

ZADANIE 1 (Notacja wskaźnikowa)

Wskaż niepoprawne użycie konwencji sumacyjnej w kartezjańskich układach współrzędnych. Rozpisz wyrażenia poprawne dla dowolnie wybranej ustalonej wartości wskaźników wolnych (wszystkie indeksy przybierają wartości od 1 do 3).

- | | | |
|-----------------------|---|-----------------------------|
| a) $a_i b_i$ | b) T_{kk} | c) $A_{kk} v_k$ |
| d) $p_i = T_{ij} n_j$ | e) $C_{ij} = A_{ij} B_{jk}$ | f) $C_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ |
| g) $a_i = R_{jk} b_j$ | h) $C_{ij} = A_{ij} + B_{kk} \delta_{ij}$ | i) $A_{ij} b_j + a_i b_i$ |
| j) $A_{pq} B_{pq}$ | k) $T_{ij,k} a_k \delta_{ij}$ | l) $S_{ijkl} A_{kl}$ |

ROZWIĄZANIE:

- a) $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- b) $T_{kk} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$
- c) $A_{kk} v_k$ - błąd: indeks niemy powtarza się więcej niż 2 razy
- d) $p_i = T_{ij} n_j$ np. dla $i=2$: $p_2 = T_{21} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3$
- e) $C_{ij} = A_{ij} B_{jk}$ - błąd: indeks j z lewej strony jest indeksem wolnym, z prawej niemy
- f) $C_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ np. dla $i=1, k=3$: $C_{13} = A_{11} B_{13} + A_{12} B_{23} + A_{13} B_{33}$
- g) $a_i = R_{jk} b_j$ - błąd: różne indeksy wolne po jednej i po drugiej stronie równości
- h) $C_{ij} = A_{ij} + B_{kk} \delta_{ij}$ np. dla $i=2, j=1$: $C_{21} = A_{21} + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \delta_{21} = A_{21}$
- i) $A_{ij} b_j + a_i b_i$ - błąd: indeks i raz jest niemy, raz wolny

j)
$$A_{pq} B_{pq} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{12} + A_{13} B_{13} +$$

$$+ A_{21} B_{21} + A_{22} B_{22} + A_{23} B_{23} +$$

$$+ A_{31} B_{31} + A_{32} B_{32} + A_{33} B_{33}$$

k)
$$T_{ij,k} a_k \delta_{ij} = T_{ii,k} a_k = T_{11,1} a_1 + T_{11,2} a_2 + T_{11,3} a_3 +$$

$$+ T_{22,1} a_1 + T_{22,2} a_2 + T_{22,3} a_3 +$$

$$+ T_{33,1} a_1 + T_{33,2} a_2 + T_{33,3} a_3$$

l) $S_{ijkl} A_{kl}$ np. dla $i=3, j=3$:

$$S_{11kl} A_{kl} = S_{3311} A_{11} + S_{3312} A_{12} + S_{3313} A_{13} +$$

$$+ S_{3321} A_{21} + S_{3322} A_{22} + S_{3323} A_{23} +$$

$$+ S_{3331} A_{31} + S_{3332} A_{32} + S_{3333} A_{33}$$

ZADANIE 2 (zagadnienie własne trójwymiarowego symetrycznego tensora drugiego rzędu)

Wyznacz wartości i wektory własne tensora:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE:

I niezmiennik:

$$I = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

II niezmiennik:

$$\begin{aligned} II &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 + 1 + 1 = 4 \end{aligned}$$

III niezmiennik:

$$III = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

Równanie wielokowe:

$$T^3 - I T^2 + II T - III = 0 \Rightarrow T^3 - 3\sqrt{2} T^2 + 4 T = 0$$

$$T = 0$$

∨

$$T(T^2 - 3\sqrt{2} T + 4) = 0 \Rightarrow T = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2} = \sqrt{2}$$

∨

$$T = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Mamy trzy różne wartości własne – odpowiadają im trzy jednowymiarowe, wzajemnie ortogonalne podprzestrzenie własne, tj. trzy wzajemnie prostopadłe wektory własne $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

WYZNACZANIE WEKTORÓW WŁASNYCH – METODA I

Wektory własne dla $T_1=0$: $(\mathbf{T} - T_1 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}-0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}-0 & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2}-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ponieważ odpowiadająca podprzestrzeń własna jest jednowymiarowa, jedną ze składowych wektora własnego przyjmujemy za parametr. Niech będzie to u_3 . Wybieramy teraz dwa dowolne z powyższych równań, np. pierwsze i drugie, i wyznaczamy pozostałe składowe wyrażając je poprzez u_3 :

$$\begin{cases} \sqrt{2}u_1 - u_3 = 0 \\ \sqrt{2}u_2 - u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{u_3}{\sqrt{2}} \\ u_2 = \frac{u_3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = \left[\frac{u_3}{\sqrt{2}}; \frac{u_3}{\sqrt{2}}; u_3 \right]$$

