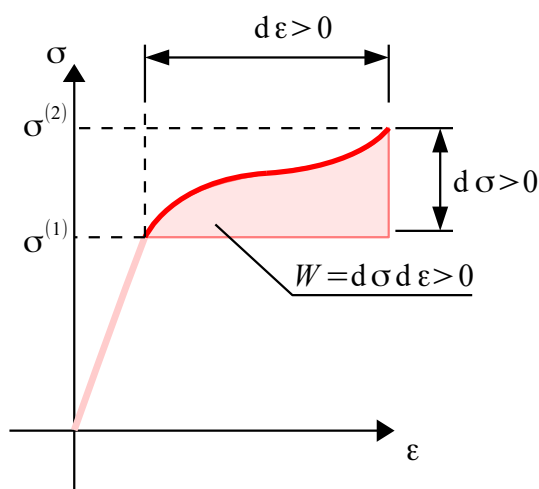
$$W_{pl}(t_2) = [(\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}]_{t=t_1} \Delta t + [\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl} + (\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) \ddot{\epsilon}_{ij}^{pl}]_{t=t_1} \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots$$

2. Gdy materiał był w chwili t_0 w stanie plastycznym, wtedy $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}$

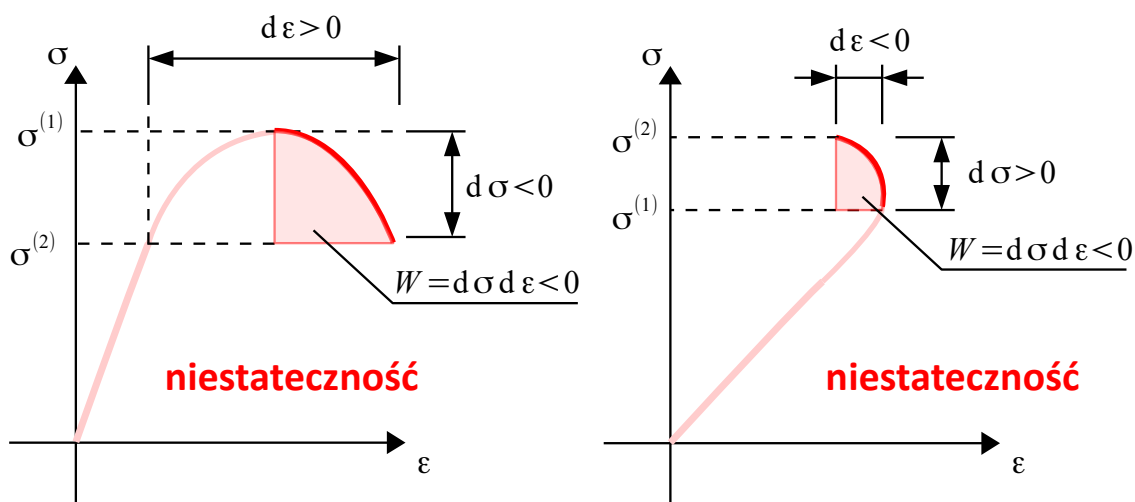
$$W_{pl}(t_2) = [\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}]_{t=t_1} \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots$$

Aby spełnić warunek stateczności, wystarczy, że początkowe wyrazy tych szeregów są dodatnie. Tensorom prędkości naprężenia $\dot{\sigma}$ i prędkości odkształcenia plastycznego $\dot{\epsilon}^{pl}$ dla małych przyrostów czasu odpowiadają tensory przyrostu naprężenia $d\sigma$ i przyrostu odkształceń plastycznych $d\epsilon^{pl}$. Możemy zatem napisać, że w dowolnym przypadku cyklu obciążenia **materiał spełnia postulat Druckera w małym**, gdy

$$\begin{aligned} (\sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}) d\epsilon_{ij}^{pl} &\geq 0 & (30) \\ d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{pl} &\geq 0 & (31) \end{aligned}$$



O niestateczności materiału mówimy wtedy, gdy np. materiał wykazuje osłabienie (spadek naprężeń koniecznych do postępowania deformacji plastycznej) lub gdy wraz z przyrostem naprężenia spada odkształcenie.



Występowanie dolnej granicy plastyczności jest związane właśnie z niestatecznością materiału, tj. z sytuacją w której pewne odkształcenia trwałe nawet przy spadku obciążenia koniecznego do utrzymania danego odkształcenia.

Jeśli przyjmujemy postulaty Druckera, wtedy nierówność (30) może być interpretowana jako ograniczenie na dopuszczalne orientacje wektorów reprezentujących stan naprężenia i stan odkształcenia w przestrzeni naprężeń. Iloczyn skalarny tych dwóch wektorów musi być bowiem dodatni, tzn.

$$(\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = |\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}| |d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}| \cos \angle [(\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}); d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}] \geq 0$$

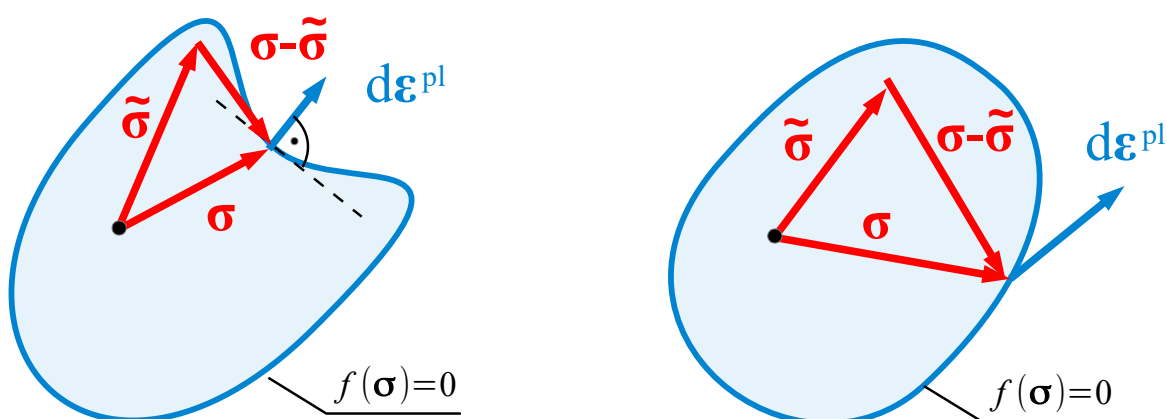
to znaczy:

$$\angle [(\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}); d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}] \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (32)$$

Dla dowolnego stanu $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ i dowolnego stanu granicznego $\boldsymbol{\sigma}$ jest to możliwe tylko przy jednoczesnym spełnieniu dwóch warunków:

1. Powierzchnia plastyczności musi być wypukła
2. Wektor przyrostu odkształceń plastycznych musi być normalny do powierzchni plastyczności

Jeśli bowiem powierzchnia plastyczności może być wklęsła, wtedy zawsze można znaleźć taki stan naprężenia, że praca (iloczyn skalarny) przyrostu naprężenia na przyroście odkształceń plastycznych (reprezentowanych przez wektor normalny do powierzchni plastyczności) będzie ujemna, tj. materiał będzie wykazywał niestateczność w sensie Druckera (ilustracja po lewej). Natomiast jeśli wektor przyrostu odkształceń plastycznych nie byłby normalny do powierzchni plastyczności, wtedy nawet dla wypukłej powierzchni plastyczności praca przyrostu naprężeń na przyroście odkształceń plastycznych może być ujemna (ilustracja po prawej).

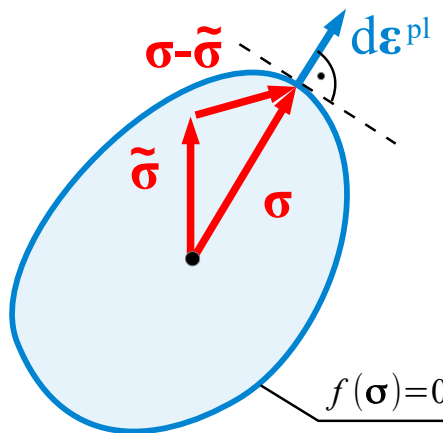


Z postulatu Druckera wynika zatem, że:

- Powierzchnia plastyczności w każdym punkcie musi być **wypukła**.
- Przyrost odkształceń plastycznych musi być dany tensorem ortogonalnym do powierzchni plastyczności:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (33)$$

gdzie $d\lambda$ jest pewnym współczynnikiem proporcjonalności między gradientem warunku plastyczności a tensorem przyrostu odkształceń plastycznych. Współczynnik ten ma interpretację parametru materiałowego, który w ogólności może zależeć nie tylko od materiału ale również od historii deformacji, tzn. jest funkcją ścieżki odkształcenia. Związek ten nazywa się **warunkiem normalności**. Odpowiada on tzw. **stowarzyszonemu prawu płynięcia plastycznego** w ramach **przyrostowego modelu plastyczności**, w którym tensor $d\varepsilon^{pl}$ wyznacza się jako pochodną funkcji skalarnej nazywanej **potencjałem plastycznym** względem składowych tensora naprężenia. W przypadku stowarzyszonego prawa płynięcia potencjał plastyczny wyraża się tą samą funkcją naprężeń, co warunek plastyczności.



4. WYBRANE ZJAWISKA ZACHODZĄCE PODCZAS DEFORMACJI PLASTYCZNEJ

4.1 PROCES DEFORMACJI PLASTYCZNEJ

W teorii plastyczności wyróżnia się dwa rodzaje procesów:

- **procesy plastycznie czynne** – lub procesy **obciążenia** – są to procesy nieodwracalne z uwagi na dyssypację energii związaną z powstawaniem i rozwojem odkształceń plastycznych. W czasie procesu czynnego zmianie ulega zarówno tensor odkształceń sprężystych jak i tensor odkształceń plastycznych. W dużym uproszczeniu można powiedzieć, że są to procesy, w których spełniony jest warunek plastyczności a przyłożone obciążenie powoduje przyrost odkształceń plastycznych. Dla procesów czynnych

- spełniony jest warunek plastyczności:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (34)$$

- przyrost warunku plastyczności na powierzchni plastyczności jest nieujemny

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \geq 0 \quad (35)$$

- **procesy plastycznie bierne** – lub procesy **odciążenia** – są to procesy, w których nie dochodzi do dyssypacji energii. W uproszczeniu można powiedzieć, że są to procesy sprężyste – obciążenia w zakresie sprężystym oraz odciążenia – tj. procesy w czasie których zmianie ulega jedynie tensor odkształceń sprężystych. Dla procesów biernych:

- nie został spełniony warunek plastyczności:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \quad (36)$$

- **lub** przyrost warunku plastyczności na powierzchni plastyczności jest ujemny

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0 \quad (37)$$

Ten drugi przypadek odpowiada sytuacji, w której co prawda warunek plastyczności jest spełniony, ale przyrost obciążenia skutkować będzie procesem odciążenia. W tym miejscu warto zaznaczyć, że w przypadku **przyrostowych modeli plastyczności z tzw. stowarzyszonym prawem płynięcia** pochodna warunku plastyczności względem stanu naprężenia jest – z dokładnością do stałej – równa tensorowi przyrostu odkształcenia plastycznego. W takim przypadku iloczyn skalarny tej pochodnej i tensora przyrostu naprężenia ma interpretację (z dokładnością do stałej) **pracy przyrostu naprężenia na przyroście odkształcenia plastycznego**.

4.2 SPRĘŻYSTY CHARAKTER ODCIĄŻENIA

Wspomniano już, że **proces odciążenia ma charakter sprężysty**. Rzeczywiście, jedynymi odkształceniami, które mogą ulec zmianie wskutek odciążenia są odkształcenia sprężyste, które postępowywały równolegle wraz deformacją plastyczną. **Zainicjowanie kolejnych poślizgów wymagałoby w istocie dostarczenia dodatkowej energii, stąd wobec spadającego obciążenia zewnętrznego odkształcenia plastyczne pozostają (są trwałe), a spadają jedynie odkształcenia sprężyste.**

Można zastanowić się nad faktem, że charakterystyka sprężysta procesu pierwotnego obciążenia i późniejszego odciążenia są właściwie identyczne (ten sam moduł Younga E). Przecież odkształcenia plastyczne skutkują trwałymi zmianami w strukturze wewnętrznej materiału, która określa przecież jego własności mechaniczne. W istocie sumaryczna **objętość obszarów objętych dyslokacjami jest bardzo niewielka** w porównaniu do objętości całego monokrystalicznego ziarna. **Poza tymi obszarami struktura kryształu pozostaje zasadniczo nienaruszona wskutek obciążenia powodującego deformację plastyczną** – struktura ta jest odkształcona sprężysto i po usunięciu obciążenia powraca do pierwotnej konfiguracji. Z tego też względu takie cechy mechaniczne materiału jak np. stałe sprężyste właściwie nie zmieniają się w toku deformacji plastycznej, dopóki odkształcenia są wystarczająco małe.

4.3 NIEŚCIŚLIWY CHARAKTER DEFORMACJI PLASTYCZNEJ I NIEZALEŻNOŚĆ WARUNKU PLASTYCZNOŚCI OD NAPRĘŻENIA HYDROSTATYCZNEGO

Liczne eksperymenty wskazują, że **w toku deformacji plastycznej objętość materiału w pierwszym przybliżeniu nie ulega zmianie**, tj. że **plastyczne odkształcenie objętościowe jest równe w przybliżeniu zeru**. Jest to zgodne z charakterem poznanych mechanizmów deformacji plastycznej, które bazują na **trwałych odkształceniach postaciowych** – poślizgach i bliźniakowaniu – których czynnikiem wymuszającym są naprężenia styczne. Rzeczywiście, mechanizmy te doprowadzają do zmiany ułożenia przestrzennego atomów w sieci nie powodując jednak istotnej zmiany całkowitej objętości zajmowanej przez te atomy.

W przypadku materiałów, w których daje się zaobserwować zjawisko płynięcia plastycznego proces deformacji plastycznej przypomina właśnie ruch płynu nieściśliwego – stąd też nazwa „płynięcie” plastyczne. Zjawiskiem do pewnego stopnia związanym z tą obserwacją jest również **niezależność warunku plastyczności od wielkości naprężenia hydrostatycznego**. Można zauważyć, że w klasycznych warunkach CTG i MHMH dodanie do stanu naprężenia dowolnie wielkiego naprężenia hydrostatycznego nie zmienia warunku ani wartości naprężenia zredukowanego.

Obydwa te zjawiska znajdują wspólny wyraz w modelowaniu matematycznym w ramach tzw. **przyrostowego modelu plastyczności ze stowarzyszonym prawem płynięcia**, w którym tensor przyrostu odkształceń plastycznych wyznacza się jako gradient tzw. potencjału plastycznego, a potencjał ten jest równy warunkowi plastyczności. Jeśli warunek plastyczności jest niezależny od naprężenia hydrostatycznego, to pochodna **potencjału plastycznego** $\Psi(\sigma)$ (danego tą samą funkcją, co warunek plastyczności $f(\sigma)$) względem tej składowej jest równa 0, a pochodna ta –

zgodnie z przyjętym zawiązkiem konstytutywnym – jest miarą odkształcenia objętościowego.

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \Psi(\sigma) = f(\sigma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\varepsilon_{kk}^{pl} = 0$$

Od razu trzeba zaznaczyć, że obserwacja ta ma jedynie charakter przybliżony – w rzeczywistości dokładne pomiary wskazują niewielkie zmiany objętości materiałów odkształcanych plastycznie oraz zależność warunku plastyczności od składowej hydrostatycznej, czego wyrazem są np. warunku Burzyńskiego, Schleichera-Misesa, Druckera-Pragera i in.

4.4 WZMOCNIENIE

Wiemy już, że podstawowym mechanizmem deformacji plastycznej jest ruch dyslokacji. Skoro zatem dla pewnego zakresu odkształceń plastycznych procesy te wymagają przyłożenia coraz większego obciążenia (wzmocnienie), musi istnieć jakaś przeszkoda w ruchu dyslokacji. Można wskazać zasadniczo dwie takie przeszkody.

Pierwszą z nich jest **lokalnie duża gęstość dyslokacji**. Z każdą dyslokacją związane jest pole naprężeń – pola związane z kilkoma dyslokacjami mogą oddziaływać na siebie w taki sposób, że ruch dyslokacji może wymagać mniejszego wymuszenia zewnętrznego („dyslokacje się przyciągają”) lub przeciwnie – większego („dyslokacje się odpychają”). Materiał silnie odkształcony plastycznie posiada wiele dyslokacji. Jeśli **dyslokacje te koncentrują się w jednym miejscu i oddziałują na siebie w taki sposób, że utrudniają sobie wzajemnie ruch** (np. dyslokacje w tej samej płaszczyźnie i o tym samym wektorze Burgersa), zachodzi zjawisko **wzmocnienia**, tj. do kolejnych przyrostów odkształcenia plastycznego konieczne będzie większe obciążenie.

Może też zdarzyć się, że **w obszarze silnej koncentracji dyslokacji różnego typu, będą one wzajemnie wspomagają swój ruch** i do kolejnych przyrostów odkształcenia plastycznego wymagane będzie mniejsze obciążenie – mówimy wtedy o zjawisku **osłabienia**.

Drugim mechanizmem wzmocnienia jest **blokowanie ruchu dyslokacji na granicy ziaren**. Opisane mechanizmy propagacji dyslokacji dotyczą tylko ruchu w strukturze idealnej. Pewną przeszkodę w tym ruchu mogą stanowić zatem inne defekty tej struktury (co zostało opisane powyżej) lub granica obszaru o ustalonej strukturze. Struktura ułożenia atomów na granicy ziaren i w obszarach bezpośrednio do nich przylegających jest silnie zaburzona i ruch dyslokacji w takim ośrodku jest zasadniczo niemożliwy. Z tego powodu materiały polikrystaliczne wykazują większe wzmocnienie niż monokryształy i – podobnie – materiały o drobniejszym uziarnieniu (większa sumaryczna powierzchnia granic) wykazują większe wzmocnienie niż te o większych wymiarach ziaren. Rozdrabnianie ziaren jest jednym ze sposobów na zwiększenie granicznej wartości naprężenia uplastyczniającego.

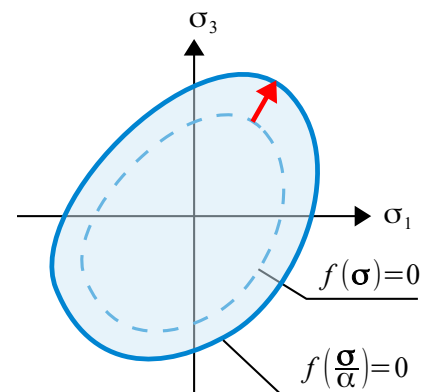
W prostych jednoosiowych zagadnieniach, zjawisko wzmocnienia plastycznego można opisać w prosty sposób, za pomocą przybliżonych wzorów empirycznych. Przykładami takich wzorów mogą być:

• wzór Hollomona	$\sigma = K(\varepsilon^{pl})^n$	(38)
• wzór Ludwika	$\sigma = \sigma_0 + K(\varepsilon^{pl})^n$	(39)
• wzór Ramberga-Osgooda	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n$	(40)

W przypadku wzorów Hollomona oraz Ludwika we wzorach występuje jedynie odkształcenie plastyczne – odkształcenie sprężyste przyjmowane jest za pomijalnie małe i tym samym wzory te odpowiadają modelowi ciał sztywno-plastycznych. Wielkość n , zwana **wykładnikiem (wskaźnikiem) wzmocnienia** i uważana za stałą materiałową, jest podstawowym parametrem opisującym wzmocnienie materiału. Stała materiałowa K jest miarą sztywności materiału w zakresie plastycznym. Jest to opis bardzo uproszczony.

Zagadnienie wzmocnienia jest w istocie znacznie bardziej złożone. Chodzi bowiem o **ewolucję warunku plastyczności** (i tym samym **powierzchni plastyczności**) w toku **postępującej deformacji plastycznej**. W przypadku materiałów izotropowych szeroko akceptowanymi modelami wzmocnienia są:

- **Wzmocnienie izotropowe** zakłada, że **powierzchnia plastyczności nie zmienia swojego kształtu i rozszerza się równomiernie w każdym kierunku (izotropowo) w przestrzeni naprężeń**. Jeśli zatem np. wskutek rozciągania w zakresie plastycznym wzmocnienie doprowadziło do α -krotnego wzrostu wartości naprężenia granicznego, to w innych stanach obciążenia (np. ściskanie albo ścinanie) odpowiadające im graniczne wartości naprężenia również wzrastają α -krotnie. W takiej sytuacji zmianę warunku plastyczności po wzmocnieniu można zapisać następujący sposób:



$$f(\sigma) \rightarrow f\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right) = 0, \quad \alpha \geq 1 \quad (41)$$

Jeśli warunek plastyczności zapiszemy w postaci:

$$f(\sigma) = c$$

gdzie c jest pewną wartością graniczną, to dla materiałów bez wzmocnienia c będzie stałe. Dla materiałów ze wzmocnieniem izotropowym c może być uważane za pewną funkcję uwzględniającą historię obciążenia. Postuluje się, aby historia ta uwzględniana była

za pomocą pewnego parametru skalarnego – powszechnie akceptuje się dwie propozycje takiego parametru:

- **model wzmocnienia izotropowego Taylora-Quinney'a** – w modelu tym przyjmuje się, że wielkość wzmocnienia zależy od pracy naprężeń na odkształceniach plastycznych W_{pl} :

$$c = c(W_{pl}) \text{ , gdzie } W_{pl} = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{pl} \quad (42)$$

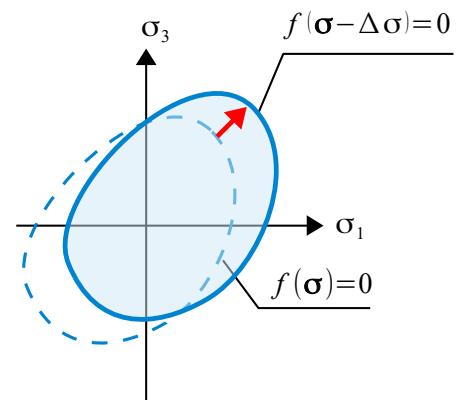
gdzie całka przebiega po rzeczywistej historii obciążenia i deformacji.

- **model wzmocnienia izotropowego Odquista-Hilla** – w modelu tym przyjmuje się, że wielkość wzmocnienia zależy od całkowitej drogi ścieżki odkształcenia plastycznego d_{pl} :

$$c = c(d_{pl}) \text{ , gdzie } d_{pl} = \int \sqrt{d\varepsilon_{ij}^{pl} d\varepsilon_{ij}^{pl}} \quad (43)$$

gdzie całka przebiega po rzeczywistej historii deformacji. Pierwotna propozycja Odquista dotyczyła ścieżki odkształcenia całkowitego.

- **wzmocnienie kinematyczne** zakłada, że **powierzchnia plastyczności nie zmienia ani swojego kształtu ani wymiarów, ale przesuwa się w przestrzeni naprężeń jako bryła sztywna**. Cechą tego modelu jest to, że jeśli np. wskutek rozciągania w zakresie plastycznym wzmocnienie doprowadziło do wzrostu wartości naprężenia granicznego o $\Delta\sigma$, to w stanie obciążenia przeciwnego – ściskania w tym samym kierunku – odpowiadająca mu graniczna wartość naprężenia spada o wartość $\Delta\sigma$. W takiej sytuacji zmianę warunku plastyczności po wzmocnieniu można zapisać następujący sposób:



$$f(\sigma) \rightarrow f(\sigma - \Delta\sigma) = 0 \quad (44)$$

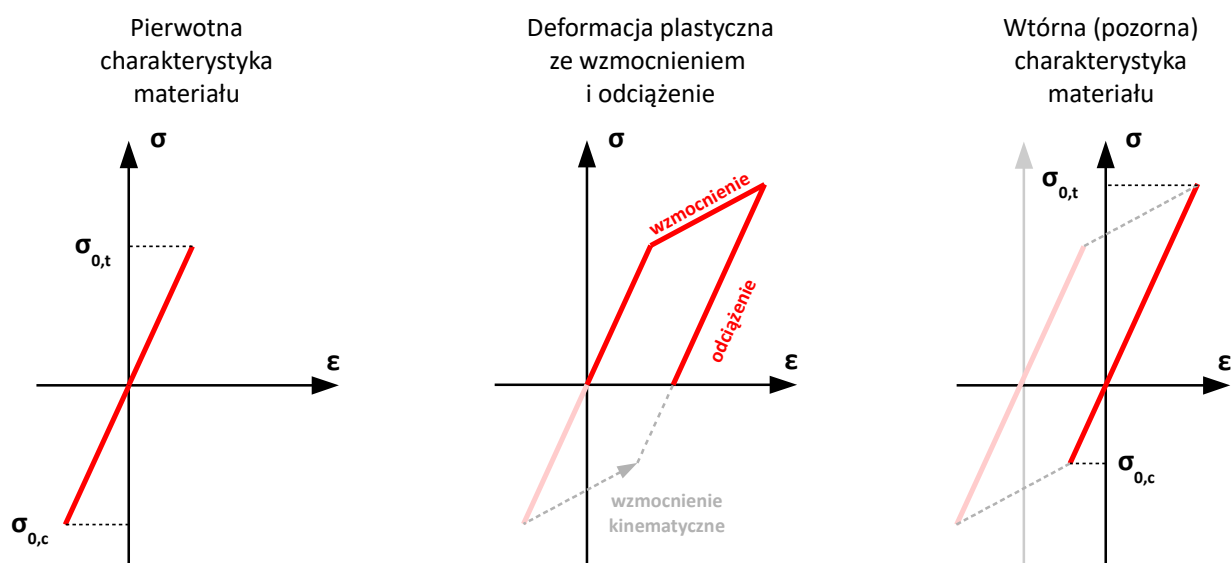
- **wzmocnienie mieszane** jest złożeniem modelu wzmocnienia kinematycznego oraz izotropowego – **powierzchnia plastyczności może zwiększać równomiernie swoje rozmiary i przesuwać się w przestrzeni naprężeń**.

$$f(\sigma) \rightarrow f\left(\frac{\sigma}{\alpha} - \Delta\sigma\right) = 0 \quad (45)$$

- **wzmocnienie anizotropowe** zakłada, że powierzchnia plastyczności może zmieniać swój kształt w każdym kierunku w przestrzeni naprężeń (tj. dla każdego złożonego stanu granicznego) w ogólności w odmienny sposób.