Wyznaczamy długość wektora własnego a następnie normujemy go:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\frac{u_3^2}{2} + \frac{u_3^2}{2} + u_3^2} = u_3\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Wektory własne dla $T_2 = \sqrt{2}$: $(\mathbf{T} - T_2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}-\sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2}-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2}-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ponieważ odpowiadająca podprzestrzeń własna jest jednowymiarowa, jedną ze składowych wektora własnego przyjmujemy za parametr. Niech będzie to v_1 . Wybieramy teraz dwa dowolne z powyższych równań, np. pierwsze i trzecie (drugie jest identyczne z pierwszym), i wyznaczamy pozostałe składowe wyrażając je poprzez v_1 :

$$\begin{cases} -v_3 = 0 \\ -v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 0 \\ v_2 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v} = [v_1; -v_1; 0]$$

Wyznaczamy długość wektora własnego a następnie normujemy go:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + (-v_1)^2 + 0^2} = v_1\sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right]$$

Wektory własne dla $T_3 = 2\sqrt{2}$:

Trzeci z wektorów własnych, który musi być prostopadły do pozostałych, wyznaczamy jako iloczyn wektorowy pierwszych dwóch $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$: od razu będzie unormowany a przy tym jego zwrot będzie taki, że układ wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ będzie trójką prawoskrętną:

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right] = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

WYZNACZANIE WEKTORÓW WŁASNYCH – METODA II

$$\text{Wektory własne dla } T_1=0 : (\mathbf{T}-T_1\mathbf{I})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Powyższy układ równań można interpretować jako 3 iloczyny skalarne równe 0 - wektora \mathbf{u} oraz trzech wektorów, których składowe są równe współczynnikom z kolejnych wierszy macierzy współczynników. Skoro wszystkie trzy iloczyny skalarne są równe 0, zatem wektory te są do siebie prostopadłe. W szczególności, wektor \mathbf{u} możemy znaleźć jako iloczyn wektorowy dowolnych dwóch wektorów zbudowanych z wierszy macierzy współczynników – iloczyn wektorowy będzie prostopadły do obydwu z nich. Wybierzmy np. pierwsze dwa wiersze:

$$\mathbf{u} = [\sqrt{2}; 0; -1] \times [0; \sqrt{2}; -1] = [\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2]$$

$$\text{Wektor normujemy: } \mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{[\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2]}{\sqrt{2+2+4}} = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{Wektory własne dla } T_2=\sqrt{2} : (\mathbf{T}-T_2\mathbf{I})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wybieramy wektory zbudowane na drugim i trzecim wierszu (pierwsze dwa wiersze dają nam wektory równoległe, których iloczyn wektorowy będzie zerowy):

$$\mathbf{v} = [0; 0; -1] \times [-1; -1; 0] = [-1; 1; 0]$$

$$\text{Wektor normujemy: } \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{[-1; 1; 0]}{\sqrt{1+1+0}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right]$$

$$\text{Wektory własne dla } T_3=2\sqrt{2} :$$

Trzeci z wektorów własnych, który musi być prostopadły do pozostałych, wyznaczamy jako iloczyn wektorowy pierwszych dwóch $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$: od razu będzie unormowany a przy tym jego zwrot będzie taki, że układ wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ będzie trójką prawoskrętną:

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right] = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

UWAGA:

Widzimy, że uzyskane wektory różnią się zwrotem – nie ma to znaczenia, ponieważ każdy wektor równoległy (również o przeciwnym zwrocie) do wektora własnego jest wektorem własnym, a wybór tego lub innego zwrotu jest kwestią umowy.

MACIERZ PRZEJŚCIA

Macierz przejścia zdefiniowana jest następująco:

$$\mathbf{A}: A_{ij} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{e}_j$$

Składowa ij macierzy przejścia to j -ta składowa i -tego wektora własnego w pierwotnym układzie współrzędnych. Wykorzystując wyniki uzyskane np. I metodą:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia ma następujące własności:

- i -ty wiersz macierzy przejścia to i -ty wektor własny wyrażony w bazie pierwotnego układu współrzędnych
- j -ta kolumna to j -ty wektor bazowy pierwotnego układu współrzędnych wyrażony w bazie wektorów własnych
- suma kwadratów wyrazów w każdej kolumnie jest równa 1 (wektory pierwotnej bazy są unormowane)
- suma kwadratów wyrazów w każdym wierszu jest równa 1 (wektory własne są unormowane)
- iloczyn skalarny dwóch dowolnych kolumn jest równy 0 (wektory pierwotnej bazy są wzajemnie prostopadłe)
- iloczyn skalarny dwóch dowolnych wierszy jest równy 0 (wektory własne są wzajemnie prostopadłe)
- wyznacznik macierzy przejścia jest równy 1 (jest to macierz ortogonalna)