4.5 EFEKT BAUSCHINGERA

Gdy materiał jest odkształcony plastycznie, a następnie odciążony, w jego wnętrzu w mikroskopowej skali pozostają pewne **naprężenia resztkowe** związane z niejednorodnością wewnętrznej struktury materiału i spowodowanymi tym odmiennymi stanami naprężenia powstałymi w ziarnach o różnorodnie zorientowanych strukturach. Naprężenia te stanowią jednak układ sił w równowadze. Gdy materiał zostanie ponownie obciążony w odmienny sposób niż pierwotnie naprężenia te mają wpływ na uruchomienie mechanizmów deformacji plastycznej, co sprawia, że zachodzi ona przy obciążeniu o innej wartości niż w pierwotnym procesie obciążenia. Zjawisko to nazywamy **efektem Bauschingera**. Jednym z prostych sposobów uwzględnienia efektu Bauschingera jest zastosowanie modelu wzmocnienia kinematycznego, jak to zostało zilustrowane na rysunku poniżej:



4.6 ANIZOTROPIA WYMUSZONA

Wspomniano, że deformacja plastyczna zmienia strukturę ziarna monokrystalicznego jedynie w niewielkim stopniu – sumaryczna objętość obszarów, objętych bezpośrednim oddziaływaniem dyslokacji jest mała w porównaniu do objętości całego ziarna. Z drugiej strony w ciele polikrystalicznym silna deformacja plastyczna może doprowadzić do zmiany wzajemnego ułożenia ziaren między sobą. Jest jasne, że np. stan jednoosiowego rozciągania ma wyraźnie określony **kierunek wyróżniony przez to obciążenie – ziarna krystaliczne pod wpływem obciążenia doznają obrotu i wydłużają się w kierunku największego odkształcenia rozciągającego**. Podobne zjawiska zachodzą w złożonych stanach obciążenia, przy czym orientacja, do której dąży ułożenie struktury krystalicznej ziarna zależy od historii procesu deformacji, przy czym w ciele polikrystalicznym ta orientacja graniczna jest w ogólności inna dla różnych ziaren z uwagi na brak swobody ruchu każdego z nich. W rezultacie **struktura wewnętrzna materiału ulega zmianie w taki sposób, że makroskopowe cechy mechaniczne materiału pierwotnie izotropowego nabierają cech anizotropii wymuszonej obciążeniem** – takie cechy jak sztywność (również w zakresie sprężystym) lub wartość granicy plastyczności przyjmują wtedy różne wartości, w zależności od orientacji obciążenia względem kierunków tej wymuszonej anizotropii.

Nawet dla materiałów, które pierwotnie były zbiorem ziaren o całkowicie losowym rozkładzie orientacji struktury krystalicznej poszczególnych ziaren – mówimy wtedy, że struktura nie wykazuje zauważalnej tekstury – można **w toku postępującej deformacji plastycznej zauważyć rozwój tekstury materiału**, tj. **coraz powszechniejszego wspólnego ukierunkowania orientacji struktury krystalicznej ziaren**.

5. RÓWNANIA MATEMATYCZNEJ TEORII PLASTYCZNOŚCI

Teoria plastyczności stanowi dział mechaniki ośrodków ciągłych, czyli matematycznej teorii opisującej ruch i deformację ciał odkształcalnych, których struktura umożliwia opisywanie ich za pomocą tzw. **ośrodka ciągłego** – obszar zajmowany przez ciało w przestrzeni utożsamiamy wtedy z pewnym **podobszarem euklidesowej przestrzeni fizycznej, na którym możemy w sposób jednoznaczny opisywać pewne ciągłe i różniczkowalne funkcje**, których wartość zależy od wybranego punktu tego podobszaru. Funkcje te opisują stan mechaniczny ciała.

5.1 KINEMATYKA OŚRODKA CIĄGŁEGO – RÓWNANIA GEOMETRYCZNE

W ogólnym sformułowaniu opis deformacji ciała można sprowadzić do przyporządkowania każdej cząstce ciała jej położenie w przestrzeni w każdej chwili ruchu. Cząstkę zaś identyfikować możemy poprzez jej położenie na początku ruchu. I tak pole wektorowe \mathbf{X} , którego składowe nazywamy **współrzędnymi materialnymi** lub **współrzędnymi Lagrange'a**, określać będzie **położenie danej cząstki na początku ruchu**, tj. w **konfiguracji początkowej** lub **konfiguracji odniesienia**. Pole wektorowe \mathbf{x} , którego składowe nazywamy **współrzędnymi przestrzennymi** lub **współrzędnymi Eulera**, określają **punkt w przestrzeni**. **Wektor przemieszczenia** zdefiniowany jest następująco:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (46)$$

Tzw. **materialny opis** ruchu ciała odkształcalnego sprowadza się do znalezienia przyporządkowania:

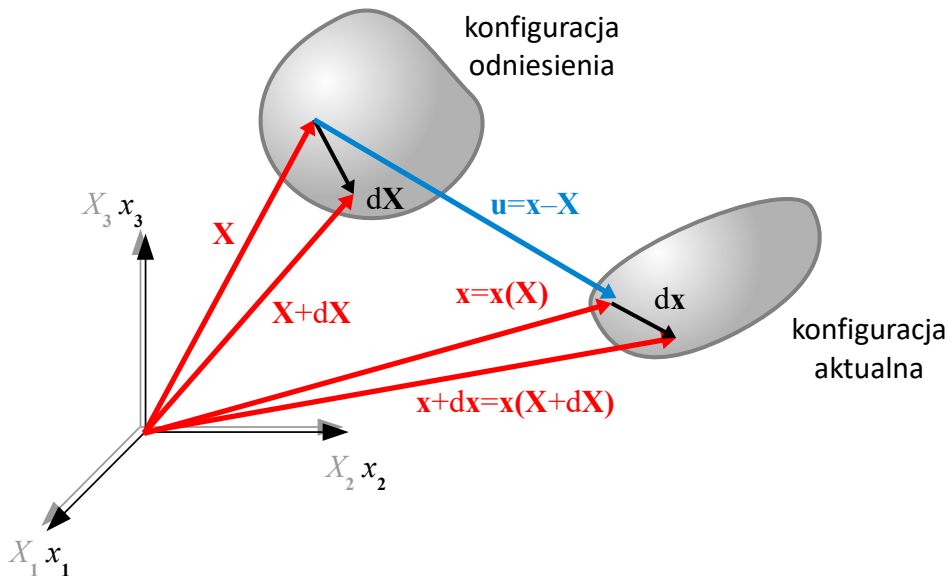
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (47)$$

Nieskończenie małe włókno materialne utożsamiać możemy z wektorem łączącym dwie nieskończenie bliskie cząstki:

$$d\mathbf{X} = (\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{X}$$

Przy założeniu, że znamy odwzorowanie (47), postać tego włókna po deformacji może być przybliżona wektorem łączącym położenia tych cząstek po deformacji.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X})$$



Korzystając z rozwinięcia drugiego ze składników tego wyrażenia w szereg Taylora i ograniczając nasze rozważania jedynie do punktów nieskończenie bliskich, dla których dalsze człony szeregu są bliskie zera, możemy napisać:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \left[\mathbf{x}(\mathbf{X}) + \frac{1}{1!} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} d\mathbf{X} + \dots \right] - \mathbf{x} \approx \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} d\mathbf{X} \quad (48)$$

Gradient pola współrzędnych przestrzennych względem współrzędnych materialnych nazywać będziemy **gradientem deformacji** i oznaczamy symbolem \mathbf{F} – jest to pole tensorowe drugiego rzędu:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (49)$$

Długość dowolnego włókna materialnego przed deformacją dL_R utożsamiamy z długością wektora opisującego to włókno $dL_R = \sqrt{dX_i dX_i}$. **Długość tego samego włókna po deformacji** można wyznaczyć następująco:

$$dL = \sqrt{dx_i dx_i} = \sqrt{F_{ij} dX_j F_{ik} dX_k} = \sqrt{C_{jk} dX_j dX_k} \quad (50)$$

gdzie

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (51)$$

Tensor \mathbf{C} nazywać będziemy **tensorem deformacji**. Różnicę kwadratów długości włókna po deformacji i przed deformacją możemy zapisać w następujący sposób:

$$dL^2 - dL_R^2 = C_{ij} dX_i dX_j - dX_i dX_i = 2E_{ij} dX_i dX_j \quad (52)$$

gdzie

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{1}) \quad \Leftrightarrow \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (53)$$

Tensor \mathbf{E} nazywać będziemy **tensorem odkształcenia**. Wykorzystajmy teraz w definicji powyższej definicje tensora deformacji oraz gradientu deformacji, sam zaś gradient deformacji spróbujemy wyrazić przez wektor przemieszczenia:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i + u_i) = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (54)$$

Mamy wtedy:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left(\delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (55)$$

Związki powyższe (obowiązujące dla $i, j = 1, 2, 3$) nazywamy **równaniami geometrycznymi**. W większości praktycznych zagadnień opisywanych w ramach teorii sprężystości i plastyczności przyjmuje się **założenie o małych przemieszczeniach i małych odkształceniach**. Zgodnie z założeniem o małych przemieszczeniach konfiguracja odniesienia i konfiguracja aktualna ciała są bardzo bliskie sobie, co w konsekwencji pozwala nam utożsamiać ze sobą współrzędne materialne i współrzędne przestrzenne, tj. $x_i \approx X_i$. Zgodnie z założeniem o małych odkształceniach pochodne przemieszczeń są wielokrotnie mniejsze od jedności. Konsekwencją tego założenia jest to, że ostatni nieliniowy człon po prawej stronie związków geometrycznych zmierza do 0 znacznie szybciej niż pierwsze dwa, liniowe. W rezultacie **równania geometryczne w ramach teorii małych odkształceń i małych przemieszczeń** przyjmują przybliżoną postać związku liniowego:

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (56)$$

Wyrażenie po prawej stronie jest definicją **tensora małych odkształceń**

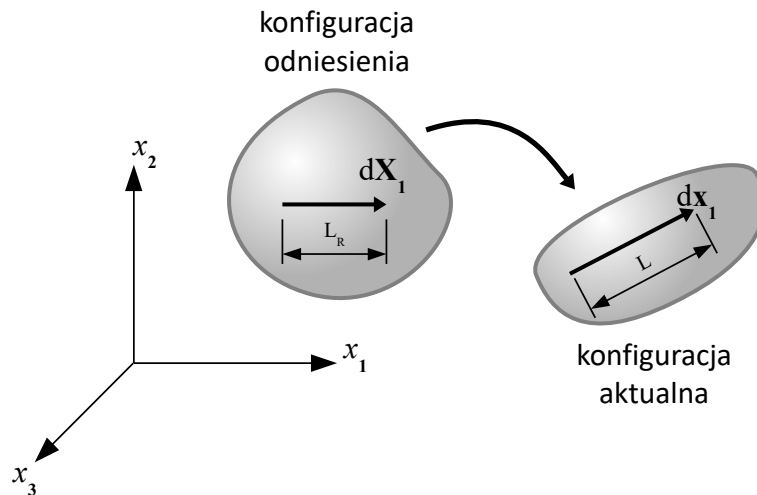
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (57)$$

Ponieważ ograniczamy się jedynie do teorii liniowej, nazywać go będziemy po prostu **tensorem odkształcenia**. Jest to **symetryczny** tensor drugiego rzędu – jego symetria wynika z przyjętej definicji.

Można pokazać, że:

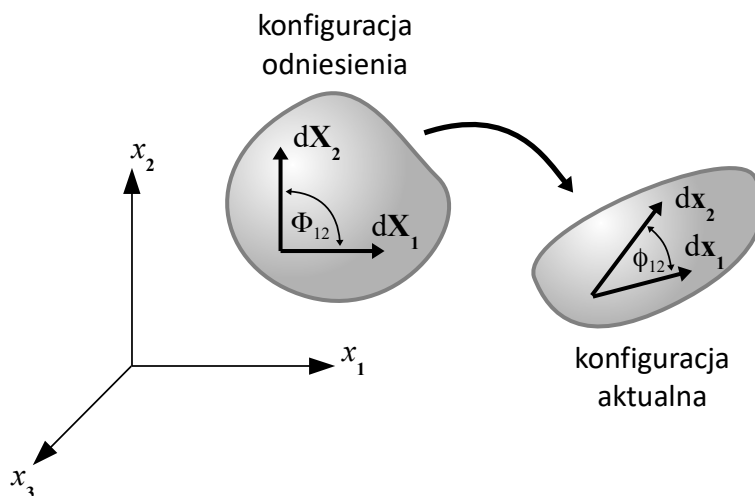
- składowe jednoimienne ($i=j$) tensora odkształcenia są w przybliżeniu równe **wydłużeniu względnemu włókna**, które przed deformacją było równoległe do i -tej osi przyjętego układu współrzędnych. Składowe te nazywamy **odkształceniami liniowymi**.

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{\Delta L}{L_R} = \frac{L - L_R}{L_R} = \frac{|d\mathbf{x}_i| - |d\mathbf{X}_i|}{|d\mathbf{X}_i|} \quad (i=j)$$



- Składowe różnoimienne ($i \neq j$) tensora odkształcenia są w przybliżeniu równe **połowię kąta**, o jaki zmieni się kąt prosty między włóknami, z których jedno było pierwotnie równoległe do i -tej osi przyjętego układu współrzędnych, drugie zaś było równoległe do j -tej osi tego układu. Składowe te nazywamy **odkształceniami postaciowymi**.

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{\gamma_{ij}}{2}, \quad \gamma_{ij} = \Phi_{ij} - \phi_{ij}, \quad \Phi_{ij} = \sphericalangle(d\mathbf{X}_i; d\mathbf{X}_j) = 90^\circ, \quad \phi_{ij} = \sphericalangle(d\mathbf{x}_i; d\mathbf{x}_j)$$



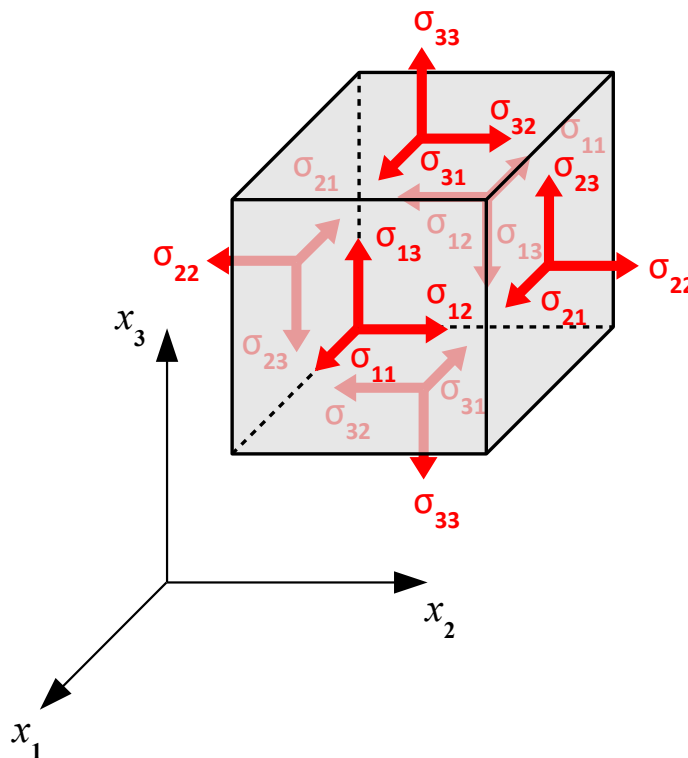
5.2 DYNAMIKA OŚRODKA CIĄGŁEGO – RÓWNANIA RUCHU

Ruch ośrodka ciągłego jest złożeniem ruchu cząstek, w ramach którego odległości między tymi cząstkami się nie zmieniają (**ruch bryły sztywnej** będący **złożeniem przesunięcia równoległego i obrotu**) oraz **odkształcenia**, tj. ruchu cząstek względem siebie, co prowadzi do **zmiany kształtu i objętości ciała**. W ramach mechaniki klasycznej przyjmujemy, że w inercjalnym układzie odniesienia ciało, które pierwotnie było w spoczynku, poruszać się może jedynie pod wpływem działania jakiejś siły. Ruch cząstek względem siebie możliwy jest zatem jedynie w sytuacji, gdy w ciele występują jakieś **siły wewnętrzne** wymuszające ten ruch. Postulujemy, że siły te mają charakter sił powierzchniowych, tj. opisywać je będziemy za pomocą wektorowego pola powierzchniowej gęstości sił wewnętrznych. **Powierzchniową gęstość sił wewnętrznych** nazywać będziemy **naprężeniem**. Przyjmujemy, że wektorowe pole naprężenia zależy nie tylko od rozpatrywanej cząstki, ale również od tego, jak zorientowana jest powierzchnia wewnątrz ciała, do której odniesione są siły wewnętrzne.

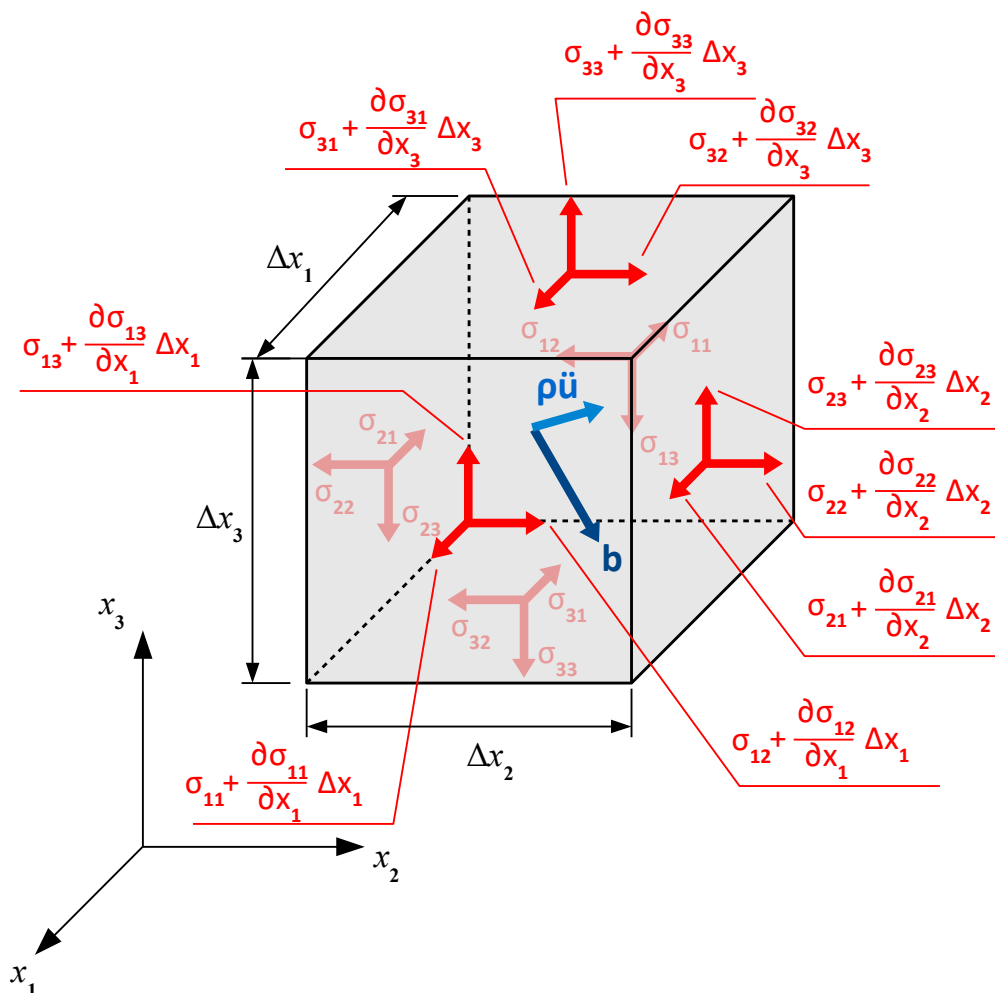
Analizując równowagę sił przyłożonych do nieskończenie małego czworościennego wycinka ciała odkształcalnego, można pokazać, że wektor naprężenia \mathbf{p} odpowiadający powierzchni, która w danym punkcie ma normalną \mathbf{v} , można wyznaczyć w następujący sposób

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad p_i = \sigma_{ij} v_j \quad (58)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ jest **tensorem naprężenia**. Jest to **symetryczny** tensor drugiego rzędu. Można pokazać, że jego symetria wynika z lokalnego zachowania II zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego (zasady krętu). Interpretację fizyczną składowych tensora naprężenia ilustruje poniższy obrazek:



Mówimy, że tensor naprężenia określa stan naprężenia w ciele. Aby wyznaczyć równanie ruchu dla ciała odkształcalnego, rozważmy wycinek ciała odkształcalnego, w którym przyrosty składowych tensora naprężenia przybliżamy składowymi gradientu tensora naprężenia. Wycinek ten obciążony jest ponadto zewnętrznymi siłami objętościowymi oraz – zgodnie z zasadą d'Alemberta – pozorną siłą bezwładności, równą iloczynowi masy ciała i jego przyspieszenia ze znakiem „-”:



Rozważmy równowagę sił na kierunku osi x_1 , całkując odpowiednie naprężenia ze ścianek prostopadłościennego wycinka oraz całkując siły zewnętrzne i siły bezwładności po całej objętości tego wycinka:

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{11}\Delta x_2\Delta x_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta x_1\right)\Delta x_2\Delta x_3 - \sigma_{21}\Delta x_1\Delta x_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}\Delta x_2\right)\Delta x_1\Delta x_3 - \\
 & -\sigma_{31}\Delta x_1\Delta x_2 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}\Delta x_3\right)\Delta x_1\Delta x_2 + (b_1\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3) - (\rho\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3\ddot{u}_1) = 0
 \end{aligned}$$

Po redukcji otrzymamy:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 = \rho\ddot{u}_1 \quad (59)$$

Rozumowanie to można powtórzyć dla pozostałych kierunków. Po uwzględnieniu symetrii tensora naprężenia możemy zapisać **równania ruchu** w następującej postaci:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (60)$$

W przypadku zagadnień **statyki**, w których udział sił bezwładności może być pominięty, równania te noszą nazwę **równań równowagi**.

5.3 ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE W DEFORMACJI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ

Kluczowym elementem w poprawnym sformułowaniu matematycznej teorii plastyczności, odróżniającym teorię plastyczności od teorii sprężystości jest dobór odpowiednich **związków fizycznych między stanem naprężenia a stanem odkształcenia z uwzględnieniem podziału odkształceń na sprężyste i plastyczne**.

W ramach **deformacji sprężystej** powszechnie przyjmuje się **model ciała liniowo-sprężystego z liniowymi związkami konstytutywnymi uogólnionego prawa Hooke'a**, w którym każda ze składowych tensora naprężenia wyraża się jako liniowa kombinacja składowych tensora odkształcenia (i vice versa), zaś współczynniki tej kombinacji nazywamy **stałymi materiałowymi**:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2G \boldsymbol{\varepsilon} + \Lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} & \Leftrightarrow & \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}] \\ \sigma_{ij} &= 2G \varepsilon_{ij} + \Lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} & \Leftrightarrow & \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}] \end{aligned} \quad (61)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E &= \frac{G(3\Lambda + 2G)}{\Lambda + G} & - & \text{moduł Younga, moduł sztywności podłużnej} \\ \nu &= \frac{\Lambda}{2(\Lambda + G)} & - & \text{liczba Poissona, współczynnik rozszerzalności bocznej} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} & - & \text{moduł Kirchhoffa, moduł sztywności poprzecznej} \\ \Lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & - & \text{pierwszy parametr Lamégo} \end{aligned}$$

Jest to najprostszy z modeli konstytutywnych, który w większości istotnych zagadnień praktycznych okazuje się wystarczający do modelowania zjawisk sprężystych. Łatwo sprawdzić, że jeżeli tensor naprężenia jest w postaci diagonalnej, to odpowiadający mu tensor odkształcenia również jest w

postaci diagonalnej, tj. mają one te same kierunki własne.

Z uwagi na wspomnianą już nieściśliwość deformacji plastycznej, w teorii plastyczności szczególne znaczenie ma możliwość zapisania związku konstytutywnego w postaci układu dwóch następujących związków:

<ul style="list-style-type: none"> • prawo zmiany objętości: $p = K \theta$ (62)
<ul style="list-style-type: none"> • prawo zmiany kształtu: $\mathbf{s} = 2G \mathbf{e}$ (63)

gdzie:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad - \text{naprężenie hydrostatyczne}$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad - \text{odkształcenie objętościowe}$$

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{1} \quad - \text{dewiator naprężenia}$$

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3} \mathbf{1} \quad - \text{dewiator odkształcenia}$$

$$\frac{p}{3} \mathbf{1} \quad - \text{aksjator naprężenia}$$

$$\frac{\theta}{3} \mathbf{1} \quad - \text{aksjator odkształcenia}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \Lambda + \frac{2}{3}G \quad - \text{moduł Helmholtza, moduł sztywności objętościowej}$$

Dowolny tensor możemy zapisać jako sumę jego aksjatora i dewiatora. Zauważmy, że na to, aby tensor naprężenia i odkształcenia miał te same kierunki własne potrzeba i wystarcza, aby ich dewiatory miały te same kierunki własne – ponieważ aksjator ma postać diagonalną w każdym układzie współrzędnych, zatem dodany do dewiatora w jego układzie osi własnych zachowuje jego postać diagonalną i nie zmienia kierunków własnych. W kontekście dewiatorów wprowadzamy pojęcie **intensywności dewiatora**:

- **intensywność naprężenia:** $s_i = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\|$

- **intensywność odkształcenia:** $e_i = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = \sqrt{\frac{3}{2} e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{e}\|$

Warto od razu zwrócić uwagę, że intensywność naprężenia jest tożsama z naprężeniem równoważnym odpowiadającym warunkowi plastyczności MHMH. Podsumowując powyższe rozważania, możemy stwierdzić, że w zakresie sprężystym, dla materiałów liniowo-sprężystych prawdziwe są poniższe stwierdzenia:

1. Naprężenie hydrostatyczne jest proporcjonalne do odkształcenia objętościowego.
2. Intensywność naprężenia jest proporcjonalna do intensywności odkształcenia.
3. Kierunki własne tensora naprężenia i tensora odkształcenia są takie same.

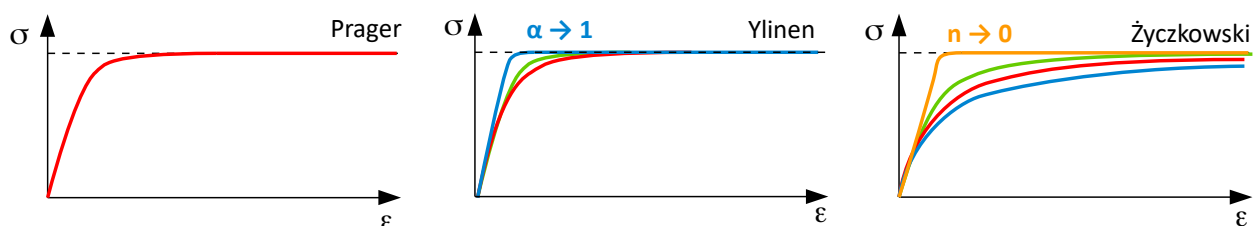
Po spełnieniu warunku plastyczności związku omówione powyżej obowiązują już tylko między tensorem naprężenia a tensorem odkształceń sprężystych. Związek konstytutywny między tensorem naprężenia a tensorem odkształceń plastycznych może być w ogólności odmienny. Wyróżnić tu można zasadniczo trzy podejścia do określenia **związku konstytutywnego dla deformacji sprężysto-plastycznej**:

- **modele uproszczone** – są to w istocie **modele nieliniowo sprężyste**, tj. modele ciała sprężystego, w których założone **nieliniowe związki konstytutywne** są dobierane w taki sposób, aby dobrze odpowiadały wyznaczonej eksperymentalnie krzywej $\sigma-\varepsilon$ zarówno w zakresie sprężystym jak i sprężysto-plastycznym. Modele te zakładają **jednoznaczny i lokalnie odwracalny związek między naprężeniem i odkształceniem**. Ich przydatność ograniczona jest jedynie do **procesów monotonicznego obciążenia – nie uwzględniają one bowiem sprężystego charakteru procesów biernych**. Są to przykładowo modele wzmocnienia potęgowego Ludwika, Ramberga-Osgooda itp. Najczęściej formułowane są jedynie dla prostych stanów obciążenia, np. stanu jednoosiowego. Przykładami prostych modeli plastyczności są modele, które określa się niekiedy mianem **modeli asymptotycznej plastyczności**:

$$\bullet \text{ Prager: } \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \operatorname{arctgh}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) \quad (64)$$

$$\bullet \text{ Ylinen: } \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \left[\alpha \sigma - (1-\alpha) \sigma_0 \ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right) \right], \quad \alpha \in \langle 0; 1 \rangle \quad (65)$$

$$\bullet \text{ Życzkowski: } \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{-n}, \quad n \geq 0 \quad (66)$$



- **teorie odkształceniowe (deformacyjne)** lub **modele odkształcenia całkowitego** – zakładają, że **stan naprężenia w sposób jednoznaczny wyznacza stan odkształcenia** – zarówno sprężystego jak i plastycznego. Modele te posiadają zasadniczą wadę polegającą na tym, że nie opisują w sposób poprawny zjawisk odciążenia i ponownego obciążenia. Ich użyteczność wynika z faktu, że dla prostych zagadnień, w których stan naprężenia przyrasta proporcjonalnie, dają one wyniki zbieżne z doświadczeniem, a przy tym modele te mają prostą strukturę matematyczną.

- **teorie płynięcia plastycznego** lub **przyrostowe modele plastyczności** – zakładają, że **stan naprężenia w sposób jednoznaczny wyznacza stan odkształcenia sprężystego oraz tensor przyrostu odkształcenia plastycznego**. Inaczej niż teorie deformacyjne, opisują one w sposób poprawny zjawiska wielokrotnego obciążenia i odciążenia, jednakże odkształcenie plastyczne musi być wyznaczone dopiero poprzez odpowiednie sumowanie wyznaczonych przyrostów.

5.3.1. ODKSZTAŁCENIOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

5.3.1.1 TEORIA NÁDAIA – HENCKY'EGO – ILJUSZYNA

Najszerzej rozpowszechnionym modelem całkowitego odkształcenia jest **teoria Hencky'ego – Iljuszyna**. W nawiązaniu do powszechnie akceptowanego poglądu, że warunek plastyczności nie zależy w pierwszym przybliżeniu od naprężenia hydrostatycznego, oraz że trwała deformacja objętościowa jest w przybliżeniu równa 0, zakłada się, że:

1. **Naprężenie hydrostatyczne jest proporcjonalne do odkształcenia objętościowego**, przy czym współczynnik proporcjonalności (moduł Helmholtza) jest stały w czasie deformacji, tj. ma tę samą wartość zarówno w zakresie odkształceń sprężystych, jak i w zakresie deformacji sprężysto-plastycznej.
2. **Intensywność naprężenia jest funkcją wyłącznie intensywności odkształcenia**. Nie jest to zatem już proporcjonalność tych dwóch wielkości - funkcję wiążącą intensywności należy wyznaczyć na drodze doświadczalnej. Ważne jest jednak, że związek ten nie zależy od wielkości naprężenia hydrostatycznego oraz odkształcenia objętościowego.
3. **Kierunki własne tensora naprężenia i tensora odkształceń całkowitych są takie same**. Założenie to znajduje uzasadnienie w doświadczalnej obserwacji, zgodnie z którą kierunki maksymalnych naprężeń stycznych pokrywają się z kierunkami maksymalnych odkształceń postaciowych – są to kierunki nachylone pod kątem 45° do kierunków własnych. Pozwala to założyć, że dewiatory naprężenia i odkształcenia są współosiowe. Ponieważ dodanie dowolnej składowej kulistej (aksjatora) nie zmienia kierunków własnych, zatem w przypadku deformacji plastycznej, gdy przyrost naprężenia hydrostatycznego nie powoduje przyrostu plastycznego odkształcenia objętościowego, współosiowość tensora naprężenia i tensora odkształceń całkowitych jest zachowana.

Równania konstytutywne teorii Hencky'ego – Iljuszyna są następujące:

$$\begin{cases} e_{ij} = \left(\phi(s_i) + \frac{1}{2G} \right) s_{ij} \\ p = K\theta \end{cases} \quad (67)$$

Łatwo możemy wyróżnić w nich składową sprężystą i plastyczną.

Deformacja sprężysta:

$$\begin{cases} e_{ij}^e = \frac{s_{ij}}{2G} \\ p = K\theta \end{cases} \quad (68)$$

Deformacja plastyczna:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^{pl} = e_{ij}^{pl} = \phi(s_i)s_{ij} \\ \phi(s_i) > 0 \quad \text{dla procesów czynnych} \\ \phi(s_i) = 0 \quad \text{dla procesów biernych} \end{cases} \quad (69)$$

Związki konstytutywne dla składowych sprężystych są identyczne jak w ciele liniowo-sprężystym. Plastyczna składowa stanu odkształcenia ma jedynie składową dewiatorową – składowa hydrostatyczna $\varepsilon_{kk}^{pl} = 0$. Fakt, że $\phi(s_i)$ ma być zerowe dla procesów biernych można rozumieć następująco:

- **przed uplastycznieniem – w przypadku deformacji sprężystej** – składnik ten jest zerowy i związki konstytutywne (a w konsekwencji cała teoria) są identyczne jak w przypadku ciała liniowo-sprężystego.
- **po uplastycznieniu – w przypadku odciążenia** – związek konstytutywny z $\phi(s_i)=0$ obowiązuje dla wynikających z odciążenia przyrostów naprężenia $\Delta\sigma$ i całkowitego odkształcenia $\Delta\varepsilon$ względem pewnego stanu po uplastycznieniu σ^*, ε^* , w którym zaczyna się odciążenie. Z uwagi na liniowość teorii, tak wyznaczone przyrosty na mocy zasady superpozycji są następnie dodawane do stanów σ^*, ε^* .

Kluczową wadą tej teorii jest **brak możliwości poprawnego opisu procesów wielokrotnego obciążenia i odciążenia**. Przyjmijmy, że w wyniku pierwotnego obciążenia osiągnięty zostanie pewien stan odkształcenia plastycznego, trwałego. Następnie, w wyniku odciążenia sprężyste składowe stanu odkształcenia spadają, plastyczne zaś pozostają niezmiennie. Jeśli teraz **ponownie obciążymy materiał, ale w sposób odmienny niż pierwotnie**, tak że dewiator s_{ij} w chwili ponownego spełnienia warunku plastyczności jest odmienny niż pierwotnie. Wyznaczony zgodnie ze związkiem $e_{ij}^{pl} = \phi s_{ij}$ stan odkształcenia plastycznego jest niezgodny z tym wyznaczonym wcześniej - sytuacja taka jest niedopuszczalna. Dopóki jednak model ten jest wykorzystywany w opisie procesów monotonicznych, daje on wyniki o wystarczająco dobrej zgodności z doświadczeniem. Przez **proces monotoniczny** rozumiemy taki, w którym spełnione są dwa warunki:

- kierunki własne tensora naprężenia pozostają niezmiennione.
- wzajemne stosunki między składowymi dewiatora naprężenia pozostają stałe, tj.

$$\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} = const$$

5.3.2 PRZYROSTOWE MODELE PLASTYCZNOŚCI

Alternatywą dla teorii deformacyjnych są tzw. teorie przyrostowe zwane niekiedy **teoriami płynięcia plastycznego**. Nazwa ta nawiązuje do mechaniki płynów, w której jedno z podstawowych równań ma analogiczną postać do założonego związku konstytutywnego. Założenie o braku odkształceń objętościowych w zakresie plastycznym koresponduje z kolei z mechaniką płynów nieściśliwych. Analogia nie jest jednak zupełna i dlatego bardziej poprawne jest stosowanie terminu **modelu przyrostowego**.

Wspomniano już przy okazji omawiania teorii deformacyjnej, że odkształcenia sprężyste i plastyczne będą rozróżniane oraz że **związek konstytutywny między odkształceniami sprężystymi a naprężeniem będzie taki sam jak dla ciała liniowo-sprężystego w całym zakresie deformacji** zarówno sprężystej jak i sprężysto-plastycznej. Założenie to obowiązuje również w teorii płynięcia plastycznego. Naszym zadaniem jest teraz określenie związku konstytutywnego między tensorem naprężenia a tensorem odkształceń plastycznych. W ogólności, związek konstytutywny można przedstawić w dwojaki sposób. Jeśli bowiem ogólną postać takiego związku

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij}^{pl} = S_{ij}(\sigma_{kl})$$

to związek taki można zapisać również w formie przyrostowej, tj. zapisując wyrażenie na różniczkę zupełną

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij}^{pl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}$$

Składowe stanu odkształcenia można uzyskać poprzez całkowanie przyrostów stanu naprężenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}^{(1)}) + \int_{\boldsymbol{\sigma}^{(1)}}^{\boldsymbol{\sigma}^{(2)}} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij}^{pl} = S_{ij}(\sigma_{kl}^{(1)}) + \int_{\sigma_{kl}^{(1)}}^{\sigma_{kl}^{(2)}} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}$$

Choć pozornie wydaje się to podejściem bardziej uciążliwym, ma jednak istotną przewagę polegającą na tym, że **lokalna zmienność stanu odkształcenia i stanu naprężenia może być określona nie tylko dla aktualnego stanu, w jakim materiał się znajduje** (aktualny stan naprężenia i odkształcenia), **ale również od aktualnego charakteru procesu, jakiemu podlega** (aktualny przyrost stanu naprężenia i odkształcenia) – a to jest kluczowe w opisie zagadnień wielokrotnego obciążenia i odciążenia oraz w przypadku obciążeń niemonotonicznych, w których postać stanu naprężenia i ścieżka odkształcenia może się nieustannie zmieniać.

Jednakże kluczowe założenie klasycznej teorii płynięcia plastycznego stawia istotne ograniczenie w dowolności formułowania związku konstytutywnego w formie przyrostowej. Zakłada się bowiem, że **tensor przyrostu odkształceń plastycznych zależy od aktualnego stanu naprężenia (i ewentualnie od historii deformacji), ale jest niezależny od tensora przyrostu naprężenia**. Uzasadnienie tego założenia może być następujące: rozważmy ciało krystaliczne w pewnym określonym stanie naprężenia. Ten aktualny stan naprężenia – w szczególności orientacja maksymalnych naprężeń stycznych lub naprężeń głównych względem możliwych płaszczyzn poślizgu – określa, w jakich płaszczyznach dojdzie do poślizgu, a w których nie. To zaś określa

postać (wzajemne stosunki składowych) tensora przyrostu odkształcenia plastycznego. Niewielki przyrost ustalonego stanu naprężenia nie ma wpływu na to, w jakich płaszczyznach zajdzie poślizg (w tym konkretnym stanie), a jedynie na to, jak duży będzie to poślizg. Przyrost naprężenia ma oczywiście wpływ na to, w jakich płaszczyznach zajdzie poślizg w nowym, powiększonym o ten przyrost stanie naprężenia, który będzie już odmienny. Interesuje nas jednak lokalne sformułowanie związków konstytutywnych – w tym nowym stanie naprężenia mogą one być odmienne (inna postać przyrostu odkształcenia plastycznego), ale będzie to ponownie określone właśnie przez nowy stan naprężenia, a nie przez przyrost naprężenia od chwili poprzedniej. Moglibyśmy zatem napisać ogólny związek konstytutywny przyrostowego modelu plastyczności w następującej postaci:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$$

Zagadnienie znacznie uprości się matematycznie, jeśli zamiast funkcji tensorowej argumentu tensorowego $\mathbf{T}(\boldsymbol{\sigma})$ zapostulujemy istnienie **potencjału plastycznego**, czyli funkcji skalarnej $\Psi(\boldsymbol{\sigma})$, takiej że związek powyższy można zapisać w następującej postaci:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (70)$$

gdzie $d\lambda$ jest parametrem uwzględniającym cechy mechaniczne materiału oraz historię deformacji – w szczególności parametr ten może uwzględniać wzmocnienie.

Najpowszechniej stosowanym podejściem w formułowaniu przyrostowego związku konstytutywnego jest założenie tzw. **stowarzyszonego prawa płynięcia**, tj. założenie, że **potencjał plastyczny wyraża się tą samą funkcją co warunek plastyczności**:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (71)$$

Założenie stowarzyszonego prawa płynięcia wiąże się z wieloma ważnymi aspektami modelowania ciał sprężysto-plastycznych:

- Jeśli prawo płynięcia jest stowarzyszone, to **stan naprężenia w ciele sprężysto-plastycznym (ze wzmocnieniem lub bez wzmocnienia) dla zadanych statycznych warunków brzegowych jest dany jednoznacznie**.
- Jeśli prawo płynięcia jest stowarzyszone, to spełniony jest **warunek normalności** – **tensor przyrostu odkształceń plastycznych jest ortogonalny do powierzchni plastyczności**.
- Jeśli **materiał jest stateczny** w sensie Druckera, to **prawo płynięcia musi być stowarzyszone a powierzchnia plastyczności musi być wypukła**.

5.3.2.1 TEORIA PRANDTLA – REUSSA

Najszerzej rozpowszechnionym modelem przyrostowym jest **model Prandtla – Reussa**, w którym zakłada się prawo płynięcia plastycznego stowarzyszone z warunkiem plastyczności MHMH, tj. gdy warunek plastyczności dany jest kwadratową funkcją dewiatora naprężenia:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \sigma_0$$

Wtedy **tensor przyrostu odkształceń plastycznych jest po prostu proporcjonalny do dewiatora naprężenia**:

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda s_{ij} \quad (72)$$

Wyznaczając związek konstytutywny dla przyrostów odkształceń całkowitych musimy uwzględnić przyrosty wynikające z przyrostów odkształceń sprężystych, które – z uwagi na liniowość związków konstytutywnych – są proporcjonalne do przyrostów naprężeń. Ostatecznie, związki konstytutywne teorii Prandtla – Reussa przyjmują postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_{ij} = d\lambda s_{ij} + \frac{d s_{ij}}{2G} \\ d\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} d\sigma_{kk} \end{array} \right. \quad (73)$$

5.3.2.2 TEORIA LÉVY'EGO-MISESA

Historycznie pierwszą teorią przyrostową była propozycja **Lévy'ego i Misesa**, analogiczna do późniejszego modelu Prandtla-Reussa, z tą tylko różnicą, iż dotyczyła **modelu ciała sztywno-plastycznego**, w którym **odkształcenie całkowite jest równe odkształceniu plastycznemu, a składowa sprężysta odkształcenia jest zerowa**, co sprowadzało się do zależności:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda s_{ij} \quad (74)$$

6. UPLASTYCZNIENIE PRZEKROJU

Tak jak wspomniano, uplastycznienie może zachodzić na różnych poziomach w ciele – do tej pory rozważaliśmy jedynie uplastycznienie w punkcie, którego warunkiem było spełnienie warunku plastyczności. Uplastycznienie pociągało za sobą zmianę związków konstytutywnych w danym punkcie. Jeśli **uplastycznienie obejmie swoim zasięgiem cały zbiór punktów** (podobszar ciała), to mówimy, że ciało znajduje się w stanie **częściowego uplastycznienia** lub w **stanie sprężysto-plastycznym**. **Obszar, w którym zachodzą procesy czynne nazywamy strefą plastyczną**. Obecnie zajmiemy się podstawowymi przypadkami obciążenia prętów litych, w których może dojść do częściowego lub całkowitego uplastycznienia. Nasze rozważania opierać się będą na **modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego bez wzmocnienia**.

6.1 UPLASTYCZNIENIE PRZEKROJU OBCIĄŻONEGO OSIOWO

Rozwiązanie **liniowej teorii sprężystości** dla zagadnienia **czystego rozciągania** pręta przyrównanego utwierdzonego z jednego końca daje nam:

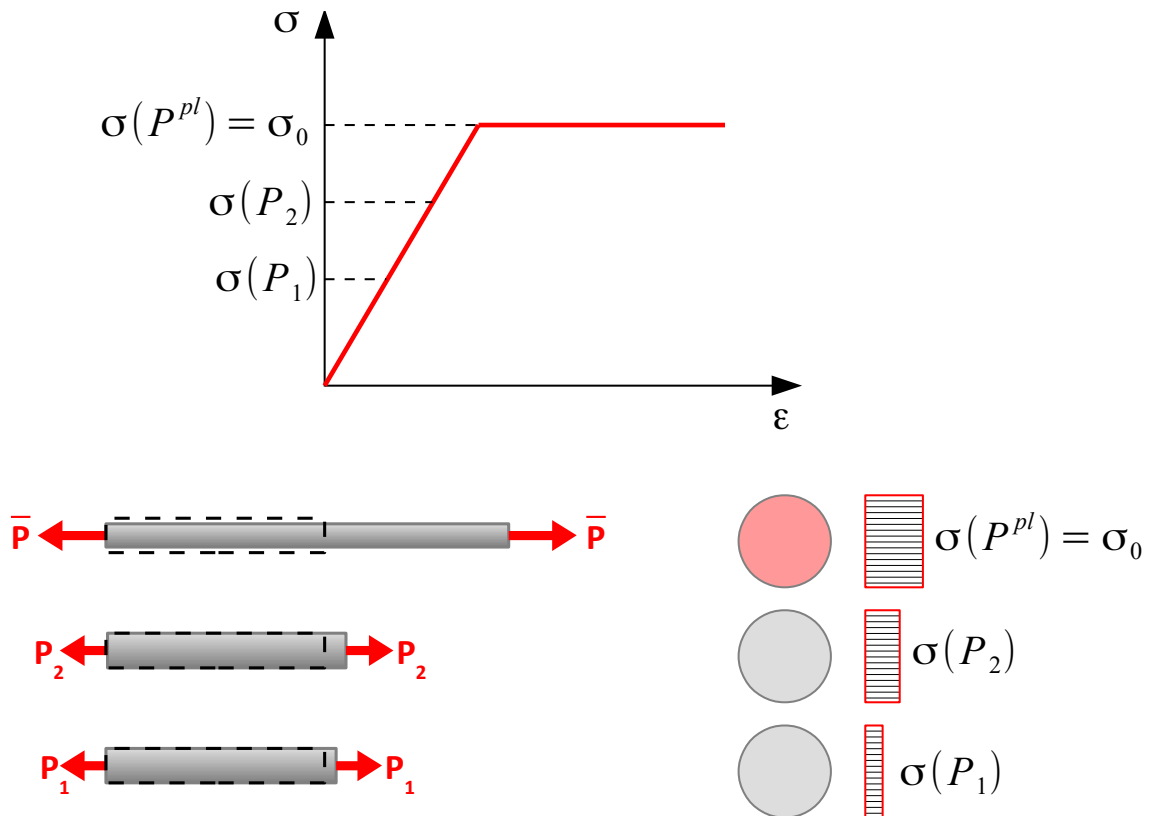
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \frac{P}{A} = \text{const.} \quad (75)$$

gdzie P jest zewnętrzną siłą rozciągającą, A polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta, E to moduł Younga, a ν to współczynnik Poissona. **Stan jednoosiowego rozciągania lub ściskania** zakłada **równomierny rozkład stanu naprężenia w całym przekroju poprzecznym pręta** – jedyną niezerową składową jest składowa normalna na kierunku obciążenia.