Za pomocą macierzy przejścia możemy transformować tensor zadany w pierwotnym układzie współrzędnych do układu jego osi własnych za pomocą wzoru:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ZADANIE 3 (zagadnienie własne trójwymiarowego symetrycznego tensora drugiego rzędu)

Wyznacz wartości i wektory własne tensora:
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE:

I niezmiennik: $I = 102 + 123 + 75 = 300$

II niezmiennik: $II = \begin{vmatrix} 102 & 36 \\ 36 & 123 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 102 & 0 \\ 0 & 75 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 123 & 0 \\ 0 & 75 \end{vmatrix} = 28125$

III niezmiennik: $III = \begin{vmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{vmatrix} = 843750$

Równanie wiekowe: $T^3 - IT^2 + IIT - III = 0 \Rightarrow T^3 - 300T^2 + 28125T - 843750 = 0$

Pierwiastki równania wiekowego wyznaczamy numerycznie bądź korzystając ze wzorów Cardano:

$$T_1 = 150, \quad T_2 = 75, \quad T_3 = 75$$

WYZNACZANIE WEKTORÓW WŁASNYCH – METODA I:

Wektory własne dla $T_1 = 150$:

$$(\mathbf{T} - T_1 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 102 - 150 & 36 & 0 \\ 36 & 123 - 150 & 0 \\ 0 & 0 & 75 - 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ odpowiadająca podprzestrzeń własna jest jednowymiarowa, jedną ze składowych wektora własnego przyjmujemy za parametr. Nie możemy wybrać u_3 , ponieważ z trzeciego równania wynika, że $u_3 = 0$. Niech parametrem będzie u_1 . Wybieramy teraz dwa dowolne z powyższych równań i wyznaczamy pozostałe składowe wyrażając je poprzez u_3 - widzimy jednak, że są to równania tożsame. Weźmy zatem pierwsze i trzecie:

$$\begin{cases} -48u_1 + 36u_2 = 0 \\ -75u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{4}{3}u_1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{4}{3}u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektor własny normujemy. Wyznaczamy jego długość:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{u_1^2 + \frac{16}{9}u_1^2 + 0} = \frac{5}{3}u_1 \Rightarrow \mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektory własne dla $T_2 = T_3 = 75$:

$$(\mathbf{T} - T_2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 102 - 75 & 36 & 0 \\ 36 & 123 - 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75 - 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ponieważ dla dwukrotnej wartości własnej odpowiadająca podprzestrzeń własna jest dwuwymiarowa, zatem dwie ze składowych wektora własnego przyjmujemy za niezależne parametry. Otrzymamy dwuparametrową rodzinę wektorów własnych odpowiadających $T_2=T_3$, z których wszystkie będą leżały na płaszczyźnie prostopadłej do \mathbf{t}_1 . Spośród nich musimy wybrać dwa dowolne, prostopadłe do siebie, które razem z \mathbf{t}_1 tworzyć będą trójkę prawoskrętną. Zrobimy to w ten sposób, że jeden z nich wyznaczymy przyjmując dowolne wartości wybranych parametrów (nie równe jednocześnie 0), trzeci zaś wektor obliczymy jako iloczyn wektorowy poprzednich dwóch.

Trzecie równanie sugeruje nam od razu, że jednym z wolnych parametrów musi być v_3 , ponieważ jest ono zawsze spełnione dla dowolnej wartości v_3 . Drugim niech będzie v_1 . Wybieramy teraz dwa dowolne z powyższych równań i wyznaczamy pozostałe składowe wyrażając je poprzez v_1 i v_3 - widzimy jednak, że wybór pierwszego i drugiego dałby nam jednorodny układ równań z zerowym rozwiązaniem. Weźmy zatem pierwsze i trzecie:

$$\begin{cases} 27v_1+36v_2=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=-\frac{3}{4}v_1 \\ v_3-\text{dowolne} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}=\left[v_1; -\frac{3}{4}v_1; v_3\right]$$

Wybieramy dowolny wektor własny, np. odpowiadający parametrom $v_1=0, v_3=1$. Taki wektor już jest unormowany:

$$\mathbf{t}_1 = [0; 0; 1]$$

Trzeci z wektorów własnych, który musi być prostopadły do pozostałych, wyznaczamy jako iloczyn wektorowy pierwszych dwóch $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$: od razu będzie unormowany a przy tym jego zwrot będzie taki, że układ wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ będzie trójką prawoskrętną:

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right] \times [0; 0; 1] = \left[\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; 0\right]$$

WYZNACZANIE WEKTORÓW WŁASNYCH – METODA II

Wektory własne dla $T_1=150$:

$$(\mathbf{T}-T_1\mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -48 & 36 & 0 \\ 36 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wybieramy wektory zbudowane np. na pierwszym i trzecim wierszu (pierwszy i drugi dają nam wektory równoległe).