Wychodząc z rozwiązania liniowo-sprężystego i zakładając model ciała idealnie sprężysto-plastycznego (bez wzmocnienia), możemy stwierdzić:

- **spełnienie warunku plastyczności następuje jednocześnie we wszystkich punktach przekroju.**
- **Naprężenie normalne** w przekroju w toku postępującego obciążenia **nie przekracza naprężenia granicznego** $\sigma = \sigma_0$ (brak wzmocnienia).
- Największą siłą, jaką można przyłożyć do pręta jest siła odpowiadająca jego **nośności plastycznej** $P^{pl} = \sigma_0 A$. Odształcenie przyrasta do nieskończoności (pręt „płyynie”).

Na ilustracji poniżej kolorem różowym zaznaczono zasięg strefy plastycznej.



Oczywiście w rzeczywistości ostatecznie dojdzie do wzmocnienia lub też materiał ulegnie pęknięciu, jednak ten etap analizy sprężysto-plastycznej w zagadnieniach inżynierskich – podobnie zresztą w pozostałych przypadkach obciążenia – jest pomijany z uwagi na zbyt dużą niepewność modelowania tych zjawisk.

6.2 UPLASTYCZNIENIE PRZEKROJU ZGINANEGO

Rozwiązanie **liniowej teorii sprężystości** dla zagadnienia **czystego zginania** pręta przyrzątkowego utwierdzonego na jednym końcu daje nam:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{M}{I} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{M}{EI} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \frac{M}{EI} \begin{bmatrix} x_1 x_3 \\ -\nu x_2 x_3 \\ \frac{1}{2}(-x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_3^2)) \end{bmatrix}, \quad (76)$$

gdzie M jest wielkością momentu zginającego, I to główny centralny moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi równoległej do wektora momentu zginającego, E to moduł Younga, a ν to współczynnik Poissona. Stan **czystego zginania** zakłada w zakresie **liniowo-sprężystym liniowo zmienny rozkład naprężenia normalnego i odpowiadającego mu odkształcenia liniowego** w całym przekroju poprzecznym pręta.

Wychodząc z tego rozwiązania przyjmiemy, że po uplastycznieniu **rozkład odkształceń nadal będzie liniowy**. Inaczej niż w przypadku stanu jednoosiowego, uplastycznienie zachodzić tu będzie w różnych punktach dla danego poziomu obciążenia. Wyróżnić możemy tutaj dwie sytuacje graniczne:

- **uplastycznienie pierwszego włókna przekroju** – odpowiadać temu będzie wielkość momentu zginającego, który nazwiemy **nośnością sprężystą przekroju zginanego** i oznaczmy M^e
- **uplastycznienie całego przekroju** – odpowiadać temu będzie wielkość momentu zginającego, który nazwiemy **nośnością plastyczną przekroju zginanego** i oznaczmy M^{pl}

Jest jasne, że **uplastycznieniu w pierwszej kolejności ulegną włókna**, w których naprężenie normalne jest największe, tj. **włókna skrajne**. Nośność sprężysta przekroju jest równa:

$$M^e = W \sigma_0 \quad (77)$$

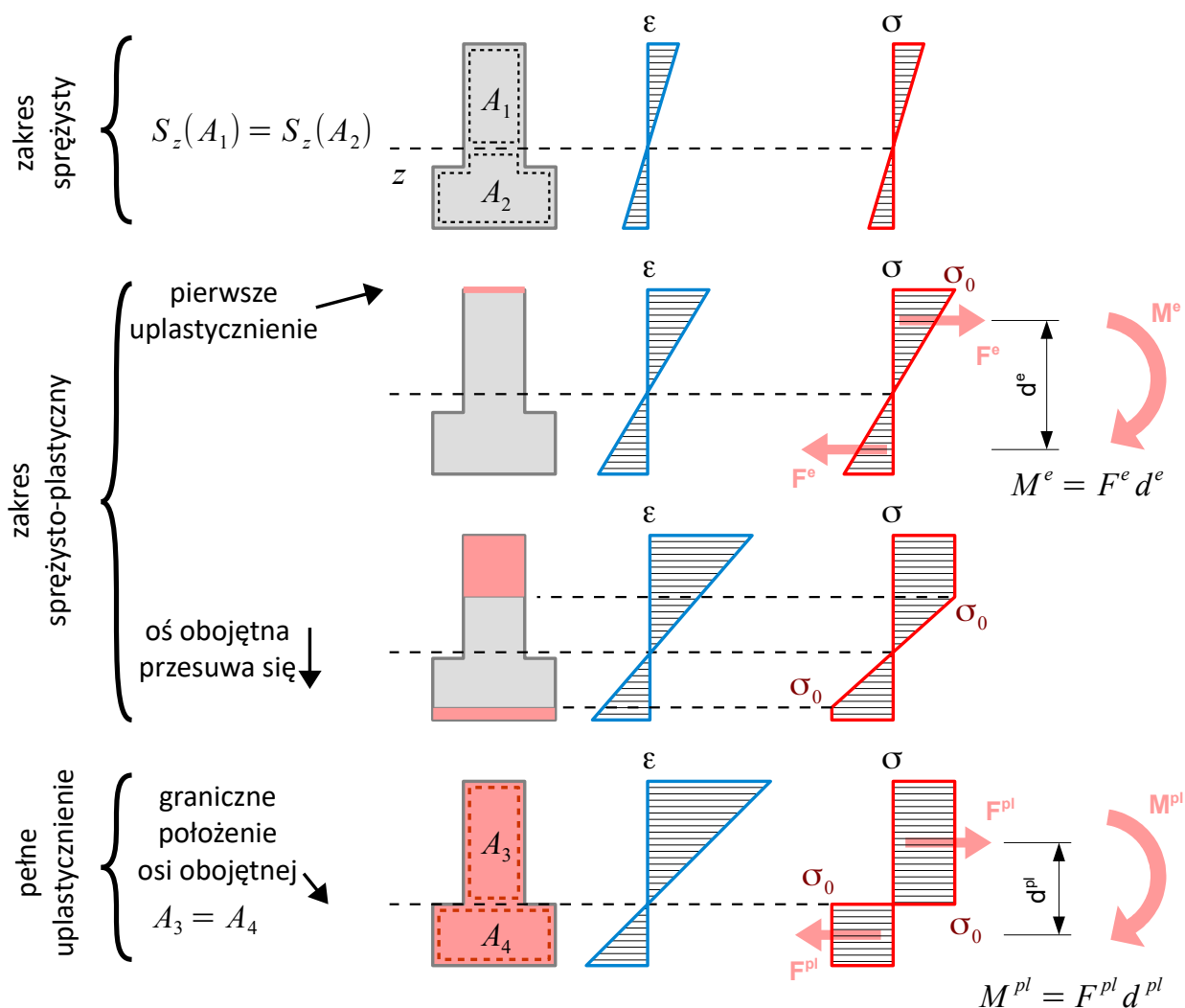
gdzie W jest wskaźnikiem wytrzymałości przy zginaniu.

Strefa plastyczna rozrasta się z dwóch stron w stronę osi obojętnej przy czym **położenie osi obojętnej dla przekrojów niesymetrycznych zmienia się** wraz z postępującym dociążeniem ponad nośność sprężystą.

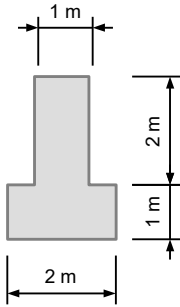
W przypadku skrajnym – **pełnego uplastycznienia przekroju** – warunek równowagi sił wewnętrznych, danych dwoma obszarami stałego naprężenia normalnego (rozciąganie – ściskanie), wymaga, aby oś obojętna znajdowała się w takim miejscu, że **pole powierzchni przekroju ponad osią obojętną w stanie całkowitego uplastycznienia jest takie samo jak pole powierzchni obszaru poniżej tej osi**, inaczej niż w zakresie sprężystym, w którym położenie osi obojętnej wymagało

równości momentów statycznych obszarów po obu jej stronach. Nośność plastyczną wyznaczamy jako moment pary, w której każda z sił tej pary jest sumą układu naprężeń po jednej i po drugiej stronie osi obojętnej, zaś położenie tych sił wyznaczamy w zwykły sposób, za pomocą momentu statycznego.

Na ilustracji poniżej przedstawiono jak zmienia się rozkład odkształceń i naprężeń w przekroju zginanym na różnych etapach obciążenia. Kolorem różowym zaznaczono zasięg strefy plastycznej.



Przykładowo:



Zakres sprężysty:

Pole powierzchni przekroju:

$$A = [2 \cdot 1] + [1 \cdot 2] = 4 \text{ m}^2$$

Moment statyczny względem dolnej krawędzi:

$$S_Y = [2 \cdot 1 \cdot 0,5] + [1 \cdot 2 \cdot 2] = 5 \text{ m}^3$$

Położenie osi obojętnej:

$$Z_O = \frac{S_Y}{A} = 1,25 \text{ m}$$

Centralny moment bezwładności:

$$I_y = \left[\frac{2 \cdot 1^3}{12} + 2 \cdot 1 \cdot (0,5 - 1,25)^2 \right] + \left[\frac{1 \cdot 2^3}{12} + 1 \cdot 2 \cdot (2 - 1,25)^2 \right] = 4,163 \text{ m}^4$$

Odległość włókna skrajnego:

$$z_{max} = 1,75 \text{ m}$$

Wskaźnik wytrzymałości:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = 2,379 \text{ m}^3$$

Nośność sprężysta:

$$M^e = \sigma_0 \cdot W_y = 2,379 \sigma_0$$

Pełne uplastycznienie przekroju:

Położenie osi obojętnej:

$$Z_{O, pl} = 1 \text{ m}$$

Suma układu naprężeń powyżej/poniżej osi obojętnej:

$$F^{pl} = \sigma_0 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \sigma_0$$

Położenie sumy górnego układu:

$$Z_{F, g} = 2 \text{ m}$$

Położenie sumy dolnego układu:

$$Z_{F, d} = 0,5 \text{ m}$$

Ramię pary sił:

$$d^{pl} = Z_{F, g} - Z_{F, d} = 1,5 \text{ m}$$

Nośność plastyczna:

$$M^{pl} = F^{pl} \cdot d^{pl} = 3 \sigma_0$$

Stosunek nośności plastycznej i sprężystej:

$$\frac{M^{pl}}{M^e} = 1,261$$

Na przykładzie przekroju zginanego w prosty sposób można zilustrować takie zagadnienia jak trwałość odkształceń plastycznych, sprężysty charakter odciążenia, obecność naprężeń resztkowych. Dla prostoty rozważmy przekrój prostokątny. Niech punkt O oznacza położenie osi obojętnej, punkt A – położenie granicy strefy plastycznej, punkt B – włókna skrajne. Niech przekrój obciążony będzie momentem M_1 , który skutkuje uplastycznieniem obejmującym łącznie jedną trzecią wysokości przekroju. Wartość tego momentu jest równa:

$$M_1 = 2 \left[\left(\sigma_0 \cdot b \cdot \frac{h}{6} \cdot \left(\frac{h}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{6} \right) \right) + \frac{1}{2} \sigma_0 \cdot b \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{3} \right] = \frac{23}{108} b h^2 \sigma_0 \approx 0,213 b h^2 \sigma_0$$

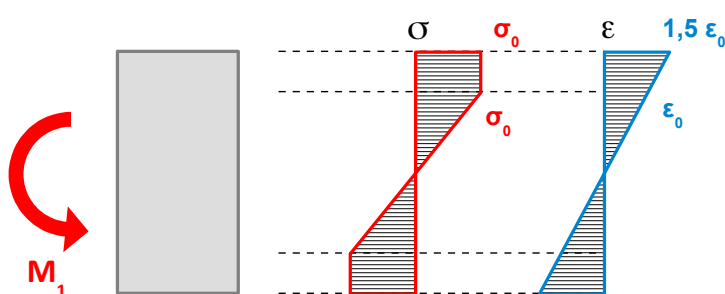
Nośność sprężysta przekroju: $M^e = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_0 \approx 0,167 b h^2 \sigma_0$

Nośność plastyczna przekroju: $M^{pl} = \frac{1}{4} b h^2 \sigma_0 \approx 0,250 b h^2 \sigma_0$

$M^e < M_1 < M^{pl} \Rightarrow$ zakres sprężysto-plastyczny.

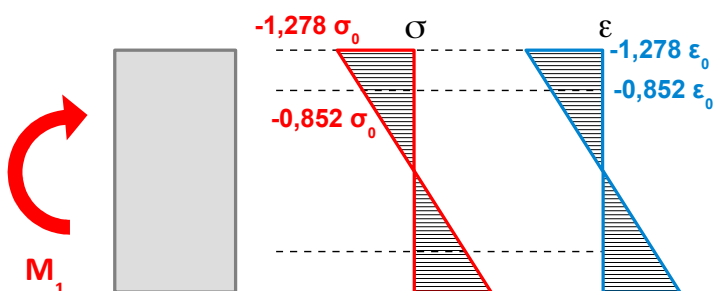
Naprężenia i odkształcenia po obciążeniu w punktach O, A, B:

$$\begin{aligned} \sigma_O &= 0 & \varepsilon_O &= 0 \\ \sigma_A &= \sigma_0 & \varepsilon_A &= \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \\ \sigma_B &= \sigma_0 & \varepsilon_B &= \frac{z_B}{z_A} \varepsilon_A = 1,5 \frac{\sigma_0}{E} \end{aligned}$$



Następnie odciążymy ten przekrój, tj obciążymy go momentem zginającym o tej samej wartości lecz przeciwnym zwrocie, pamiętając przy tym, że **odciążenie ma charakter sprężysty**, zatem **odpowiadający mu rozkład naprężeń i odkształceń jest w całości liniowy**. Dodatkowe naprężenia i odkształcenia od odciążenia w punktach O, A, B:

$$\begin{aligned} \sigma_O &= 0 & \varepsilon_O &= -\frac{M_1}{EI} z_O = 0 \\ \sigma_A &= -\frac{M_1}{I} z_A = -0,852 \sigma_0 & \varepsilon_A &= -\frac{M_1}{EI} z_A \approx -0,852 \frac{\sigma_0}{E} \\ \sigma_B &= -\frac{M_1}{I} z_B = -1,278 \sigma_0 & \varepsilon_B &= -\frac{M_1}{EI} z_B \approx -1,278 \frac{\sigma_0}{E} \end{aligned}$$



Naprężenia i odkształcenia po odciążeniu w punktach O, A, B:

$$\sigma_O = 0 - 0 = 0$$

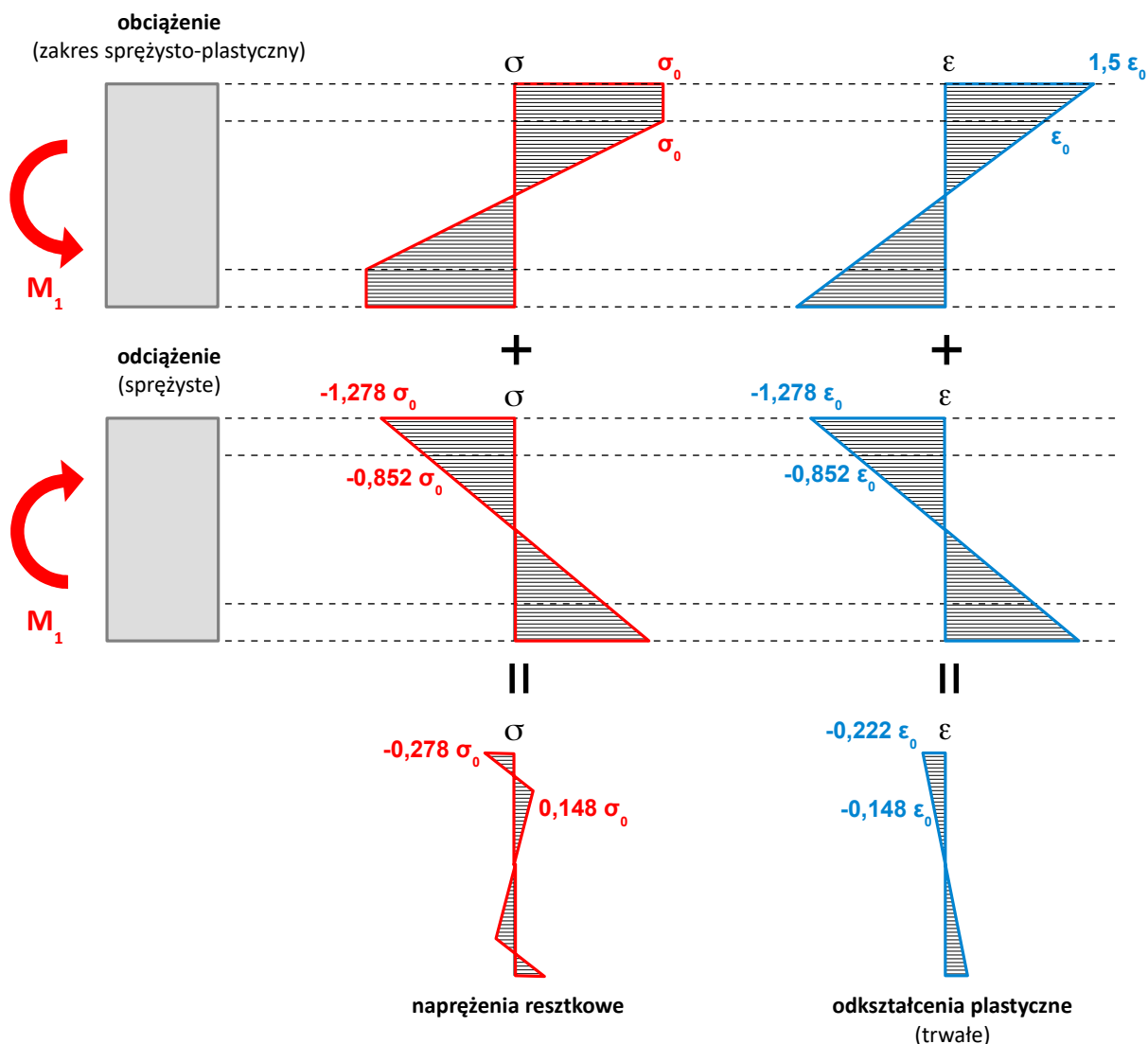
$$\varepsilon_O = 0 - 0 = 0$$

$$\sigma_A = \sigma_0 - \frac{M_1}{I} z_A \approx 0,148 \sigma_0$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_0 - \frac{M_1}{EI} z_A \approx 0,148 \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\sigma_B = \sigma_0 - \frac{M_1}{I} z_B \approx -0,278 \sigma_0$$

$$\varepsilon_B = 1,5 \varepsilon_0 - \frac{M_1}{EI} z_B \approx 0,222 \frac{\sigma_0}{E}$$



Można zauważyć, że z uwagi na symetrię **układ naprężeń resztkowych jest w równowadze**, a zatem przekrój w istocie nie jest obciążony. Jednocześnie widzimy, że po odciążeniu przekroju pozostał pewien liniowy rozkład odkształceń, który odpowiada trwałej (plastycznej) krzywiznie wygiętego pręta. Ponowne obciążenie przekroju ma charakter sprężysty, o ile tylko moment zginający nie przekroczy M_1 . Po powtórny przyłożeniu momentu M_1 stan naprężenia i odkształcenia jest taki, jak po pierwszym jego przyłożeniu.

6.2.1 KLASY PRZEKROJÓW STALOWYCH

Normy do projektowania konstrukcji stalowych wyróżniają 4 klasy przekrojów stalowych, z uwagi na ich zdolność do odkształcenia plastycznego:

- **KLASA 1** – przekrój może osiągnąć swoją **nośność plastyczną** a po całkowitym uplastycznieniu danego przekroju zachowuje swobodę deformacji, przez co **możliwe jest ukształtowanie przegubu plastycznego**. W przypadku układów statycznie niewyznaczalnych obecność takiego przegubu powoduje zmianę schematu statycznego układu, co z kolei prowadzi do zmiany rozkładu sił wewnętrznych (**redystrybucja sił wewnętrznych**). W konsekwencji układ może (jako całość) wykazać większą nośność, niż wynikałoby to z nośności jego przekroju. Dopiero utrata stateczności układu wskutek powstania zbyt dużej liczby przegubów plastycznych określa całkowitą nośność plastyczną układu.
- **KLASA 2** – przekrój może osiągnąć swoją **nośność plastyczną**, jednak ma ograniczoną możliwość deformacji, stąd nie dopuszcza się w takim przypadku założenia, że w przekroju całkowicie uplastycznym powstaje przegub plastyczny.
- **KLASA 3** – przekrój może osiągnąć swoją **nośność sprężystą**, tj. nośność przekroju ograniczona jest tylko do momentu uplastycznienia pierwszego włókna przekroju.
- **KLASA 4** – przekrój **lokalnie traci stateczność** z uwagi na zbyt dużą smukłość jego elementów składowych (np. wyboczenie środnika lub półki ściskanej) **zanim jeszcze uplastycznieniu ulegnie pierwsze włókno tego przekroju**.

6.3 UPLASTYCZNIENIE PRZEKROJU SKRĘCANEGO

Rozwiązanie **liniowej teorii sprężystości** dla zagadnienia **czystego, swobodnego skręcania** pręta pryzmatycznego utwierdzonego na jednym końcu daje nam:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Theta G \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_3\right) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_2\right) \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\Theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_3\right) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} + x_2\right) \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \Theta \begin{bmatrix} \psi(x_1, x_2) \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad (78)$$

gdzie Θ jest jednostkowym kątem skręcenia, G to moduł Kirchhoffa, a funkcja ψ nazywana funkcją spaczenia opisuje deplanację przekroju poprzecznego. Jednym ze sposobów opisu zagadnienia czystego skręcania jest wprowadzenie **funkcji naprężeń Prandtla** ϕ , takiej że:

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{31} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad (79)$$

Łatwo sprawdzić, że dla przyjętego stanu naprężenia wyrażenie jego składowych za pomocą funkcji naprężeń Prandtla gwarantuje automatyczne spełnienie wszystkich równań równowagi. Jednym warunkiem, który musiałby być ponadto spełniony jest warunek zgodności odkształceń. Warunek taki możemy uzyskać obliczając wyrażenie:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} = \Theta G \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} + 1 \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_3} - 1 \right) \right] = 2 \Theta G \quad (80)$$

Uwzględniając zależność składowych stanu naprężenia od funkcji naprężenia, możemy napisać:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \phi^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \phi^2}{\partial x_3^2} = -2 G \Theta \quad (81)$$

a zatem **funkcja naprężeń Prandtla** ϕ , która gwarantuje spełnienie równań równowagi oraz warunków zgodności odkształceń, **spełnia równanie Poissona**.

Pochodna kierunkowa ϕ **jest równa naprężeniu stycznemu na kierunku prostopadłym do kierunku, dla którego wyznacza się pochodną**. Statyczny warunek brzegowy dla pręta skręcanego wymaga, aby **naprężenie styczne na kierunku normalnym do konturu przekroju było zerowe**, co wymaga zerowania się pochodnej kierunkowej na kierunku stycznym do tego konturu – warunek ten spełniony jest wtedy, gdy **funkcja ϕ przyjmuje na całym konturze wartość stałą**, np. 0. Równanie powyższe wraz z warunkiem brzegowym $\phi=0$ na brzegu przekroju poprzecznego pozwala wyznaczyć ϕ w sposób jednoznaczny, a to z kolei pozwala wyznaczyć rozkład naprężeń w pręcie skręcanym.