$$\mathbf{u} = [-48; 36; 0] \times [0; 0; -75] = [-2700; -3600; 0]$$

Wektor normujemy:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{[-2700; -3600; 2]}{\sqrt{2700^2 + 3600^2 + 0}} = \left[-\frac{2700}{4500}; -\frac{3600}{4500}; 0 \right] = \left[-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}; 0 \right]$$

Wektory własne dla $T_2 = T_3 = 75$:

$$(\mathbf{T} - T_2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 27 & 36 & 0 \\ 36 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektory z pierwszego i drugiego wiersza są do siebie równoległe, a trzeci wiersz daje nam wektor zerowy. W takim przypadku poszukujemy wektora własnego inaczej – zauważamy, że wektory odpowiadające dwóm pierwszym wierszom mają trzecią składową 0, zatem leżą w płaszczyźnie (x_1, x_2) . Wektorem do nich prostopadłym (tj. spełniającym powyższy układ równań) będzie wektor

$$\mathbf{t}_2 = [0; 0; 1]$$

Trzeci z wektorów własnych, który musi być prostopadły do pozostałych, wyznaczamy jako iloczyn wektorowy pierwszych dwóch $\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$: od razu będzie unormowany a przy tym jego zwrot będzie taki, że układ wektorów $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ będzie trójką prawoskrętną:

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 = \left[-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}; 0 \right] \times [0; 0; 1] = \left[-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0 \right]$$

MACIERZ PRZEJŚCIA

Dla wyniku np. z II metody:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -90 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \\ -60 & 45 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ZADANIE 4 (zagadnienie własne dwuwymiarowego symetrycznego tensora drugiego rzędu)

Wyznacz wartości i wektory własne tensora: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{bmatrix}$

ROZWIĄZANIE:

Wartości własne:

$$T_1 = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} = 50$$

$$T_2 = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right)^2 + T_{12}^2} = 25$$

Kąt zawarty między osią x_1 podstawowego układu współrzędnych a osią odpowiadającą pierwszej (większej) wartości własnej:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{T_{12}}{T_1 - T_{22}} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) \approx -53,13^\circ$$

Wektory własne:

$$\mathbf{t}_1 = [\cos \phi ; \sin \phi] = \left[\frac{3}{5} ; -\frac{4}{5} \right]$$

$$\mathbf{t}_2 = [-\sin \phi ; \cos \phi] = \left[\frac{4}{5} ; \frac{3}{5} \right]$$

Macierz przejścia:

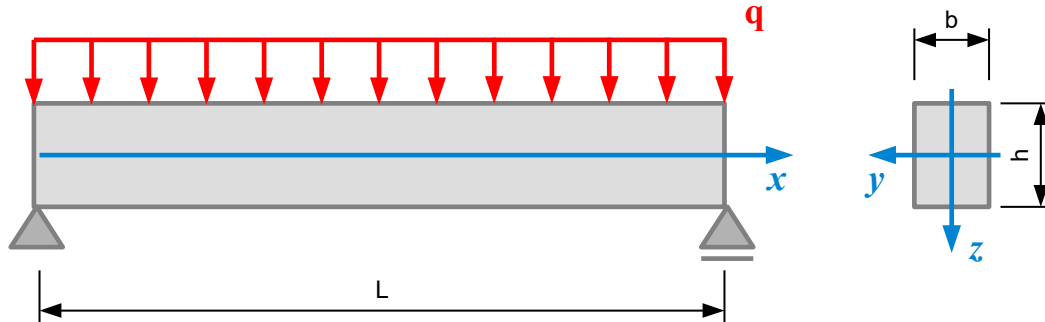
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -40 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 5 (zagadnienie własne dwuwymiarowego symetrycznego tensora drugiego rzędu)

Dana jest belka swobodnie o długości L i prostokątnym przekroju poprzecznym $b \times h$, podparta obciążona równomiernie obciążeniem q . Wyznacz wartości oraz kierunki naprężeń głównych w dowolnym punkcie belki.



- Jaki jest kierunek maksymalnych naprężeń rozciągających przy krawędzi przekroju w środku rozpiętości belki?
- Jaki jest kierunek maksymalnych naprężeń rozciągających w środku przekroju belki przy podporze?

ROZWIĄZANIE:

Stan naprężenia w dowolnym przekroju określają związki: $\sigma(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma(x, z) & \tau(x, z) \\ \tau(x, z) & 0 \end{bmatrix}$

Naprężenie normalne:
$$\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

Naprężenie styczne:
$$\tau(x, z) = \frac{Q_z(x) S_y(z)}{b I_y}$$

Rozkład momentów zginających:
$$M_y(x) = \frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2 = \frac{qx}{2} (L-x)$$

Rozkład siły poprzecznej:
$$Q_z(x) = \frac{qL}{2} - qx = q \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

Moment bezwładności przekroju:
$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Moment statyczny części przekroju:
$$S_y(z) = b \left(\frac{h}{2} - z \right) \left(z + \frac{\frac{h}{2} - z}{2} \right) = \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right]$$