Równanie powyższe opisuje równocześnie inne zagadnienie mechaniki – **deformację wiotkiej membrany** czy też błony utwierdzonej na brzegu o kształcie konturu rozważanego

przekroju poprzecznego i obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem. Jeśli sztywność membrany określona jest parametrem D , a jej obciążenie oznaczymy przez q , to równanie, które spełnia funkcja opisująca ugięcie membrany w , ma postać:

$$\nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad (82)$$

Gdyby zatem funkcję ϕ interpretować jako rozkład ugięcia membrany, to jej pochodna cząstkowa względem x_2, x_3 , tj. **tangens kąta nachylenia zdeformowanej membrany na kierunku x_2, x_3 w danym punkcie jest miarą odpowiedniego naprężenia stycznego** w tym punkcie przekroju. To spostrzeżenie nazywa się niekiedy **analogią membrany Prandtla**. Aby wyznaczyć teraz moment odpowiadający ciągłemu układowi naprężeń stycznych, należy obliczyć całkę:

$$M = \iint_A (\sigma_{12}x_3 - \sigma_{31}x_2) dA = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \right) dA \quad (83)$$

Całkę powyższą możemy scałkować przez części:

$$M = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} x_3 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_2 \right) dA = \oint_{\partial A} [\phi(x_2 n_2 + x_3 n_3)] dA - \iint_A \phi \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3) \right] dA \quad (84)$$

gdzie $\mathbf{n} = [n_2, n_3]$ jest normalną zewnętrzną do brzegu. Ponieważ na całym brzegu ∂A funkcja $\phi=0$, zatem całka po konturze jest tożsamościowo równa 0. Mamy zatem:

$$M = -2 \iint_A \phi dA$$

Całka po prawej stronie jest objętością bryły zawartej między płaszczyzną (x_2, x_3) a powierzchnią daną funkcją ϕ . A zatem **objętość bryły zawartej między płaszczyzną przekroju a powierzchnią zdeformowanej membrany jest miarą momentu skręcającego**:

$$M = 2V \quad (85)$$

W stanie granicznym (uplastycznienia pierwszego włókna) jest on równy nośności sprężystej przekroju. Rozważmy teraz sytuację, w której **moment skręcający przekracza nośność sprężystą przekroju** i założmy, że przekroju tym jedynymi naprężeniami różnymi od 0 są właśnie naprężenia styczne. Zakładając, że materiał nie wykazuje wzmocnienia **wypadkowe naprężenie styczne w strefie plastycznej** przyjmuje wartość graniczną τ_0 , która dla materiału bez wzmocnienia jest stała, tj.:

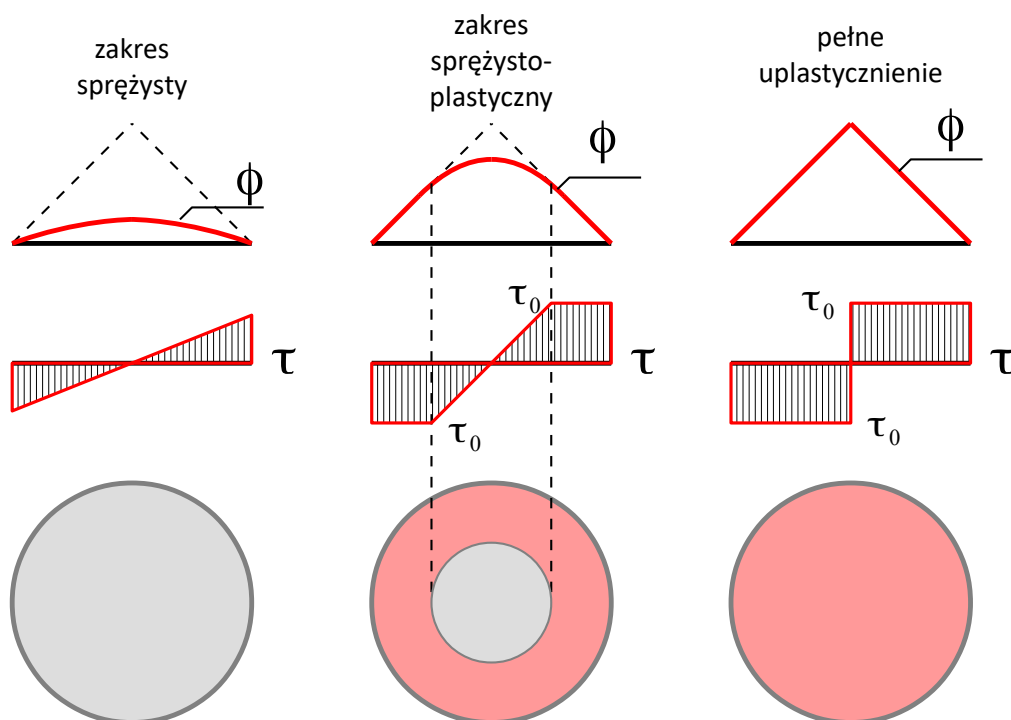
$$\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2} = \tau_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)^2 = |\text{grad } \phi|^2 = \tau_0^2 = \text{const.} \quad , \quad (86)$$

Wracając do analogii membrany równanie powyższe można interpretować następująco: **maksymalny kąt nachylenia membrany** (długość wektora gradientu zdeformowanej powierzchni) **w obszarze odpowiadającym strefie plastycznej musi być stały**, równy α , gdzie kąt ten odpowiada granicznemu uplastyczniającemu naprężeniu stycznemu τ_0 :

$$\tau_0^2 = \text{tg}^2 \alpha = \text{const.} \quad (87)$$

W strefie odkształceń sprężystych nadal obowiązuje równanie (82), a kąt nachylenia jest mniejszy niż stała wartość odpowiadająca τ_0 . Możemy więc rozszerzyć analogię membrany w taki sposób, że **nad obszarem odpowiadającym strefie plastycznej rozpinamy nad membraną nieskończenie sztywny dach o nachyleniu τ_0** . Membrana odkształcając się pod wpływem ciśnienia w obszarach odpowiadających deformacji sprężystej odkształcać się może swobodnie – w obszarach odpowiadających deformacji plastycznej przylega ściśle do dachu. Spostrzeżenie to nosi nazwę **analogii dachu Nádaia**. Objętość bryły zawartej pod membraną jest miarą momentu skręcającego.

W przypadku pełnego uplastycznienia membrana ściśle przylega do dachu nad całym przekrojem i nośność plastyczną przekroju obliczamy na podstawie objętości zawartej pod dachem. Dach wychodzi z konturu przekroju i nachylony jest pod stałym kątem do płaszczyzny przekroju – **taki sam kształt przyjmuje materiał idealnie sypki** (bez kohezji) o ustalonym kącie tarcia wewnętrznego, **sypany równomiernie na całą powierzchnię przekroju**. Są to tzw. **powierzchnie równego spadku**. Objętość usypanego stosu jest zatem miarą nośności plastycznej przekroju – spostrzeżenie to nosi nazwę **analogii wzgórza piaskowego Nádaia**. Na ilustracji poniżej przedstawiono charakter rozkładu naprężeń stycznych w kołowym przekroju skręcanym na różnych etapach obciążenia – kolorem różowym zaznaczono zasięg strefy plastycznej.

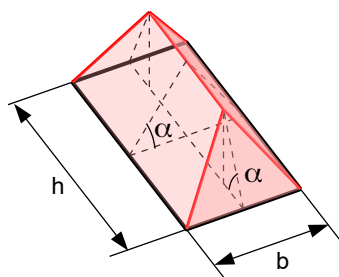


Analogia Sadovsky'ego stanowi uogólnienie analogii wzgórza piaskowego Nádai'a na przypadek skręcania przekrojów wielospójnych (z otworami). Metoda wyznaczania nośności plastycznej na skręcanie dla takich przekrojów jest następująca:

- sypimy wzgórze piaskowe na obszar o kształcie odpowiadającym kształtowi przekroju poprzecznego pręta, przy czym w miejscu występowania otworu umieszczamy wysoką rurę o przekroju poprzecznym odpowiadającym kształtowi otworu. Z uwagi na obecność rury piasek nie wsypuje się do środka, tylko opływa rurę z boków.
- Po nasypaniu wzgórza piaskowego na tak przygotowany obszar zaczynamy opuszczać rurę, tak że przez jej krawędź piasek zaczyna wsypywać się do jej środka. Obniżamy rurę aż do momentu, gdy piasek zsypuje się wzdłuż całego brzegu rury.
- Nośność plastyczna przekroju na skręcanie odpowiada objętości wzgórza piaskowego usypanego na przekroju wokół rury powiększonej o objętość wnętrza tej części rury, która zawarta jest między płaszczyzną przekroju, a krawędzią, przez którą zsypywał się piasek.

Przykładowo:

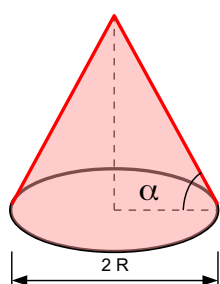
- **nośność plastyczna przekroju prostokątnego przy skręcaniu**



Objętość:
$$V = \frac{1}{12} b^2 (3h - b) \operatorname{tg} \alpha$$

Nośność plastyczna:
$$M^{pl} = \frac{1}{6} b^2 (3h - b) \tau_0$$

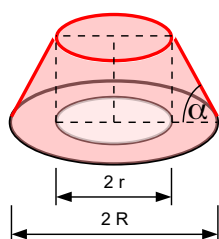
- **nośność plastyczna przekroju kołowego przy skręcaniu**



Objętość:
$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$$

Nośność plastyczna:
$$M^{pl} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_0$$

- **nośność plastyczna przekroju rurowego przy skręcaniu**



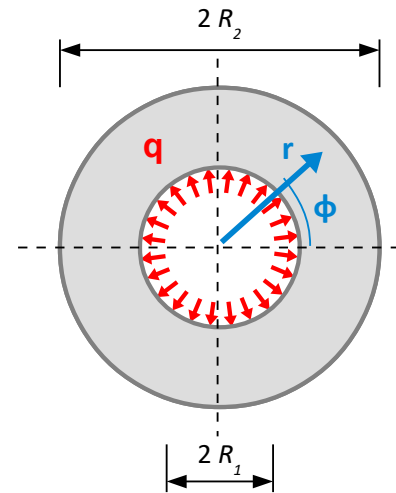
Objętość:
$$V = \frac{1}{3} \pi (R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha$$

Nośność plastyczna:
$$M^{pl} = \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3) \tau_0$$

6.4 UPLASTYCZNIENIE RURY GRUBOŚCIENNEJ OBCIĄŻONEJ CIŚNIENIEM WEWNĘTRZNYM

Rozwiązanie **liniowej teorii sprężystości** dla zagadnienia rury grubościennej, o promieniu wewnętrznym R_1 i promieniu zewnętrznym R_2 , obciążonej jednorodnym ciśnieniem wewnętrznym q daje nam (we współrzędnych biegunowych):

$$\begin{aligned}
 u_r(r) &= C_1 r + \frac{C_2}{r} \\
 \varepsilon_{rr}^e(r) &= C_1 - \frac{C_2}{r^2}, \quad \varepsilon_{\phi\phi}^e(r) = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \\
 \sigma_{rr}(r) &= 2C_1(G + \lambda) - \frac{2C_2G}{r^2} \\
 \sigma_{\phi\phi}(r) &= 2C_1(G + \lambda) + \frac{2C_2G}{r^2}
 \end{aligned} \tag{88}$$



$$\text{gdzie: } C_1 = \frac{q R_1^2}{(2G + \lambda)(R_2^2 - R_1^2)}, \quad C_2 = \frac{q R_1^2 R_2^2}{2G(R_2^2 - R_1^2)} \tag{89}$$

G to moduł Kirchhoffa, λ to parametr Lamego. Zakładamy, że rura ma pełną swobodę odkształcania się wzdłuż swojej osi, tj. $\sigma_{zz} = 0$. Rozważmy przypadek, w którym ciśnienie wewnętrzne prowadzi do uplastycznienia materiału. **Charakter rozwiązania w strefie odkształceń sprężystych będzie identyczny.** Zapiszmy wyrażenia na rozkład naprężeń:

$$\sigma_{rr}^I(r) = D_1 - \frac{D_2}{r^2}, \quad \sigma_{\phi\phi}^I(r) = D_1 + \frac{D_2}{r^2} \tag{90}$$

przy czym górny indeks I oznaczać będzie strefę odkształceń sprężystych, indeks II natomiast – strefę plastyczną.

Zmieniają się jednak stałe całkowania, ponieważ zmienią ulegną warunki brzegowe:

- Warunek brzegowy dla powierzchni swobodnej pozostanie bez zmian $\sigma_{rr}^I(R_2) = 0$.
- Kolejnym warunkiem będzie warunek ciągłości naprężeń radialnych na granicy strefy plastycznej: $\sigma_{rr}^{II}(R_{pl}) = \sigma_{rr}^I(R_{pl})$
- Drugi z warunków zszycia na granicy strefy plastycznej, ciągłość naprężeń stycznych, jest spełniony wobec faktu, że $\sigma_{r\phi} = 0$.
- Warunek brzegowy na powierzchni wewnętrznej $\sigma_{rr}^{II}(R_1) = -q$ służyć będzie wyznaczeniu rozkładu naprężeń w strefie plastycznej.

Inaczej niż w uprzednio omawianych przypadkach, stan naprężenia jest teraz bardziej złożony i konieczne jest określenie warunku plastyczności, dla którego prowadzimy analizę. Niech będzie to **warunek Coulomba-Tresci-Guesta**. Ponieważ **składowe σ_{rr} oraz $\sigma_{\phi\phi}$** są jedynymi niezerowymi składowymi tensora naprężenia są zatem **naprężeniami głównymi** a **ich różnica jest maksymalnym naprężeniem stycznym**:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr}}{2} = \frac{4C_2G}{r^2} \quad (91)$$

Wyrażenie powyższe przyjmuje największą wartość dla najmniejszego r , zatem **uplastycznienie rozpocznie się od powierzchni wewnętrznej**. Minimalna wartość ciśnienia wewnętrznego, która skutkuje uplastycznieniem jest równa:

$$2\tau_{max} = \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} = \frac{4GC_2}{R_1^2} = \frac{2q_0R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)} = \sigma_0 \Rightarrow q_0 = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right)$$

Granice strefy plastycznej wyznaczamy z warunku:

$$2\tau_{max}^I(R_{pl}) = \sigma_{\phi\phi}^I(R_{pl}) - \sigma_{rr}^I(R_{pl}) = \frac{2D_2}{R_{pl}^2} = \sigma_0$$

co daje nam:

$$R_{pl} = \sqrt{\frac{2D_2}{\sigma_0}} \Leftrightarrow D_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 R_{pl}^2 \quad (92)$$

Dla materiału bez wzmocnienia w każdym punkcie strefy plastycznej musi być spełniony warunek:

$$2\tau_{max}^{II} = \sigma_0 \Rightarrow \sigma_{\phi\phi}^{II} - \sigma_{rr}^{II} = \sigma_0 \quad (93)$$

Równanie równowagi dla zagadnienia osiowosymetrycznego (zarówno w strefie plastycznej jak i w strefie odkształceń sprężystych) ma postać:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0 \quad (94)$$

co po uwzględnieniu ograniczenia (93) daje nam **równanie równowagi w strefie plastycznej**:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{II}}{\partial r} = \frac{\sigma_0}{r} \quad (95)$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest rozkład naprężeń radialnych:

$$\sigma_{rr}^{\prime\prime} = \sigma_0 \ln r + D_3 \quad (96)$$

Ze związku (93) wyznaczamy naprężenia obwodowe:

$$\sigma_{\phi\phi}^{\prime\prime} = \sigma_0 + \sigma_{rr} = \sigma_0(1 + \ln r) + D_3 \quad (97)$$

Stałe całkowania D_1, D_2, D_3 wyznaczmy z warunków brzegowych:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{\prime}(R_2) = 0 & \Rightarrow D_1 - \frac{D_2}{R_2^2} = 0 \\ \sigma_{rr}^{\prime\prime}(R_1) = -q & \Rightarrow D_3 + \sigma_0 \ln R_1 = -q \\ \sigma_{rr}^{\prime}(R_{pl}) - \sigma_{rr}^{\prime\prime}(R_{pl}) = 0 & \Rightarrow D_1 - \frac{\sigma_0}{2} - D_3 - \sigma_0 \ln R_{pl} = 0 \end{cases} \quad (98)$$

Uwzględniając związek (92) mamy:

$$D_1 = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} ,$$

skąd:

$$\boxed{\sigma_{rr}^{\prime}(r) = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) \quad \sigma_{\phi\phi}^{\prime}(r) = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right)} \quad (99)$$

Z warunku równości naprężeń radialnych na granicy strefy plastycznej mamy wtedy:

$$\frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_{pl}^2}\right) = D_3 + \sigma_0 \ln R_{pl} \Rightarrow D_3 = \frac{\sigma_0 R_{pl}^2}{2 R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_{pl}^2}\right) - \sigma_0 \ln R_{pl}$$

co daje nam:

$$\boxed{\sigma_{rr}^{\prime\prime} = \sigma_0 \left[\frac{R_{pl}^2}{2 R_2^2} - \frac{1}{2} - \ln \frac{R_{pl}}{r} \right] \quad \sigma_{\phi\phi}^{\prime\prime} = \sigma_0 \left[\frac{R_{pl}^2}{2 R_2^2} + \frac{1}{2} - \ln \frac{R_{pl}}{r} \right]} \quad (100)$$

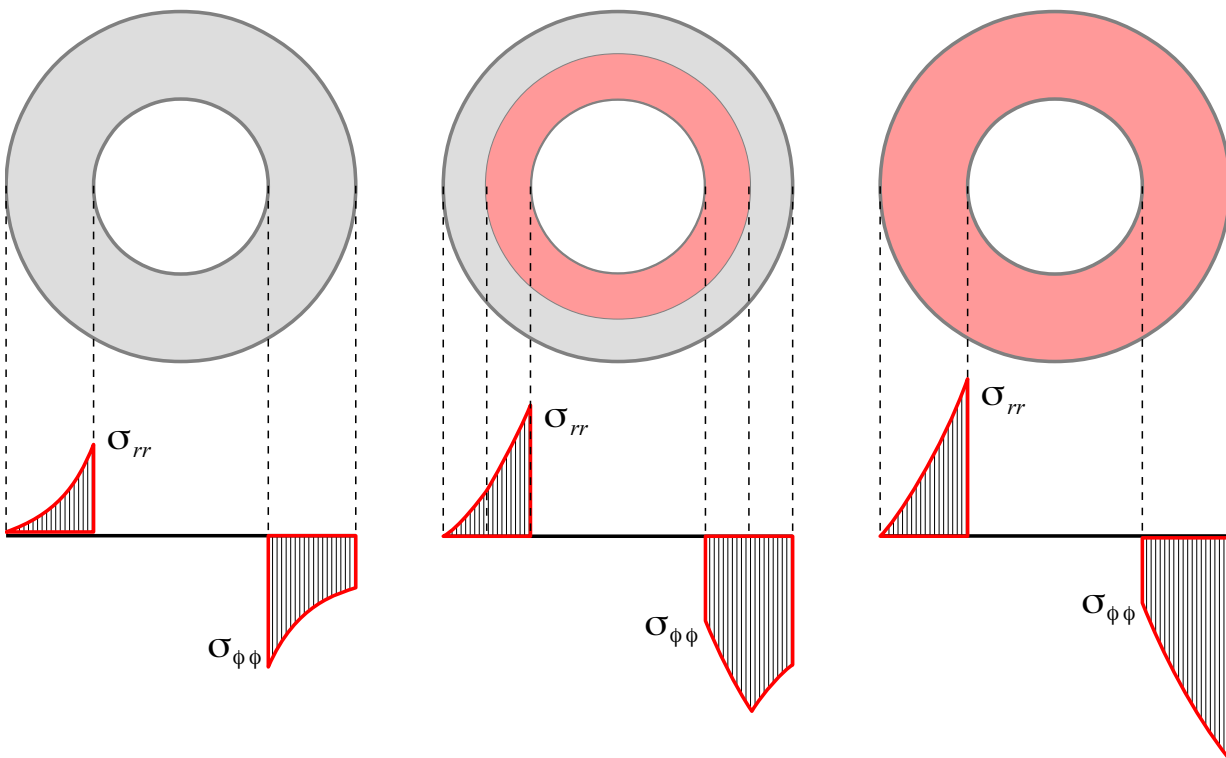
Łatwo zauważyć, że w takiej sytuacji również rozkład naprężeń obwodowych jest ciągły na granicy strefy plastycznej. W uzyskanym rozwiązaniu występuje parametr R_{pl} , który do tej pory nie został wyznaczony. Wyznamy go z warunku brzegowego na wewnętrznej powierzchni rury:

$$\sigma_{rr}^{\prime\prime}(R_1) = -q \Rightarrow \ln \frac{R_{pl}}{R_1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_{pl}^2}{R_2^2}\right) = \frac{q}{\sigma_0}$$

Równanie powyższe jest równaniem nieliniowym z uwagi na R_{pl} i musi być rozwiązane numerycznie. Rozwiązanie zależy będzie od stosunku $\beta = R_1/R_2$ oraz od stosunku $\gamma = q/\sigma_0$. Parametr $\beta \in (0; 1)$. Minimalną wartością parametru γ , dla którego zachodzi uplastycznienie jest wartość odpowiadająca ciśnieniu uplastyczniającemu q_0 , zaś wartość maksymalna γ_{max} odpowiada sytuacji, gdy $R_{pl} = R_2$:

$$\gamma_{min} = \frac{q_0}{\sigma_0} = \frac{1}{2}(1-\beta^2) \quad \gamma_{max} = \ln \frac{1}{\beta}$$

Na ilustracji poniżej przedstawiono charakter rozkładu naprężeń radialnych i obwodowych w rurze grubościennej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym na różnych etapach obciążenia – kolorem różowym zaznaczono zasięg strefy plastycznej.



7. NOŚNOŚĆ PLASTYCZNA UKŁADU KONSTRUKCYJNEGO

Uplastycznienie w punkcie a nawet uplastycznienie całego przekroju poprzecznego jednego z elementów konstrukcji prętowej nawet w przypadku materiału bez wzmocnienia (czyli przy całkowitej swobodzie deformacji po uplastycznieniu) nie musi oznaczać zamiany konstrukcji w mechanizm, tj. utratą stateczności całego układu. **W przypadku układów statycznie niewyznaczalnych schemat konstrukcji i podparcia może nadal gwarantować geometryczną niezmiennność układu nawet po uplastycznieniu fragmentu konstrukcji** – jednego lub kilku przekrojów – i układ nadal może przenosić obciążenie. Maksymalne obciążenie, jakie może przenieść układ zanim zamieni się w mechanizm wskutek uplastycznienia odpowiednio dużej liczby przekrojów, nazywamy **nośnością plastyczną konstrukcji** i niejednokrotnie jest ona wyższa od nośności plastycznej przekroju. Należy jednak zwrócić uwagę, że pomimo geometrycznej niezmienności konstrukcja może nie spełniać np. warunków użyteczności wskutek nadmiernych jej odkształceń.

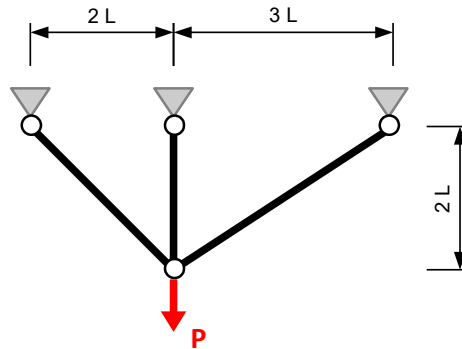
Stosuje się dwa podejścia do wyznaczania nośności plastycznej układu konstrukcyjnego:

- **analiza sprężysto-plastyczna** – wymaga ona analizy kolejnych etapów obciążenia konstrukcji oraz wyznaczenia strefy uplastycznienia. Daje ona pełną informację o całym przebiegu obciążenia bywa jednak bardzo uciążliwa z matematycznego punktu widzenia.
- **wyznaczenie nośności plastycznej poprzez obustronne oszacowania** – podejście to, bazujące na założeniu, że układ jest **sztywno-idealnie plastyczny (bez wzmocnienia)**, wykorzystuje dwa twierdzenia o oszacowaniu dolnym i oszacowaniu górnym nośności plastycznej. Podejście to pozwala wyznaczyć jedynie warunki występowania stanu granicznego i nie udziela żadnych informacji na temat stanu konstrukcji w zakresie częściowego uplastycznienia.

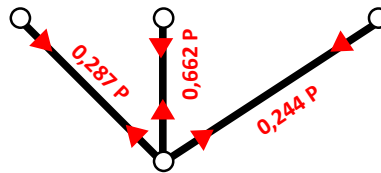
7.1 ANALIZA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA

PRZYKŁAD 1

Rozważmy prosty układ kratowy, jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.



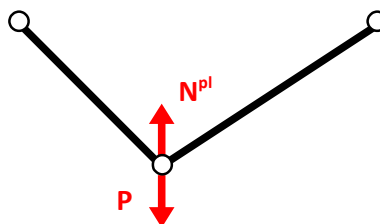
Naszym zadaniem jest wyznaczenie maksymalnej wartości parametru obciążenia P , dla której układ powyższy zamieni się w mechanizm. Przeprowadzimy analizę sprężysto-plastyczną. Na początku układ pracuje w całości w zakresie sprężystym – aby wyznaczyć siły przekrojowe, konieczne jest rozwiązanie zadania statycznie niewyznaczalnego:



Największa siła obecna jest w pręcie środkowym – to on najwcześniej ulegnie uplastycznieniu. Stanie się to dla wartości parametru obciążenia:

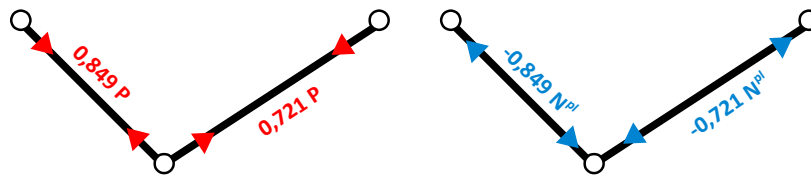
$$0,662 P = N^{pl} = \sigma_0 A \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = 1,511 N^{pl}$$

Pręt uplastyczniony może odkształcać się już bez ograniczeń (płynięcie plastyczne) a siła w tym pręcie jest cały czas równa N^{pl} . Sytuację tę możemy odwzorować w naszym modelu zastępując pręt układem dwóch przeciwnych sił N^{pl} przyłożonych w węzłach końcowych tego pręta.



Układ powyższy w dalszym ciągu jest układem geometrycznie niezmiennym. Wyznamy siły przekrojowe w tym nowym układzie. Możemy skorzystać w tym celu z zasady superpozycji,

osobno wyznaczając siły przekrojowe od obciążenia zewnętrznego oraz od siły zastępującej uplastyczniony pręt i dodając je do siebie.



Musimy obecnie sprawdzić, dla jakiej wartości parametru P siła w poszczególnych prętach osiągnie wartość N^{pl} .

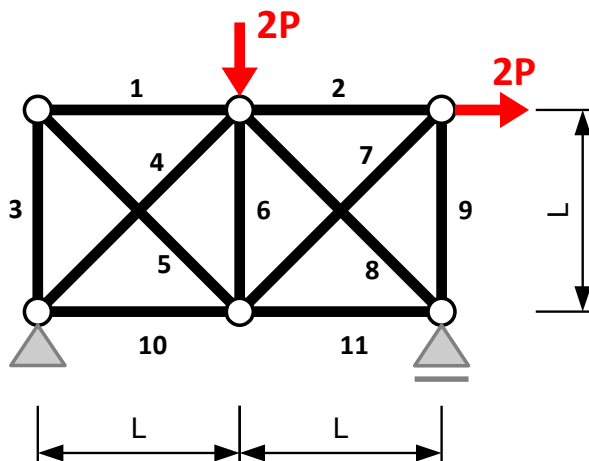
Pręt	Siła w pręcie N_i	$P: N_i = N^{pl}$
1	$0,849 P - 0,849 N^{pl}$	$2,178 N^{pl}$
3	$0,721 P - 0,721 N^{pl}$	$2,387 N^{pl}$

A zatem kolejnym prętem, który ulegnie uplastycznieniu jest pręt nr 1. Podsumowując:

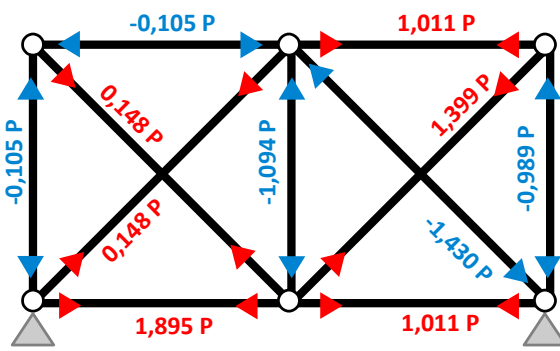
- dla $\bar{P} = \bar{P} = 1,511 \sigma_0 A$ **uplastycznieniu ulegnie pierwszy pręt** – pręt nr 2. Układ nadal jest geometrycznie niezmienny. Odpowiadająca tej sytuacji wielkość obciążenia stanowi **graniczną nośność sprężystą** (uplastycznienie pierwszego punktu) oraz **graniczną nośność plastyczną** (uplastycznienie pierwszego przekroju) **układu**.
- dla $P^* = 2,178 \sigma_0 A$ uplastycznieniu ulegnie kolejny pręt – pręt nr 1. **Układ zamienia się w mechanizm**. Odpowiadająca tej sytuacji wielkość obciążenia stanowi **nośność graniczną układu**.

PRZYKŁAD 2

Rozważmy kratownicę dwukrotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalną, w której wszystkie pręty mają ten sam przekrój poprzeczny



Naszym zadaniem jest wyznaczenie takiej wartości parametru obciążenia P , dla której układ powyższy zamieni się w mechanizm. Przeprowadzimy analizę sprężysto-plastyczną. Na początku układ pracuje w całości w zakresie sprężystym – aby wyznaczyć siły przekrojowe, konieczne jest rozwiązanie zadania statycznie niewyznaczalnego:

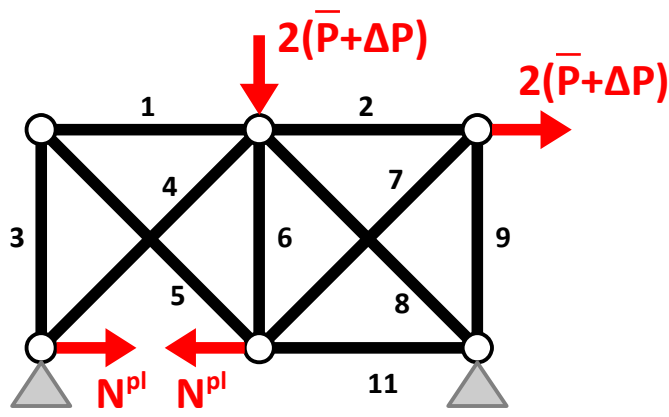


Widzimy, że największa siła osiowa pojawi się w pręcie 10 – tam najpierw dojdzie do uplastycznienia. **W wyniku uplastycznienia w pręcie tym pojawi się siła $N^{pl} = \sigma_0 A$** i wartość ta już się nie zmieni w toku dalszego dociążania konstrukcji (brak wzmocnienia). Uplastycznienie nastąpi, gdy parametr obciążenia przyjmie wartość:

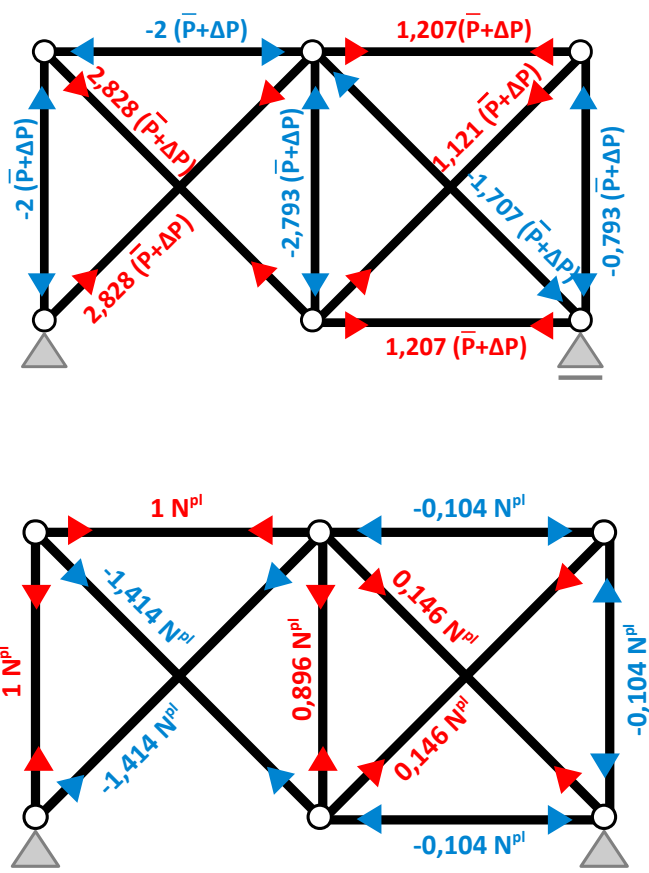
$$1,895 P = \sigma_0 A \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = 0,528 N^{pl}$$

Należy pamiętać, że zniszczenie konstrukcji może nastąpić już wcześniej wskutek wyboczenia smukłych prętów ściskanych.

Zastępujemy pręt 10 układem dwóch przeciwnych sił N^{pl} przyłożonych w węzłach końcowych tego pręta – jest to siła rozciągająca.



Układ powyższy w dalszym ciągu jest układem geometrycznie niezmiennym. Wyznamy siły przekrojowe w tym nowym układzie. Możemy skorzystać w tym celu z zasady superpozycji, osobno wyznaczając siły przekrojowe od obciążenia zewnętrznego oraz od siły zastępującej uplastyczniony pręt i dodając je do siebie.



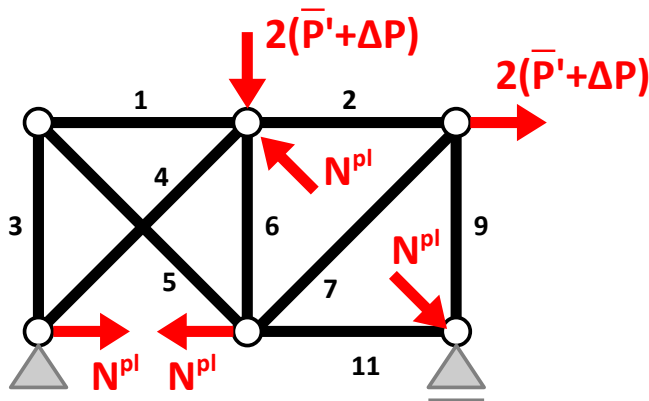
Musimy obecnie sprawdzić, dla jakiej wartości parametru P siła w poszczególnych prętach osiągnie wartość $\pm N^{pl}$ - zmiana schematu statycznego może doprowadzić bowiem nie tylko do zmiany proporcji wielkości sił osiowych w prętach, ale również do zmiany znaku sił w niektórych prętach.

Pręt	Siła w pręcie N_i	$N_i(\Delta P=0)$	$\Delta P: N_i = -N^{pl}$	$\Delta P: N_i = N^{pl}$
1	$-2(\bar{P} + \Delta P) + N^{pl}$	$-0,056 N^{pl}$	$0,472 N^{pl}$	$-0,528 N^{pl}$
2	$1,207(\bar{P} + \Delta P) - 0,104 N^{pl}$	$0,533 N^{pl}$	$-1,270 N^{pl}$	$0,387 N^{pl}$
3	$-2(\bar{P} + \Delta P) + N^{pl}$	$-0,056 N^{pl}$	$0,472 N^{pl}$	$-0,528 N^{pl}$
4	$2,828(\bar{P} + \Delta P) - 1,414 N^{pl}$	$0,079 N^{pl}$	$-0,382 N^{pl}$	$0,326 N^{pl}$
5	$2,828(\bar{P} + \Delta P) - 1,414 N^{pl}$	$0,079 N^{pl}$	$-0,382 N^{pl}$	$0,326 N^{pl}$
6	$-2,793(\bar{P} + \Delta P) + 0,896 N^{pl}$	$-0,579 N^{pl}$	$0,151 N^{pl}$	$-0,565 N^{pl}$
7	$1,121(\bar{P} + \Delta P) + 0,146 N^{pl}$	$0,738 N^{pl}$	$-1,550 N^{pl}$	$0,234 N^{pl}$
8	$-1,707(\bar{P} + \Delta P) + 0,146 N^{pl}$	$-0,755 N^{pl}$	$0,143 N^{pl}$	$-1,028 N^{pl}$
9	$-0,793(\bar{P} + \Delta P) - 0,104 N^{pl}$	$-0,523 N^{pl}$	$0,602 N^{pl}$	$-1,920 N^{pl}$
10	N^{pl}	N^{pl}	-	-
11	$1,207(\bar{P} + \Delta P) - 0,104 N^{pl}$	$0,533 N^{pl}$	$-1,270 N^{pl}$	$0,387 N^{pl}$

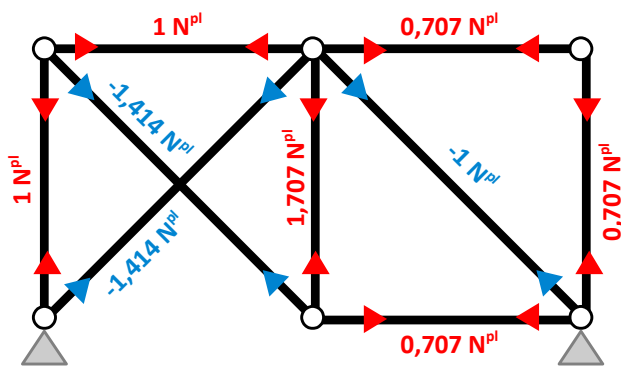
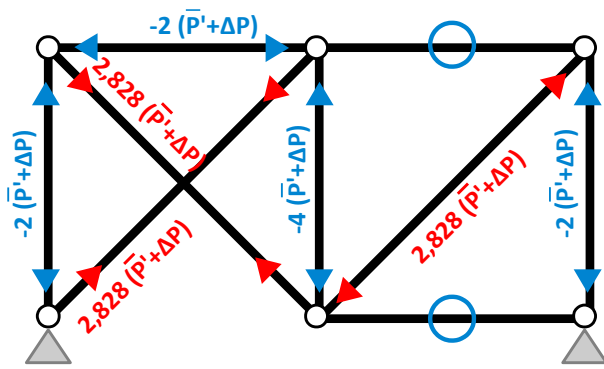
Najmniejszy przyrost parametru obciążenia, który spowoduje uplastycznienie kolejnego pręta, to $\Delta P = 0,143 N^{pl}$ - uplastycznieniu ulegnie pręt nr 8. Wartość parametru obciążenia w chwili uplastycznienia pręta 8:

$$\bar{P}' = \bar{P} + \Delta P = 0,671 N^{pl}$$

Zastępujemy pręt 8 układem dwóch przeciwnych sił N^{pl} przyłożonych w węzłach końcowych tego pręta – tym razem jest to siła ściskająca. Warto przy tym pamiętać, że analiza nasza całkowicie pomija zagadnienia utraty stateczności (wyboczenia).



Układ powyższy w dalszym ciągu jest układem geometrycznie niezmiennym. Wyznamy siły przekrojowe w tym nowym układzie. Możemy skorzystać w tym celu z zasady superpozycji, osobno wyznaczając siły przekrojowe od obciążenia zewnętrznego oraz od sił zastępujących uplastycznione pręty i dodając je do siebie.



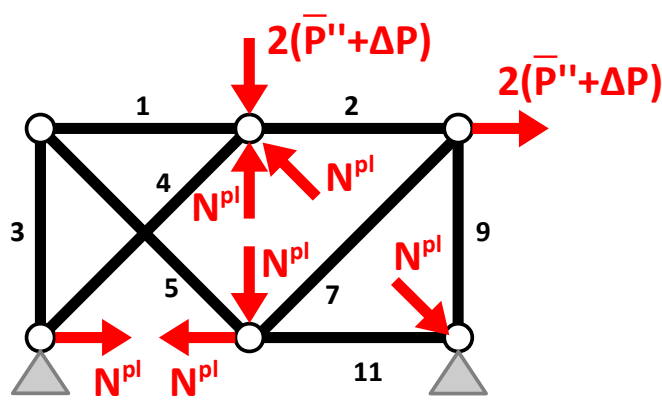
Musimy obecnie sprawdzić, dla jakiej wartości parametru P siła w poszczególnych prętach osiągnie wartość $\pm N^{pl}$:

Pręt	Siła w pręcie N_i	$N_i(\Delta P=0)$	$\Delta P: N_i=-N^{pl}$	$\Delta P: N_i=N^{pl}$
1	$-2(\bar{P}'+\Delta P) + N^{pl}$	$-0,342N^{pl}$	$0,329 N^{pl}$	$-0,671 N^{pl}$
2	$-0,707 N^{pl}$	$0,707 N^{pl}$	-	-
3	$-2(\bar{P}+\Delta P) + N^{pl}$	$-0,342 N^{pl}$	$0,329 N^{pl}$	$-0,671 N^{pl}$
4	$2,828(\bar{P}'+\Delta P) - 1,414 N^{pl}$	$0,484 N^{pl}$	$-0,525 N^{pl}$	$0,183 N^{pl}$
5	$2,828(\bar{P}'+\Delta P) - 1,414 N^{pl}$	$0,484 N^{pl}$	$-0,525 N^{pl}$	$0,183 N^{pl}$
6	$-4(\bar{P}'+\Delta P) + 1,707 N^{pl}$	$-0,977 N^{pl}$	$0,00575 N^{pl}$	$-0,494 N^{pl}$
7	$2,828(\bar{P}'+\Delta P) - N^{pl}$	$0,898 N^{pl}$	$-0,671 N^{pl}$	$0,0362 N^{pl}$
8	$-N^{pl}$	$-N^{pl}$	-	-
9	$-2(\bar{P}'+\Delta P) + 0,707 N^{pl}$	$-0,635 N^{pl}$	$-0,183 N^{pl}$	$-0,818 N^{pl}$
10	N^{pl}	N^{pl}	-	-
11	$0,707 N^{pl}$	$0,707 N^{pl}$	-	-

Najmniejszy przyrost parametru obciążenia, który spowoduje uplastycznienie kolejnego pręta, to $\Delta P = 0,00575 N^{pl}$ - uplastycznieniu ulegnie pręt nr 6. Wartość parametru obciążenia w chwili uplastycznienia pręta 6:

$$\bar{P}'' = \bar{P}' + \Delta P \approx 0,676 N^{pl}$$

Zastępujemy pręt 6 układem dwóch przeciwnych sił N^{pl} przyłożonych w węzłach końcowych tego pręta – jest to siła ściskająca.

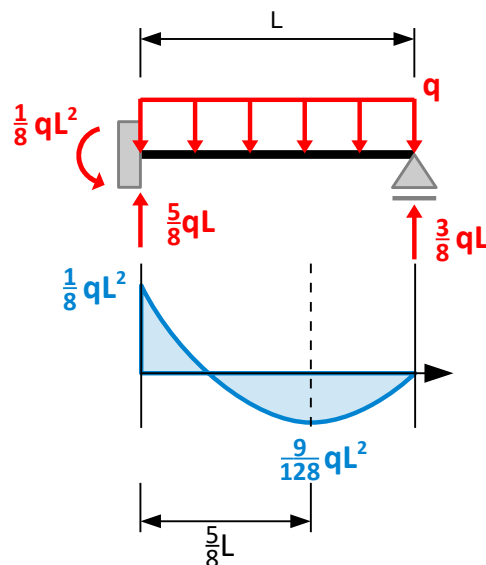
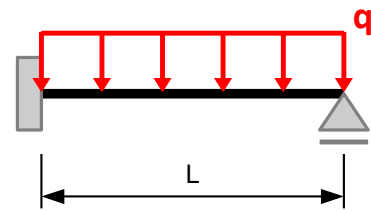


Układ powyższy jest już układem geometrycznie zmiennym – uplastycznienie prętów 10, 8 i 6 prowadzi do zniszczenia konstrukcji. Nośność graniczna układu jest zatem równa:

$$\bar{P}^* \approx 0,676 N^{pl}$$

PRZYKŁAD 3

Dana jest belka jednokrotnie statycznie niewyznaczalna, obciążona jednorodnym obciążeniem q . Naszym zadaniem jest wyznaczenie takiej wartości parametru obciążenia q , dla którego belka zamieni się w mechanizm wskutek uplastycznienia. Przeprowadzimy analizę sprężysto-plastyczną. Na początku układ pracuje w zakresie liniowo sprężystym – wyznaczamy rozkład sił przekrojowych.

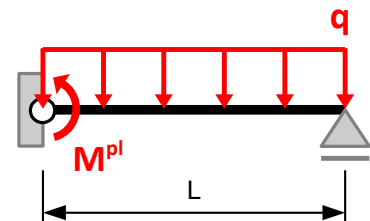


Największa wartość momentu zginającego występuje w utwierdzeniu – tam najwcześniej dojdzie do uplastycznienia. Jeśli nośność plastyczną przekroju belki oznaczymy przez M^{pl} , to uplastycznienie przekroju utwierdzenia nastąpi dla wartości q odpowiadającej **granicznej nośności plastycznej układu**:

$$\bar{q} = 8 \frac{M^{pl}}{L^2}$$

Upłastycznienie przekroju skutkuje powstaniem przegubu plastycznego. Przegub plastyczny dla przekrojów stalowych 1 klasy ma swobodę obrotu i tym samym zapewnia układowi dodatkowy stopień swobody. Różni się od zwykłego przegubu tym, że przegubie tym obecna jest stała wartość momentu M^{pl} , podczas gdy w przegubie zwykłym wartość momentu musi być zerowa.

Upłastycznienie uwzględnimy zatem przez **wprowadzenie przegubu** na podporze A (zamianę utwierdzenia na podporę przegubową nieprzesuwną) oraz **obciążenie momentem** M^{pl} (w ogólności obustronne, na końcu belki – jednostronne) przekrojów przyległych. **Układ ten w dalszym ciągu jest układem geometrycznie niezmiennym.**



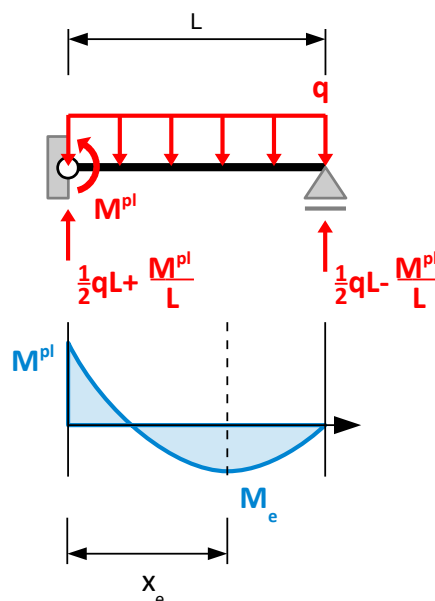
Wyznamy rozkład sił przekrojowych. Poszukujemy przekroju, który jako kolejny ulegnie uplastycznieniu – znajdzie ono w lokalnym ekstremum rozkładu momentów zginających w przęśle belki. To kolejne uplastycznienie z pewnością spowoduje zamianę układu w mechanizm, tj. zniszczenie belki. Mamy zatem:

Momenty zginające:

$$M(x) = -M^{pl} + \left(\frac{qL}{2} + \frac{M^{pl}}{L}\right)x - q\frac{x^2}{2}$$

Siły poprzeczne:

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = \left(\frac{qL}{2} + \frac{M^{pl}}{L}\right) - qx$$



Lokalne ekstremum rozkładu momentów:

$$Q(x_e) = 0 \Rightarrow x_e = \frac{L}{2} + \frac{M^{pl}}{qL}$$

$$M(x_e) = \frac{(M^{pl})^2}{2qL^2} - \frac{M^{pl}}{2} + \frac{qL^2}{2}$$

W chwili uplastycznienia $M(x_e) = +M^{pl}$, co będzie spełnione, gdy:

$$4(M^{pl})^2 - 12qL^2M^{pl} + q^2L^4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q_1 = (6-4\sqrt{2})\frac{M^{pl}}{L^2} \approx 0,34315\frac{M^{pl}}{L^2} \\ q_2 = (6+4\sqrt{2})\frac{M^{pl}}{L^2} \approx 11,657\frac{M^{pl}}{L^2} \end{cases}$$

Wielkościom tym odpowiadają wartości położenia ekstremum x_e :

$$x_{e,1} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(6-4\sqrt{2})}\right]L \approx 3,4142L, \quad x_{e,2} = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(6+4\sqrt{2})}\right]L \approx 0,58579L$$

Wartość q_1 jest mniejsza od \bar{q} , co sugerowałoby natychmiastowe uplastycznienie przekroju przęsłowego zaraz po uplastycznieniu przekroju utwierdzenia wskutek zmiany schematu statycznego – widać jednak, że dla \bar{q} nowy schemat statyczny daje ten sam rozkład momentów zginających, co układ pierwotny i moment przęsłowy jest mniejszy od granicznego. Poza tym rozwiązanie $x_{e,1}$ jest poza dziedziną. Ostatecznie zatem **nośność graniczna belki** odpowiada wartości:

$$q^* = (6+4\sqrt{2})\frac{M^{pl}}{L^2} \approx 11,657\frac{M^{pl}}{L^2}$$

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że choć pojawienie się przegubu plastycznego w utwierdzeniu nie zmienia w samej chwili uplastycznienia rozkładu sił przekrojowych, to jednak rozkład ugięć różni się zasadniczo – w zakresie sprężystym kąt ugięcia w utwierdzeniu jest zerowy, natomiast po uplastycznieniu przekroju utwierdzenia możliwy jest tam swobodny obrót, co skutkuje pogłębieniem ugięć w przęśle. Ilościowy opis tego przyrostu ugięcia jest jednak trudny. Wiadomo bowiem, że **rozkład ugięcia zależy od przestrzennego rozkładu sztywności giętnej $EI(x)$ – ta zaś zależy z kolei od stopnia uplastycznienia przekroju zginanego**. Ścisły sposób wyznaczania ugięcia belki pracującej w zakresie sprężysto-plastycznym powinien dla każdego przekroju wyznaczyć zakres strefy plastycznej i na tej podstawie określić jego sztywność giętą $EI(x)$. Dopiero dla tak otrzymanego rozkładu sztywności po długości pręta należy scałkować równanie belki:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = q(x)$$

Dla układów statycznie niewyznaczalnych rozkład sił przekrojowych zależy od rozkładu sztywności – a w zakresie sprężysto-plastycznym rozkład sztywności zależy od rozkładu sił przekrojowych. Widzimy zatem, że funkcje te są wzajemnie sprzężone i **wyznaczenie przemieszczeń układu statycznie niewyznaczalnego pracującego w zakresie sprężysto-plastycznym jest zagadnieniem nieliniowym**.