Rozkład składowych stanu naprężenia:
$$\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z = \frac{6q}{bh^3} zx(L-x)$$

$$\tau(x, z) = \frac{6q}{bh^3} \left(\frac{L}{2} - x \right) \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Naprężenia główne:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \\ &= \frac{3q}{bh^3} \left[zx(L-x) + \sqrt{z^2 x^2 (L-x)^2 + 4\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2} \right] \\ \sigma_{min} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{1}{2}[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \\ &= \frac{3q}{bh^3} \left[zx(L-x) - \sqrt{z^2 x^2 (L-x)^2 + 4\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2} \right]\end{aligned}$$

Kąt między kierunkiem naprężenia maksymalnego a kierunkiem osi belki:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{max} - \sigma_{22}} = \frac{2\tau}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{4\left(\frac{L}{2} - x\right)\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{zx(L-x) + \sqrt{z^2 x^2 (L-x)^2 + 4\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2}}$$

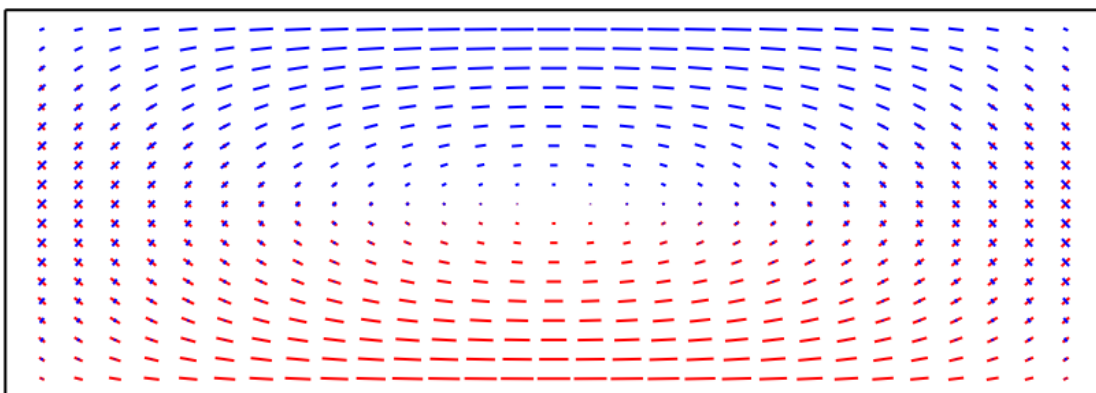
Kierunek maksymalnych naprężeń rozciągających w środku belki przy krawędzi przekroju:

$$\operatorname{tg} \phi \left(x = \frac{L}{2} ; z = \frac{h}{2} \right) = 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ$$

Kierunek maksymalnych naprężeń rozciągających przy podporze w środku przekroju:

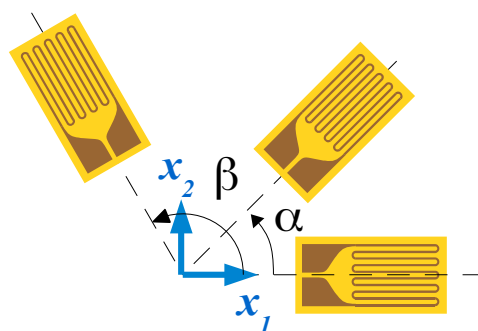
$$\operatorname{tg} \phi (x=0 ; z=0) = 1 \Rightarrow \phi = 45^\circ$$

Poniżej przedstawiono orientacje maksymalnych (kolorem czerwonym) i minimalnych (kolorem niebieskim) naprężeń głównych, tzw. wykres krzyżów – długość ramion krzyżów jest proporcjonalna do wielkości odpowiedniego naprężenia. Widoczne trajektorie naprężeń głównych.



ZADANIE 6 (Obrót płaskiego tensora drugiego rzędu)

Na powierzchnię materiału przyklejono rozetkę tensometryczną złożoną z trzech tensometrów, przy czym kąty między kierunkiem pierwszego i dwóch kolejnych są równe odpowiednio α i β . Materiał poddano obciążeniu. Wyznaczyć płaski stan odkształcenia znając odczyty ε_0 , ε_α i ε_β z wszystkich tensometrów.



ROZWIĄZANIE:

Każdy z tensometrów wyznacza składową odkształcenia ε_{11} w układzie współrzędnych, którego pierwsza oś pokrywa się z kierunkiem tensometru. Przyjmujemy, że pierwsza oś podstawowego przyjętego układu współrzędnych pokrywa się z kierunkiem przyklejenia pierwszego tensometru.

Płaski stan odkształcenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \quad - \text{pomierzone} \\ \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22} \quad - \text{niewiadome} \end{array}$$

Stan naprężenia w układzie obróconym o α :

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{11} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha \\ \varepsilon'_{12} = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{12} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Stan naprężenia w układzie obróconym o β :

$$\boldsymbol{\varepsilon}'' = \begin{bmatrix} \varepsilon''_{11} & \varepsilon''_{12} \\ \varepsilon''_{12} & \varepsilon''_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varepsilon''_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \beta + \varepsilon_{22} \sin^2 \beta + \varepsilon_{12} \sin 2\beta = \varepsilon_\beta \\ \varepsilon''_{22} = \varepsilon_{11} \sin^2 \beta + \varepsilon_{22} \cos^2 \beta - \varepsilon_{12} \sin 2\beta \\ \varepsilon''_{12} = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \sin 2\beta + \varepsilon_{12} \cos 2\beta \end{cases}$$

Z pomiarów tensometrycznych uzyskujemy wartości $\varepsilon_{11} = \varepsilon_0$, $\varepsilon'_{11} = \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon''_{11} = \varepsilon_\beta$, które zgodnie ze wzorami transformacyjnymi możemy wyrazić przez składowe stanu odkształcenia w podstawowym przyjętym układzie współrzędnych $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$. Stąd otrzymujemy układ równań na $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon'_{11} = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon''_{11} = \varepsilon_\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

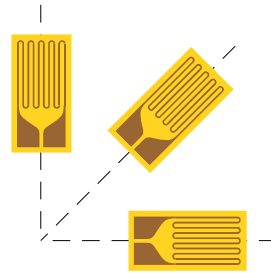
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \sin 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha - \varepsilon_0 \cos^2 \alpha \\ \varepsilon_\beta - \varepsilon_0 \cos^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_\alpha \sin 2\beta - \varepsilon_\beta \sin 2\alpha + (\sin 2\alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin 2\beta) \varepsilon_0}{\sin^2 \alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \sin^2 \beta} \\ \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_\beta \sin^2 \alpha - \varepsilon_\alpha \sin^2 \beta + (\cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) \varepsilon_0}{\sin^2 \alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \sin^2 \beta} \end{cases}$$

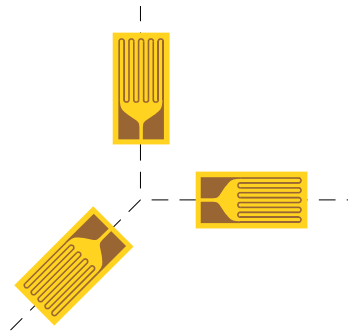
PRZYKŁADY:

Rozetki prostokątne:

$$\begin{matrix} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 90^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_\alpha - \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_\beta) \end{cases}$$

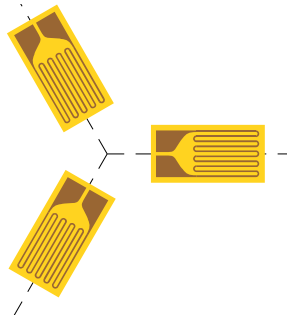


$$\begin{matrix} \alpha = 90^\circ \\ \beta = 225^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_\beta - \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha) \end{cases}$$



Rozetka równoramienna:

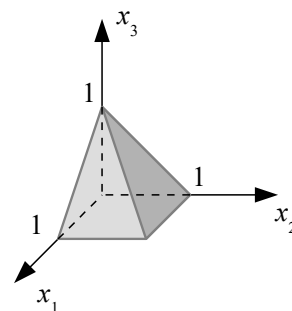
$$\begin{matrix} \alpha = 120^\circ \\ \beta = 240^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{3}[2(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - \varepsilon_0] \\ \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



ZADANIE 7 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Deformacja ciała przedstawionego na rysunku zadana jest równaniami w ramach opisu materialnego:

$$\begin{cases} x_1(t) = (t+1) X_1 \\ x_2(t) = (t+1) X_2 + 2t \\ x_3(t) = (t+1) X_3 + 2t^2 \end{cases}$$



Wyznacz konfigurację aktualną w chwilach $t_1 = 1\text{ s}$, $t_2 = 2\text{ s}$. Wyznacz gradient deformacji oraz sprawdź odwracalność równań deformacji.

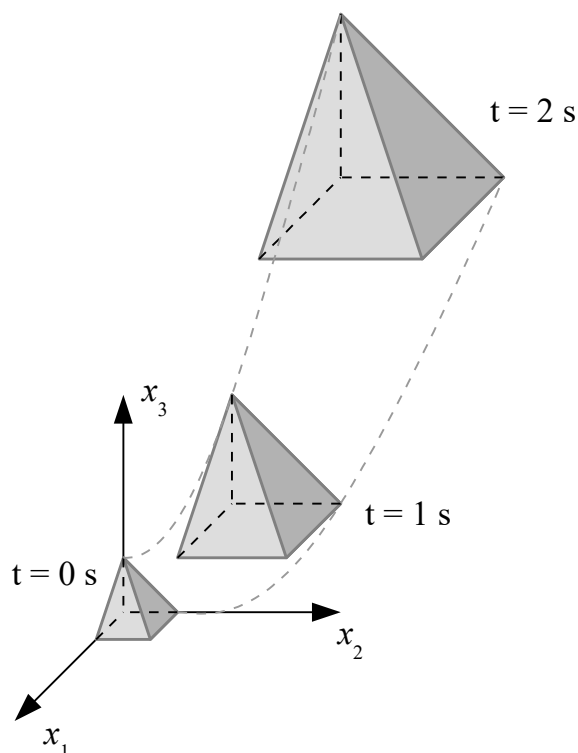
ROZWIĄZANIE:

Deformacja ma charakter liniowy (współrzędne przestrzenne są liniowymi funkcjami współrzędnych materialnych), zatem wszystkie odcinki proste przekształcają się w odcinki proste. Wystarczy zatem znaleźć położenie aktualne charakterystycznych punktów ciała: A, B, C, D oraz E. Ich współrzędne materialne są równe:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_A &= [0; 0; 0] \\ \mathbf{X}_B &= [1; 0; 0] \\ \mathbf{X}_C &= [1; 1; 0] \\ \mathbf{X}_D &= [0; 1; 0] \\ \mathbf{X}_E &= [0; 0; 1] \end{aligned}$$

Podstawienie powyższych wyników do równań deformacji dla kolejnych wartości t daje nam:

$t = 1\text{ s}$	$t = 2\text{ s}$
$\mathbf{x}_A(1) = [0; 2; 2]$	$\mathbf{x}_A(2) = [0; 4; 8]$
$\mathbf{x}_B(1) = [2; 2; 2]$	$\mathbf{x}_B(2) = [3; 4; 8]$
$\mathbf{x}_C(1) = [2; 4; 2]$	$\mathbf{x}_C(2) = [3; 7; 8]$
$\mathbf{x}_D(1) = [0; 4; 2]$	$\mathbf{x}_D(2) = [0; 7; 8]$
$\mathbf{x}_E(1) = [0; 2; 4]$	$\mathbf{x}_E(2) = [0; 4; 11]$



Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1) & 0 & 0 \\ 0 & (t+1) & 0 \\ 0 & 0 & (t+1) \end{bmatrix}$$

Związki deformacyjne będą lokalnie odwracalne wtedy, gdy ich **jakobian**, tj. wyznacznik gradientu deformacji, będzie niezerowy.

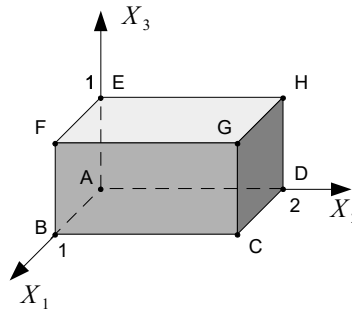
$$J = \det \mathbf{F} = \begin{vmatrix} (t+1) & 0 & 0 \\ 0 & (t+1) & 0 \\ 0 & 0 & (t+1) \end{vmatrix} = (t+1)^3$$

Ponieważ przyjmujemy $t > 0$ zatem $J > 0$ i **równania są lokalnie odwracalne**.

ZADANIE 8 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Dane są równania opisujące deformację w ramach opisu materialnego.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_3 \\ x_2 = 2X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$



- Sprawdź czy związki te są lokalnie odwracalne – jeśli tak, wyznacz równania deformacji w opisie przestrzennym.
- Wyznacz pole przemieszczeń zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym
- Sporządź szkic ilustrujący zdeformowany kształt obiektu, jak na rysunku powyżej.
- Jaki kształt przyjmie włókno materialne, które przed deformacją zawierało się w prostej AG? Jaka będzie jego długość po deformacji?
- Napisz równanie powierzchni zawierającą ściankę BCGF po deformacji?
- Jaka jest powierzchnia ścianki BCGF przed deformacją i po deformacji?

ROZWIĄZANIE:

Odwracalność równań deformacji sprawdzamy obliczając **jakobian** tego przekształcenia:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Wyznacznik $J > 0$, zatem w **każdym punkcie** równania są **odwracalne**. Układ równań opisujących deformację to układ równań liniowych, które możemy rozwiązać. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_3 \\ X_2 = \frac{1}{2}x_2 \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

POLE PRZEMIESZCZEŃ

- opis materialny:**

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{X}) = x_1(\mathbf{X}) - X_1 = -X_3 \\ u_2(\mathbf{X}) = x_2(\mathbf{X}) - X_2 = X_2 \\ u_3(\mathbf{X}) = x_3(\mathbf{X}) - X_3 = 0 \end{cases}$$