7.2 OSZACOWANIE GÓRNE I DOLNE NOŚNOŚCI PLASTYCZNEJ

Oszacowania nośności plastycznej konstrukcji dokonuje się na podstawie następujących twierdzeń:

TWIERDZENIE O OSZACOWANIU OD DOŁU (z niedomiarem)

Konstrukcja nie ulega zniszczeniu albo znajduje się w stanie równowagi granicznej pod wpływem obciążenia zewnętrznego, **jeśli da się znaleźć statycznie dopuszczalne pole naprężeń** odpowiadające temu obciążeniu. W takiej sytuacji **nośność plastyczna jest co najmniej właśnie taka** jak to obciążenie lub większa – jest to oszacowanie od dołu.

Statyczna dopuszczalność pola naprężeń stawia następujące wymagania:

- układ naprężeń jest w **równowadze z obciążeniem zewnętrznym**,
- układ naprężeń spełnia **warunki równowagi wewnętrznej**,
- układ naprężeń spełnia **statyczne warunki brzegowe**,
- naprężenia **nie przekraczają naprężenia granicznego** σ_0 .

Podsumowując, jeśli dla zadanego obciążenia zewnętrznego znajdziemy taki układ reakcji i sił przekrojowych, który jest w równowadze z tym obciążeniem oraz w równowadze wewnętrznej, a odpowiadający mu układ naprężeń nie przekracza wartości granicznej, to układ rzeczywiście przeniesie takie obciążenie, choć może też przenieść obciążenie większe.

TWIERDZENIE O OSZACOWANIU OD GÓRY (z nadmiarem)

Konstrukcja ulega zniszczeniu, jeśli **da się znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości**, takie że **całkowita moc obciążeń zewnętrznych jest nie mniejsza od mocy sił wewnętrznych**. W takiej sytuacji **nośność plastyczna jest co najwyżej właśnie taka** jak to obciążenie lub mniejsza – jest to oszacowanie od góry.

Kinematyczna dopuszczalność pola prędkości stawia następujące wymagania:

- pole prędkości **spełnia kinematyczne warunki brzegowe** (jest zgodne z więziami przyłożonymi do układu konstrukcyjnego),
- pole prędkości gwarantuje **ciągłość przemieszczeń**,
- całkowita moc obciążenia zewnętrznego na prędkościach jest dodatnia.

Podsumowując, jeśli dla zadanego obciążenia zewnętrznego znajdziemy taki schemat zniszczenia, który jest zgodny z układem podpór i zasadami rozkładu prędkości w bryle, a moc obciążenia jest nie mniejsza od mocy sił wewnętrznych, to układ rzeczywiście ulegnie zniszczeniu, choć możliwe jest, że zniszczeniu ulegnie nawet dla mniejszego obciążenia.

Przedstawimy teraz dowody powyższych twierdzeń. Zakładamy model ciała sztywno-idealnie plastycznego, tj. model **Lévy'ego–Misesa**, w którym zakłada się **całkowity brak deformacji aż do chwili spełnienia warunku plastyczności, po jego spełnieniu zaś zakłada się płynięcie plastyczne bez wzmocnienia** (w konsekwencji również i brak odkształceń sprężystych).

Wprowadźmy pojęcie uogólnionych naprężeń. **Uogólnionym naprężeniem** nazywać będziemy **wszystkie siły przekrojowe – sumy (całki) odpowiednich układów składowych stanu naprężenia, np. siłę osiową, siły poprzeczne, moment skręcający, momenty zginające – oraz ich liniowe kombinacje**, za pomocą których opisujemy stan układu mechanicznego, zapisujemy warunek uplastycznienia itd. Przyjmujemy, że takich uogólnionych naprężeń jest n . Oznaczmy je przez S_i ($i=1,2,\dots,n$). Można je wyrazić za pomocą składowych stanu naprężenia, tj. $S_i = S_i(\sigma_{jk})$. Warunek plastyczności można wtedy zapisać w postaci:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(S_1, S_2, \dots, S_n) = 0 \quad (101)$$

Powyższemu warunkowi plastyczności odpowiada n -wymiarowa **hiperpowierzchnia plastyczności**. Ponieważ założyliśmy, że materiał w procesie deofrmacji plastycznej nie wykazuje wzmocnienia, zatem powierzchnia ta jest stała w czasie. **Zakładamy ponadto, że powierzchnia plastyczności jest wypukła**, co koresponduje z postulatami stateczności Druckera.

Definiujemy następnie **uogólnione odkształcenia** E_i ($i=1,2,\dots,n$) **odpowiadające uogólnionym naprężeniom** S_i jako takie wielkości kinematyczne, dla których **przyrost gęstości pracy naprężeń na odkształceniach plastycznych można zapisać w postaci**:

$$dW_{pl} = \sigma_{jk} d\varepsilon_{jk}^{pl} = c S_i E_i \quad (102)$$

gdzie c jest pewnym mnożnikiem. Iloczyn skalarny tensora naprężenia i tensora przyrostu odkształceń plastycznych jest skalarem niezależnym od przyjętego układu współrzędnych. Dla przyjętego zestawu uogólnionych naprężeń równość (102) definiuje nam odkształcenia uogólnione. Odkształceniom tym odpowiadają uogólnione prędkości odkształcenia plastycznego \dot{E}_i , takie że

$$\frac{dW_{pl}}{dt} = \alpha S_i \dot{E}_i \quad (103)$$

Jest to **gęstość mocy rozpraszanej w procesie deformacji plastycznej**. Z założonej stateczności materiałów wynika **stowarzyszone prawo płynięcia** wyrażone przez uogólnione naprężenia i uogólnione odkształcenia:

$$\dot{E}_i = \beta \frac{\partial f}{\partial S_i} \quad (104)$$

gdzie $\beta \geq 0$ jest pewnym mnożnikiem, oraz **warunek normalności**:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial S_i} \dot{S}_i = 0 \quad (105)$$

Oznacza to, że wektor prędkości uogólnionych odkształceń jest ortogonalny do powierzchni plastyczności. **Warunek plastyczności jest jednocześnie potencjałem plastycznym, tj. określa nie tylko kiedy konstrukcja ulegnie uplastycznieniu, ale również w jaką będzie postać plastycznej deformacji.**

Pole przemieszczenia punktów konstrukcji odpowiadające założonemu obciążeniu oznaczamy składowymi $U_i(\mathbf{x})$ ($i=1,2,3$). W analizie nośności granicznej przyjmujemy, że **obciążenie zewnętrzne** dane jest pewnym polem sił $\mu P_i(\mathbf{x})$ ($i=1,2,3$), którego **wielkość rośnie proporcjonalnie do wartości parametru obciążenia** μ . Wartość parametru obciążenia odpowiadające stanowi granicznemu oznaczmy przez μ_G .

Określamy:

- **statycznie dopuszczalne pole naprężeń uogólnionych** $S_i^*(\mathbf{x})$, które
 - jest w równowadze z obciążeniem zewnętrznym,
 - spełnia równania równowagi wewnętrznej,
 - spełnia statyczne warunki brzegowe,
 - odpowiada co najwyżej stanowi granicznemu, tj. naprężenia wynikające z tego pola nie przekraczają granicy plastyczności.
- **kinematycznie dopuszczalne pole prędkości** \dot{U}_i^* , które:
 - spełnia kinematyczne warunki brzegowe (jest zgodne z więziami kinematycznymi, podporami),
 - spełnia odpowiednie warunki ciągłości przemieszczeń w przestrzeni fizycznej,
 - pozwala wyznaczyć niezerowe składowe uogólnionych prędkości odkształceń \dot{E}_i^* ,
 - jest takie, że całkowita moc obciążeń zewnętrznych na tych prędkościach jest dodatnia:

$$\dot{L}_z = \iint_A \mu P_i \dot{U}_i^* dA > 0 \quad (106)$$

gdzie A oznacza powierzchnię konstrukcji, do której przyłożono obciążenie zewnętrzne.

Wśród statycznie dopuszczalnych pól naprężeń uogólnionych istnieje pole naprężeń rzeczywistych. Podobnie wśród kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości istnieje pole prędkości rzeczywistych. Pole uogólnionych naprężeń odpowiadające pewnemu kinematycznie dopuszczalnemu polu prędkości nie musi być statycznie dopuszczalne – może np. nie spełniać równań równowagi lub warunków statycznych brzegowych. Musi to jednak być pole, dla którego zachodzić będzie rozpraszanie energii, co ma miejsce tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek plastyczności.

Jeśli dla pewnej wartości $\mu = \mu_S$ można znaleźć jakiegokolwiek statycznie dopuszczalne pole naprężeń uogólnionych, to μ_S nazywamy **statycznie dopuszczalnym mnożnikiem obciążenia**. Jeśli dla pewnej wartości $\mu = \mu_K$ można znaleźć jakiegokolwiek kinematycznie dopuszczalne pole prędkości, to μ_K nazywamy **kinematycznie dopuszczalnym mnożnikiem obciążenia**.

Rozważmy obecnie stan graniczny konstrukcji. Rzeczywiste przemieszczenia U_i są zatem przemieszczeniami odpowiadającymi chwili uplastycznienia, a obciążenie zewnętrzne jest równe $\mu_G P_i$. **Przemieszczenia rzeczywiste są przemieszczeniami kinematycznie dopuszczalnymi, są zatem przemieszczeniami wirtualnymi.** To samo dotyczy prędkości oraz prędkości odkształceń. Zapiszmy **zasadę prędkości wirtualnych** dla takich właśnie prędkości wirtualnych, przy czym zapiszmy tę zasadę dwukrotnie – dla obciążenia $\mu_G P_i$ i odpowiadającego mu pola naprężeń uogólnionych S_i oraz dla obciążenia $\mu_S P_i$ i odpowiadającego mu pola naprężeń uogólnionych S_i^* .

$$\iiint_V S_i \dot{E}_i dV = \iint_A \mu_G P_i \dot{U}_i dA \quad (107)$$

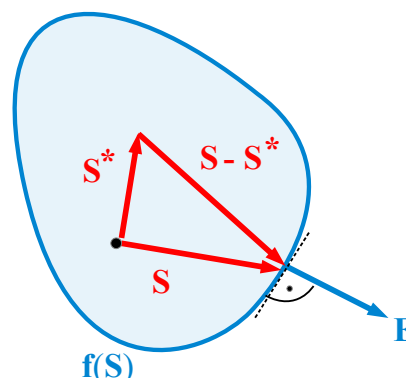
$$\iiint_V S_i^* \dot{E}_i dV = \iint_A \mu_S P_i \dot{U}_i dA \quad (108)$$

Ponieważ w obydwu przypadkach obszar całkowania jest ten sam (materiał jest sztywny), zatem:

$$\iiint_V (S_i - S_i^*) \dot{E}_i dV = (\mu_G - \mu_S) \iint_A P_i \dot{U}_i dA \quad (109)$$

Ponieważ całka po prawej stronie jest wielkością mocy sił zewnętrznych, musi ona być dodatnia. Jeśli chodzi o całkę po lewej stronie, to z faktu, że S_i^* leży wewnątrz powierzchni granicznej, z warunku normalności oraz z wypukłości powierzchni granicznej wynika, że również iloczyn skalarny stanowiący funkcję podcałkową musi być nieujemny. Równość będzie zatem spełniona tylko wtedy, gdy

$$\boxed{\mu_S \leq \mu_G} \quad (110)$$



a zatem, **jeśli dla pewnej intensywności obciążenia μ_S da się znaleźć statycznie dopuszczalne pole naprężeń uogólnionych, to nośność graniczna odpowiada właśnie tej lub jeszcze większej intensywności obciążenia.** Dowodzi to twierdzenia o oszacowaniu od dołu.

Możemy powtórzyć te rozważania dla dwóch układów obciążeń – rzeczywistego, granicznego równego $\mu_G P_i$ oraz pewnego obciążenia $\mu_K P_i$, skutkującego pewnym kinematycznie dopuszczalnym polem przemieszczenia \dot{U}_i^* , stanowiącym również pole wirtualne, dla którego zapiszemy zasadę prędkości wirtualnych.

$$\iiint_V S_i \dot{E}_i^* dV = \iint_A \mu_G P_i \dot{U}_i^* dA \quad (111)$$

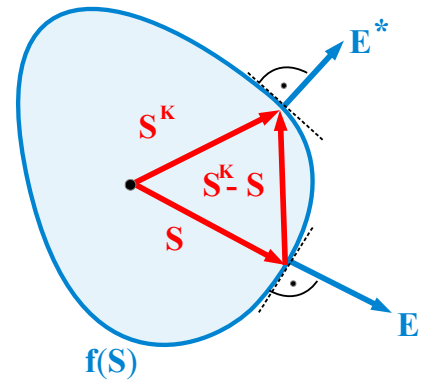
$$\iiint_V S_i^K \dot{E}_i^* dV = \iint_A \mu_K P_i \dot{U}_i^* dA \quad (112)$$

gdzie S_i jest rzeczywistym granicznym polem naprężeń uogólnionych, a S_i^K jest polem odpowiadającym obciążeniu $\mu_K P_i$. Ponieważ w obydwu przypadkach obszar całkowania jest ten sam (materiał jest sztywny), zatem:

$$\iiint_V (S_i^K - S_i) \dot{E}_i^* dV = (\mu_K - \mu_G) \iint_A P_i \dot{U}_i^* dA \quad (113)$$

Założyliśmy, że dla obciążenia $\mu_K P_i$ rzeczywiście zachodzi płynięcie plastyczne, zatem całka po prawej stronie musi być dodatnia jako moc obciążenia zewnętrznego. Jeśli chodzi o całkę po lewej stronie, to z faktu, że S_i^K dochodzi do powierzchni granicznej, z warunku normalności oraz z wypukłości powierzchni granicznej wynika, że również i iloczyn skalarny stanowiący funkcję podcałkową musi być nieujemny. Równość będzie zatem spełniona tylko wtedy, gdy

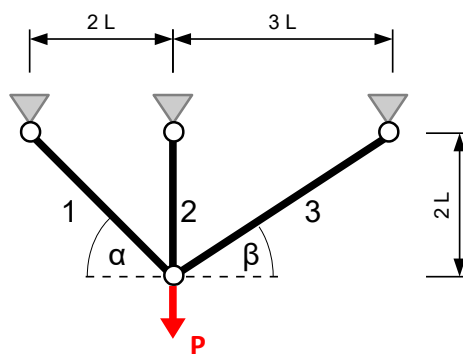
$$\boxed{\mu_G \leq \mu_K} \quad (114)$$



a zatem, **jeśli dla pewnej intensywności obciążenia μ_K da się znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości (mechanizm zniszczenia), to nośność graniczna odpowiada właśnie tej lub mniejszej intensywności obciążenia. Dowodzi to twierdzenia o oszacowaniu od dołu.**

PRZYKŁAD 4

Wyznaczyć nośność graniczną układu przedstawionego na rysunku, korzystając z twierdzeń o oszacowaniu górnym i dolnym nośności granicznej.



$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

OSZACOWANIE OD DOŁU – PODEJŚCIE STATYCZNE

Układ zamieni się w mechanizm, gdy uplastycznieniu ulegną dwa spośród trzech prętów. Mamy zatem trzy możliwe przypadki:

1) Uplastycznienie prętów 1 i 2

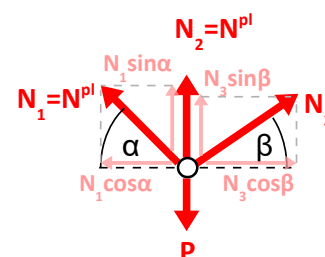
$$\Sigma X = -N^{pl} \cos \alpha + N_3 \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 = \frac{\sqrt{26}}{6} N^{pl} \approx 0,84984 N^{pl}$$

$N_3 < N^{pl} \rightarrow$ układ **statycznie dopuszczalny**.

$$\Sigma Y = N^{pl} \sin \alpha + N^{pl} - P + N_3 \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad P \approx 2,1785 N^{pl}$$

Nośność graniczna jest równa $\bar{P} \approx 2,1785 N^{pl}$ **lub większa**.

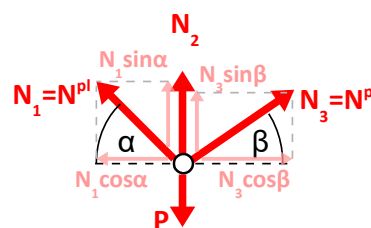


2) Uplastycznienie prętów 1 i 3

$$\Sigma X = -N^{pl} \cos \alpha + N^{pl} \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} N^{pl} \neq \frac{3}{\sqrt{13}} N^{pl}$$

równanie równowagi nie jest spełnione \rightarrow układ **statycznie niedopuszczalny**.

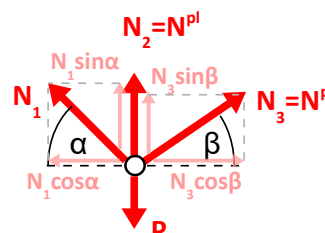


3) Uplastycznienie prętów 2 i 3

$$\Sigma X = -N_1 \cos \alpha + N^{pl} \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{3\sqrt{26}}{13} \approx 1,1767 N^{pl}$$

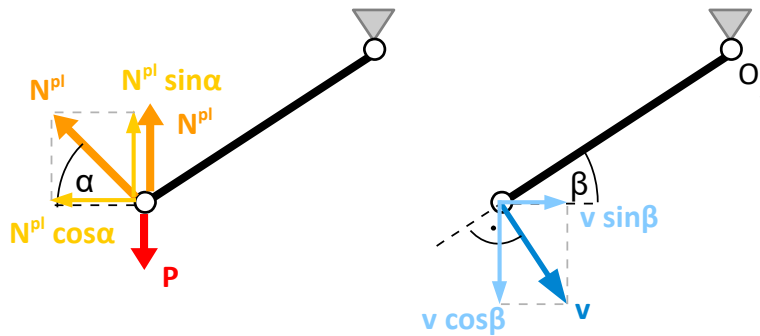
$N_1 > N^{pl} \rightarrow$ układ **statycznie niedopuszczalny**.



OSZACOWANIE OD GÓRY – PODEJŚCIE KINEMATYCZNE

Układ zamieni się w mechanizm, gdy uplastycznieniu ulegną dwa spośród trzech prętów. Mamy zatem trzy możliwe przypadki:

1) Uplastycznienie prętów 1 i 2



Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

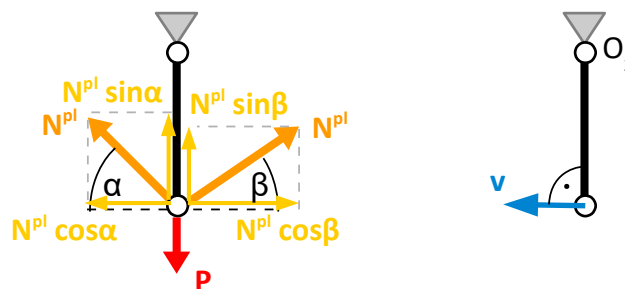
$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (N^{pl} \cos \alpha) \cdot (v \sin \beta) + (N^{pl} \sin \alpha) \cdot (v \cos \beta) + N^{pl} \cdot (v \cos \beta) = P \cdot (v \cos \beta)$$

$$P \approx 2,1785 N^{pl}$$

Nośność graniczna jest równa $P^* \approx 2,1785 N^{pl}$ lub mniejsza.

2) Uplastycznienie prętów 1 i 3



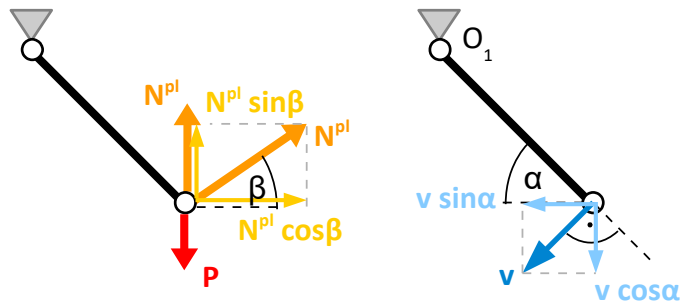
Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (N^{pl} \cos \alpha) \cdot v - (N^{pl} \cos \beta) \cdot v = 0$$

Całkowita moc obciążenia zewnętrznego na polu prędkości jest niedodatnia → pole przemieszczeń jest **kinematycznie niedopuszczalne**.

3) Uplastycznienie prętów 2 i 3



Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (N^{pl} \cos \beta) \cdot (v \sin \alpha) + (N^{pl} \sin \beta) \cdot (v \cos \alpha) + N^{pl} \cdot (v \cos \alpha) = P \cdot (v \cos \alpha)$$

$$P \approx 2,3868 N^{pl}$$

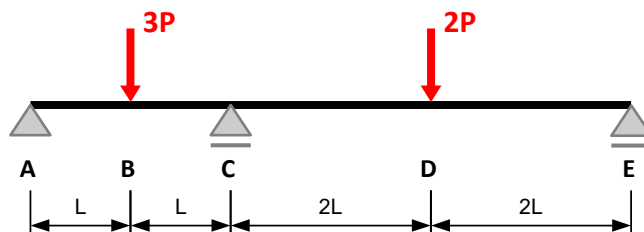
Nośność graniczna jest równa $P^* \approx 2,3868 N^{pl}$ **lub mniejsza**.

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe rachunki, możemy stwierdzić:

- **Oszacowanie od dołu** wskazuje, że **nośność graniczna jest nie mniejsza niż**
 $P^* \approx 2,1785 N^{pl}$.
- **Oszacowanie od góry** wskazuje, że **nośność graniczna jest nie większa niż**
 $P^* \approx 2,1785 N^{pl}$.
- **Nośność graniczna jest zatem równa** $P^* \approx 2,1785 N^{pl}$

PRZYKŁAD 5

Wyznaczyć nośność graniczną układu przedstawionego na rysunku, korzystając z twierdzeń o oszacowaniu górnym i dolnym nośności granicznej.

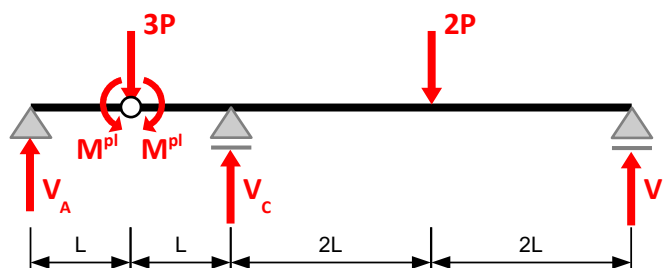


Układ jest **jednokrotnie statycznie niewyznaczalny** – aby zamienił się w mechanizm, muszą w nim powstać **dwa przeguby**. Powstaną one w miejscach występowania **największych momentów zginających**. Ponieważ układ obciążony jest siłami skupionymi, zatem **rozkład momentu zginającego jest przedziałami liniowy** i osiąga swoje **ekstrema na granicach przedziałów** charakterystycznych – albo nad podporami, albo pod siłami skupionymi. Tam właśnie pojawią się przeguby plastyczne.

OSZACOWANIE OD DOŁU – PODEJŚCIE STATYCZNE

Pierwsze uplastycznienie w przekroju B

Otrzymujemy belkę statycznie wyznaczalną:



$$\sum M_B^{\leftarrow} = 0: \quad -V_A L + M^{pl} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{M^{pl}}{L}$$

$$\begin{cases} \sum M_B^{\rightarrow} = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -M^{pl} + V_C L - 6PL + 5V_E L = 0 \\ V_A + V_C + V_E - 5P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_C = \frac{19}{4}P - \frac{3}{2}\frac{M^{pl}}{L} \\ V_E = \frac{1}{4}P - \frac{1}{2}\frac{M^{pl}}{L} \end{cases}$$

Momenty w przekrojach C i D:

$$M(C) = 4V_E L - 4PL = 2M^{pl} - 3PL$$

$$M(D) = 2V_E L = M^{pl} + \frac{PL}{2}$$

Kolejne uplastycznienie zajdzie w przekroju C, gdy $M(C) = -M^{pl} \Rightarrow P = \frac{M^{pl}}{L}$

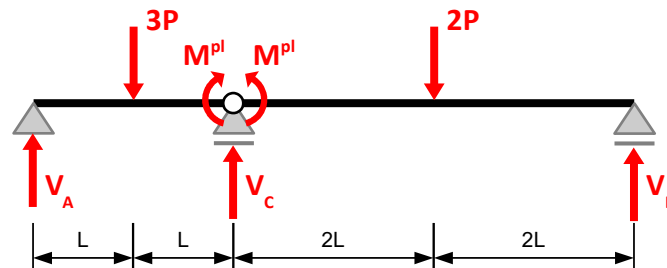
Wtedy: $M(D) = \frac{3}{2}M^{pl} > M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie niedopuszczalny**.

Kolejne uplastycznienie zajdzie w przekroju D, gdy $M(D) = M^{pl} \Rightarrow P = 0$

Wtedy: $M(C) = 2M^{pl} > M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie niedopuszczalny**.

Pierwsze uplastycznienie w przekroju C

Otrzymujemy belkę statycznie wyznaczalną:



$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = 0: -M^{pl} + 3PL - 2V_A L = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3}{2}P - \frac{M^{pl}}{2L}$$

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: M^{pl} - 4PL + 4V_E L = 0 \Rightarrow V_E = P - \frac{M^{pl}}{4L}$$

Momenty w przekrojach B i D:

$$M(B) = V_A L = -\frac{1}{2}M^{pl} + \frac{3}{2}PL$$

$$M(D) = 2V_E L = -\frac{1}{2}M^{pl} + 2PL$$

Kolejne uplastycznienie zajdzie w przekroju B, gdy $M(B) = M^{pl} \Rightarrow P = \frac{M^{pl}}{L}$

Wtedy: $M(D) = \frac{3}{2}M^{pl} > M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie niedopuszczalny**.

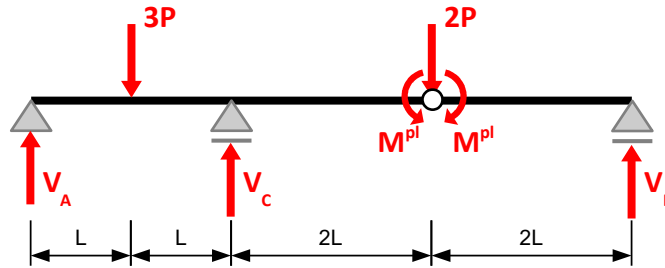
Kolejne uplastycznienie zajdzie w przekroju D, gdy $M(D) = M^{pl} \Rightarrow P = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$

Wtedy: $M(B) = \frac{5}{8}M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie dopuszczalny**.

Nośność graniczna belki jest równa $P^* = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$ **lub większa**.

Pierwsze uplastycznienie w przekroju D

Otrzymujemy belkę statycznie wyznaczalną:



$$\Sigma M_D^- = 0: 2V_E L - M^{pl} = 0 \Rightarrow V_E = \frac{M^{pl}}{2L}$$

$$\begin{cases} \Sigma M_D^+ = 0 \\ \Sigma Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M^{pl} - 2V_C L + 9PL - 4V_A L = 0 \\ V_A + V_C + V_E - 5P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = -\frac{1}{2}P + \frac{M^{pl}}{L} \\ V_C = \frac{11}{2}P - \frac{3}{2}\frac{M^{pl}}{L} \end{cases}$$

Momenty w przekrojach B i C:

$$M(B) = V_A L = M^{pl} - \frac{PL}{2}$$

$$M(C) = 2V_A L - 3PL = 2M^{pl} + 4PL$$

Kolejne uplastycznienie zajdzie w przekroju B, gdy $M(B) = M^{pl} \Rightarrow P = 0$

Wtedy: $M(C) = 2M^{pl} > M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie niedopuszczalny**.

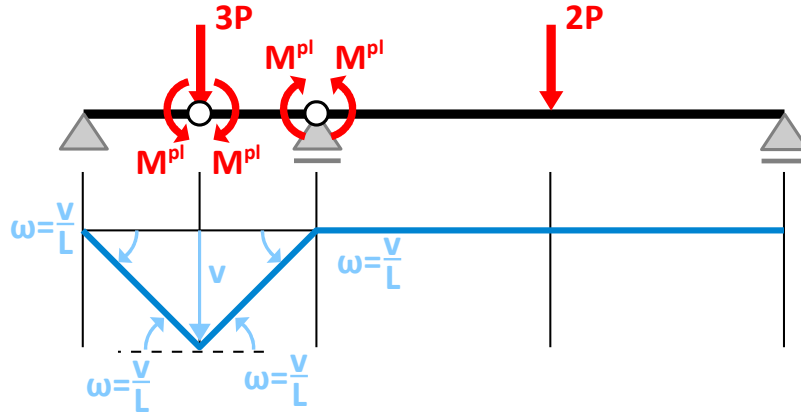
Kolejne uplastycznienie zajdzie w przekroju C, gdy $M(C) = -M^{pl} \Rightarrow P = \frac{3}{4}\frac{M^{pl}}{L}$

Wtedy: $M(B) = \frac{5}{8}M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie dopuszczalny**.

Nośność graniczna belki jest równa $P^* = \frac{3}{4}\frac{M^{pl}}{L}$ **lub większa**.

OSZACOWANIE OD GÓRY – PODEJŚCIE KINEMATYCZNE

Uplastycznienie w przekroju B i C

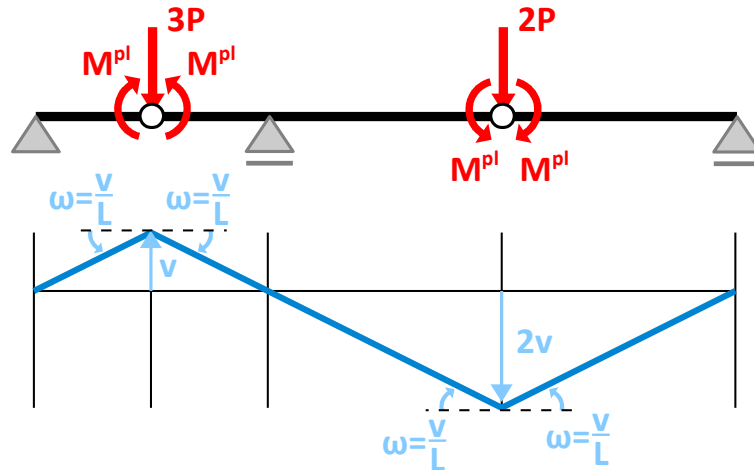


Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow M^{pl} \cdot \frac{v}{L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} = 3P \cdot v \Rightarrow P = \frac{M^{pl}}{L}$$

Nośność graniczna jest równa $P^* = \frac{M^{pl}}{L}$ lub mniejsza.

Uplastycznienie w przekroju B i D

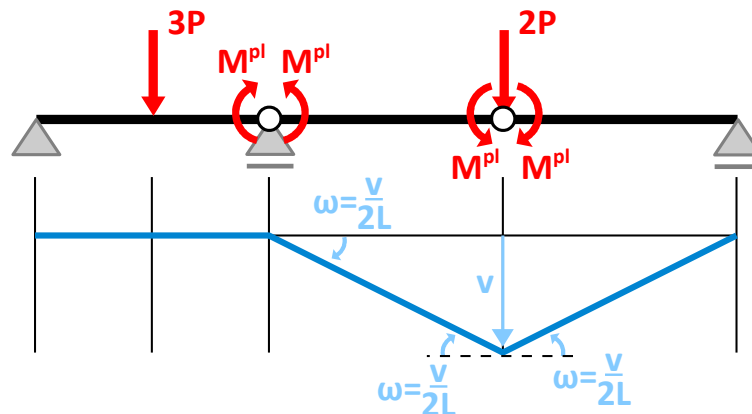


Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow M^{pl} \cdot \frac{v}{L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} = 2P \cdot 2v - 3P \cdot v \Rightarrow P = 4 \frac{M^{pl}}{L}$$

Nośność graniczna jest równa $P^* = 4 \frac{M^{pl}}{L}$ lub mniejsza.

Uplastycznienie w przekroju C i D



Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} = 2P \cdot v \Rightarrow P = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$$

Nośność graniczna jest równa $P^* = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$ lub mniejsza.

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe rachunki, możemy stwierdzić:

- **Oszacowanie od dołu** wskazuje, że **nośność graniczna jest nie mniejsza niż**

$$P^* = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L} .$$

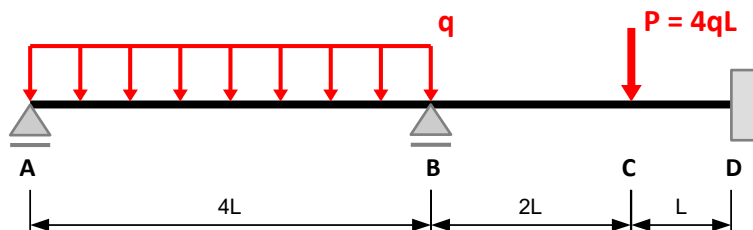
- **Oszacowanie od góry** wskazuje, że **nośność graniczna jest nie większa niż**

$$P^* = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L} .$$

- **Nośność graniczna jest zatem równa** $P^* = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$

PRZYKŁAD 6

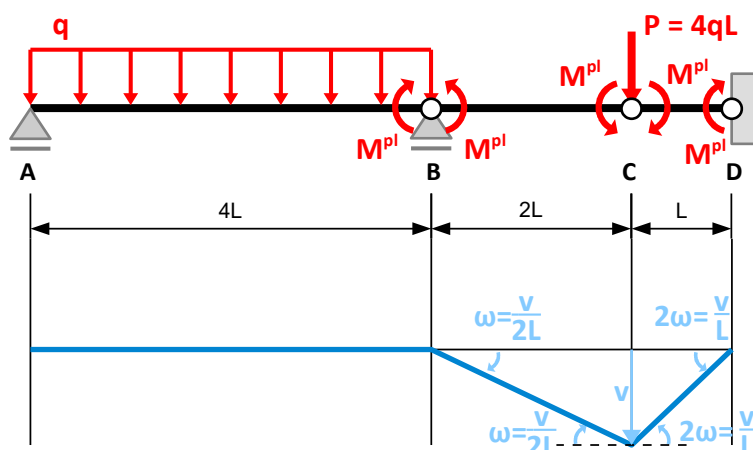
Wyznaczyć nośność graniczną układu przedstawionego na rysunku, korzystając z twierdzeń o oszacowaniu górnym i dolnym nośności granicznej.



Układ jest **dwukrotnie statycznie niewyznaczalny** – aby zamienił się w mechanizm, muszą w nim powstać **dwa** lub **trzy przeguby**. Powstaną one w miejscach występowania **największych momentów zginających**. W **przedziałach nieobciążonych rozkład momentu zginającego jest liniowy** i osiąga swoje **ekstrema na granicach tych przedziałów** charakterystycznych – albo nad podporami, albo pod siłami skupionymi. W przedziale obciążonym obciążeniem ciągłym nie jesteśmy w stanie z góry przewidzieć, w którym miejscu występować będzie lokalne ekstremum momentów, tj. gdzie powstanie przegub plastyczny. Jednym z rozwiązań może być określenie położenia tego ekstremum za pomocą pewnego zmiennego parametru, a następnie poszukiwanie ekstremum oszacowania nośności z uwagi na ten właśnie parametr. Zaczniemy od podejścia kinematycznego z uwagi na prostotę tego oszacowania. Dla wyznaczonego w tym podejściu położenia przegubu dokonamy następnie oszacowania od dołu. Jeśli odpowiadający takiemu schematowi rozkład naprężeń będzie statycznie dopuszczalny, a oszacowania będą zgodne, to oszacowanie to będzie rzeczywistą nośnością graniczną belki.

OSZACOWANIE OD GÓRY – PODEJŚCIE KINEMATYCZNE

Uplastycznienie w przekrojach B, C, D

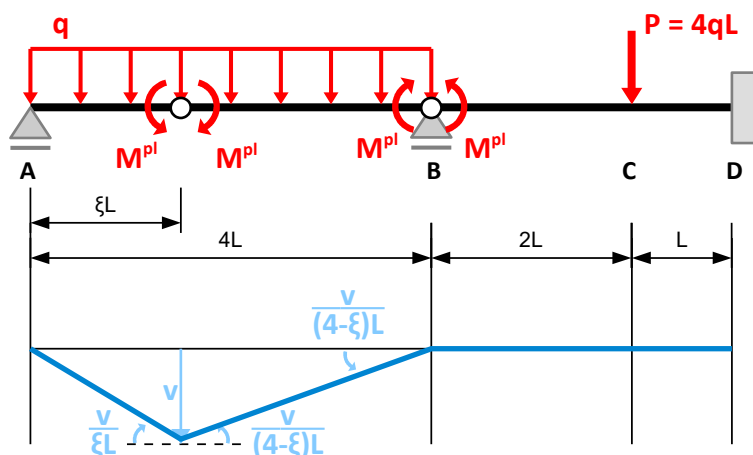


Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{2L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{L} = 4qL \cdot v \Rightarrow q = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L^2}$$

Nośność graniczna jest równa $q^* = 0,75 \frac{M^{pl}}{L^2}$ lub mniejsza.

Uplastycznienie w przekroju B oraz pod obciążeniem ciągłym



Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow M^{pl} \cdot \frac{v}{\xi L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{(4-\xi)L} + M^{pl} \cdot \frac{v}{(4-\xi)L} = q \xi L \cdot \frac{v}{2} + q(4-\xi)L \cdot \frac{v}{2} \Rightarrow q = \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L^2}$$

Nośność graniczna jest równa $q^* = M^{pl} \frac{\xi+4}{2\xi L^2(4-\xi)}$ lub mniejsza.

Poszukujemy ekstremum tego oszacowania z uwagi na parametr $\xi \in (0 ; 4)$:

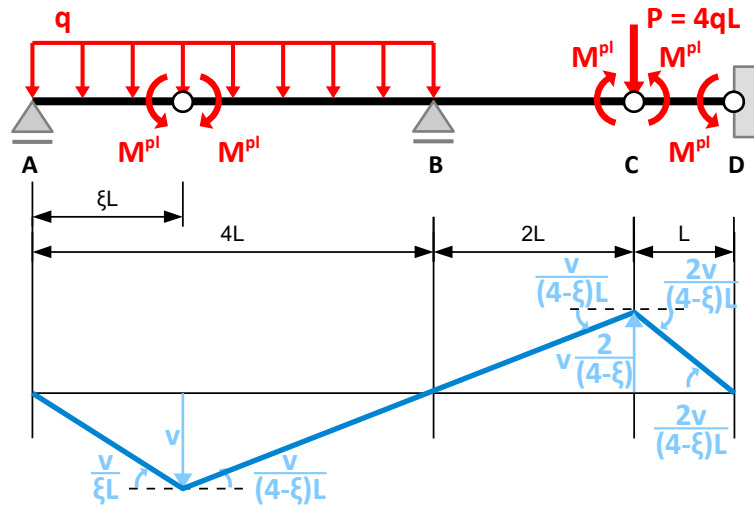
$$\frac{dq^*}{d\xi} = M^{pl} \frac{\xi^2 + 8\xi - 16}{2\xi^2 L^2 (4-\xi)^2} = 0 \Rightarrow \xi_1 = -9,6569, \xi_2 = 1,6569$$

Pierwszy z pierwiastków nie należy do dziedziny. Sprawdzamy znak drugiej pochodnej:

$$\left. \frac{d^2 q^*}{d\xi^2} \right|_{\xi_2} = 0,37533 \frac{M^{pl}}{L^2} > 0 \Rightarrow \text{minimum lokalne}$$

Nośność graniczna jest równa $q^* = 0,72855 \frac{M^{pl}}{L^2}$ lub mniejsza.

Uplastycznienie w przekrojach C i D oraz pod obciążeniem ciągłym



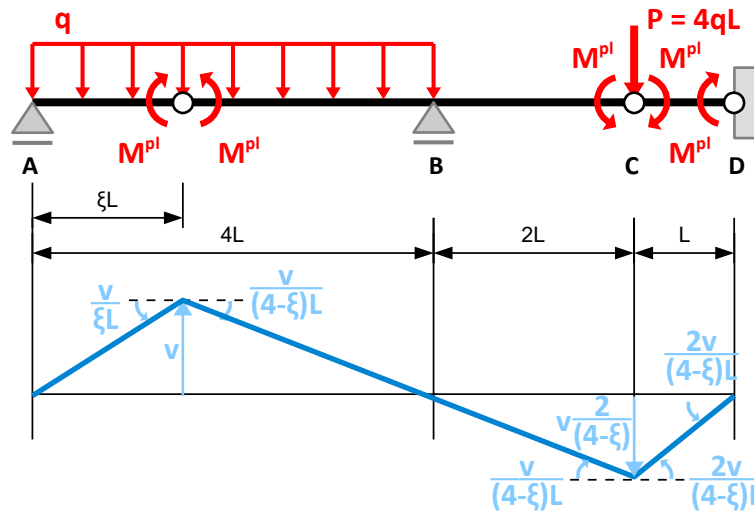
Przyrównujemy moc sił zewnętrznych i moc sił wewnętrznych:

$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow$$

$$M^{pl} \cdot \frac{v}{\xi L} + 2 \cdot \left[M^{pl} \cdot \frac{v}{(4-\xi)L} \right] + 2 \cdot \left[M^{pl} \cdot \frac{2v}{(4-\xi)L} \right] = q \xi L \cdot \frac{v}{2} + q(4-\xi)L \cdot \frac{v}{2} - 4qL \cdot \frac{2v}{4-\xi}$$

$$\Rightarrow q = -M^{pl} \frac{4+5\xi}{\xi^2 L^2}$$

Ujemna wartość nośności wskazuje, że możliwy schemat zniszczenia będzie miał przeciwny zwrot prędkości:



$$\dot{\Phi}_w = \dot{\Phi}_z \Rightarrow$$

$$M^{pl} \cdot \frac{v}{\xi L} + 2 \cdot \left[M^{pl} \cdot \frac{v}{(4-\xi)L} \right] + 2 \cdot \left[M^{pl} \cdot \frac{2v}{(4-\xi)L} \right] = -q \xi L \cdot \frac{v}{2} - q(4-\xi)L \cdot \frac{v}{2} + 4qL \cdot \frac{2v}{4-\xi}$$

$$\Rightarrow q = M^{pl} \frac{4+5\xi}{\xi^2 L^2}$$

Nośność graniczna jest równa $q^* = M^{pl} \frac{4+5\xi}{\xi^2 L^2}$ lub mniejsza.

Poszukujemy ekstremum tego oszacowania z uwagi na parametr $\xi \in (0 ; 4)$:

$$\frac{dq^*}{d\xi} = -M^{pl} \frac{5\xi^2 + 8}{2\xi^3 L^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = -1,6$$

Pierwiastek nie należy do dziedziny. Wartości ekstremalne nośności odpowiadają granicznym wartościom parametru ξ . Dla $\xi \rightarrow 0$ mamy $q^* \rightarrow \infty$ i schemat zniszczenia traci sens (przegub plastyczny pod obciążeniem ciągłym zbliża się do podpory przegubowej z lewej strony – dla zachowania ciągłości prędkości prędkość tego przegubu musi być nieskończona). Przypadek ten odrzucamy. Dla $\xi=4$ otrzymujemy pierwszy z omawianych schematów zniszczenia, tj. uplastycznienie w punktach B, C i D. Zgadza się również oszacowanie nośności:

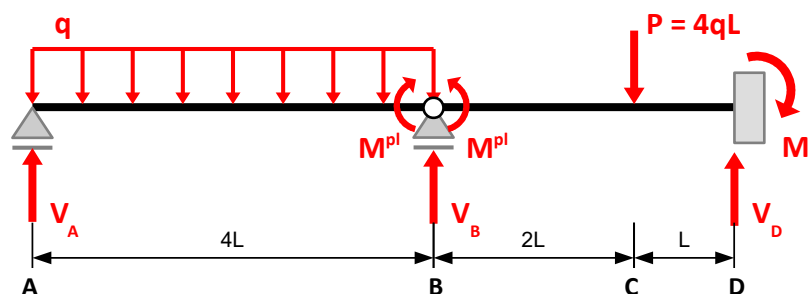
$$q^* = 0,75 \frac{M^{pl}}{L^2}$$

Ze wszystkich analizowanych schematów zniszczenia, schemat drugi dla $\xi=1,6569$ daje nam najniższe oszacowanie od góry. Wykorzystajmy tę informację dokonując oszacowania od dołu.

OSZACOWANIE OD DOŁU – PODEJŚCIE STATYCZNE

Pierwsze uplastycznienie w przekroju B

Otrzymujemy belkę statycznie niewyznaczalną.



Rozwiązujemy belkę metodą sił, metodą przemieszczeń lub korzystamy z tablic reakcji i wykresów sił przekrojowych dla belek prostych. Reakcje podporowe są równe:

$$V_A = \frac{q \cdot 4L}{2} - \frac{M^{pl}}{4L} = 2qL - \frac{M^{pl}}{4L}$$

$$V_B = \left(\frac{4}{27} \cdot 4qL + \frac{3}{2} \frac{M^{pl}}{3L} \right) + \left(\frac{q \cdot 4L}{2} + \frac{M^{pl}}{4L} \right) = \frac{70}{27} qL + \frac{3}{4} \frac{M^{pl}}{L}$$

$$V_D = \frac{23}{27} \cdot 4qL - \frac{3}{2} \frac{M^{pl}}{3L} = \frac{92}{27} qL - \frac{1}{2} \frac{M^{pl}}{L}$$

$$M_D = \frac{5}{27} \cdot (4qL) \cdot (3L) - \frac{M^{pl}}{2} = \frac{20}{9} qL^2 - \frac{M^{pl}}{2}$$

Moment pod obciążeniem ciągłym:

$$M(x) = V_A x - q \frac{x^2}{2} = \left(2qL - \frac{M^{pl}}{4L} \right) x - q \frac{x^2}{2}$$

Ekstremum momentów pod obciążeniem ciągłym:

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow x_e = 2L - \frac{M^{pl}}{4qL}$$

$$M_e = M(x_e) = \frac{(8qL^2 - M^{pl})^2}{32qL^2}$$

Moment w przekroju C: $M(C) = V_D L - M_D = \frac{32}{27} qL^2$

Moment w przekroju D: $M(D) = -M_D = -\frac{20}{9} qL^2 + \frac{M^{pl}}{2}$

Rozważyć musimy teraz 3 przypadki:

- gdy drugie uplastycznienie zajdzie pod obciążeniem ciągłym
- gdy drugie uplastycznienie zajdzie w przekroju C
- gdy drugie uplastycznienie zajdzie w przekroju D

Drugie uplastycznienie zajdzie pod obciążeniem ciągłym, gdy:

$$M_e = M^{pl} \Rightarrow \vee \begin{cases} q = 0,72855 \frac{M^{pl}}{L^2} \Rightarrow x_e = 1,6569 L \\ q = 0,021447 \frac{M^{pl}}{L^2} \Rightarrow x_e = -9,6569 L \end{cases}$$

Drugie rozwiązanie nie należy do dziedziny zadania. Przyjmujemy pierwsze rozwiązanie.

Wtedy: $M(C) = 0,025418 M^{pl} \leq M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie dopuszczalny**.
 $M(D) = 0,45234 M^{pl} \leq M^{pl} \Rightarrow$ schemat **statycznie dopuszczalny**.

Nośność graniczna belki jest równa $q^* = 0,72855 \frac{M^{pl}}{L^2}$ **lub większa**.

Oszacowanie to jest identyczne z oszacowaniem od góry podejściem kinematycznym. Jest to zatem rzeczywista nośność graniczna belki.

LITERATURA

1. „Teoria Plastyczności” - red. W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, PWN, Warszawa 1965.
2. J. Skrzypek, „Teoria plastyczności i pełzania. Cz. 1 – Wprowadzenie teoretyczne”, WPK, Kraków 1980.
3. J. Skrzypek, „Teoria plastyczności i pełzania. Cz. 2 – Przykłady i zadania”, WPK, Kraków 1980.
4. J. Skrzypek, „Plastyczność i pełzanie. Teoria, zastosowania, zadania”, PWN, Warszawa 1986.
5. R. Hill, „The Mathematical Theory of Plasticity”, Oxford University Press, 1950.