- opis przestrzenny:**

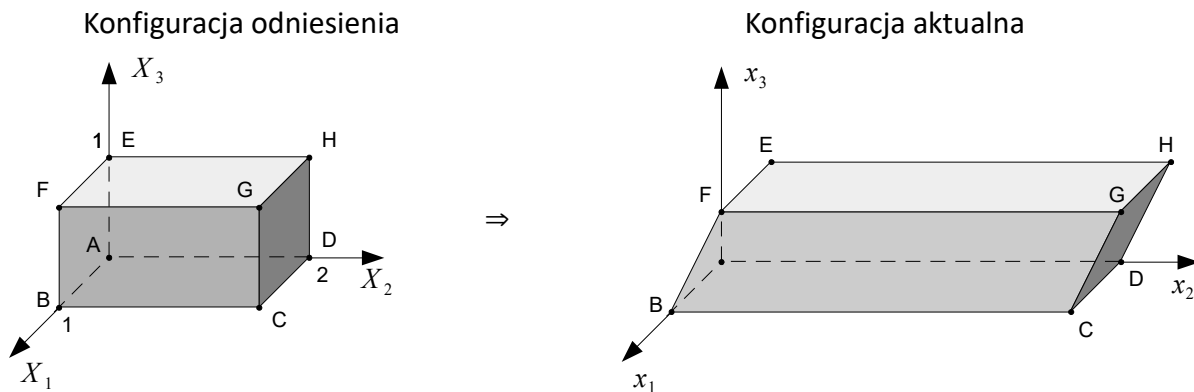
$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) = x_1 - X_1(\mathbf{x}) = -x_3 \\ u_2(\mathbf{x}) = x_2 - X_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2 \\ u_3(\mathbf{x}) = x_3 - X_3(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Przemieszczenia w opisie przestrzennym możemy również otrzymać wstawiając w przemieszczeniach w opisie materialnym związek $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$.

DEFORMACJA – PRZEMIESZCZENIE PUNKTÓW

Położenie punktów po deformacji $(x_1; x_2; x_3)$ znajdziemy podstawiając odpowiednie ich współrzędne przed deformacją $(X_1; X_2; X_3)$.

Punkt A:	$\mathbf{X}_A = [0; 0; 0] \rightarrow \mathbf{x}_A = [0; 0; 0]$	Punkt B:	$\mathbf{X}_B = [1; 0; 0] \rightarrow \mathbf{x}_B = [1; 0; 0]$
Punkt C:	$\mathbf{X}_C = [1; 2; 0] \rightarrow \mathbf{x}_C = [1; 4; 0]$	Punkt D:	$\mathbf{X}_D = [0; 2; 0] \rightarrow \mathbf{x}_D = [0; 4; 0]$
Punkt E:	$\mathbf{X}_E = [0; 0; 1] \rightarrow \mathbf{x}_E = [-1; 0; 1]$	Punkt F:	$\mathbf{X}_F = [1; 0; 1] \rightarrow \mathbf{x}_F = [0; 0; 1]$
Punkt G:	$\mathbf{X}_G = [1; 2; 1] \rightarrow \mathbf{x}_G = [0; 4; 1]$	Punkt H:	$\mathbf{X}_H = [0; 2; 1] \rightarrow \mathbf{x}_H = [-1; 4; 1]$



DEFORMACJA PROSTEJ AG

Odcinek zawierający punkty A i G przed deformacją opisują równania:

$$AG: \mathbf{X}_{AG}(\lambda) = \mathbf{X}_A + \lambda(\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_A) = \begin{cases} X_1 = \lambda \\ X_2 = 2\lambda \\ X_3 = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \langle 0; 1 \rangle$$

Długość włókna przed deformacją

$$|AG| = \int_{AG} dS = \int_{AG} \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} d\lambda = \sqrt{6} \int_0^1 d\lambda = \sqrt{6}$$

Odcinek AG po deformacji przyjmuje kształt dany równaniami:

$$AG: \mathbf{x}_{AG}(\lambda) = \begin{cases} x_1 = X_1 - X_3 \\ x_2 = 2X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \langle 0; 1 \rangle$$

Długość włókna po deformacji

$$|AG| = \int_{AG} ds = \int_{AG} \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda =$$

$$\int_0^1 \sqrt{0+4^2+1^2} d\lambda = \sqrt{17} \int_0^1 d\lambda = \sqrt{17}$$

Długość włókna AG po deformacji można również obliczyć za pomocą całki po konfiguracji odniesienia. W tym celu należy wyznaczyć materialny gradient deformacji \mathbf{F} oraz materialny tensor deformacji \mathbf{C} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Związek między długością nieskończenie małego liniowego elementu różniczkowego przed deformacją $dS = \sqrt{dX_i dX_i}$ i po deformacji ds jest następujący:

$$ds = \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j}$$

Długość włókna po deformacji możemy zatem obliczyć za pomocą całki po konfiguracji odniesienia (wykorzystujemy parametryzację krzywej przed deformacją):

$$|AG| = \int_{AG} ds = \int_{AG} \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} = \int_0^1 \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\lambda} \frac{dX_j}{d\lambda}} d\lambda =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{C_{11} \left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + C_{22} \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + C_{33} \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2 + 2C_{23} \frac{dX_2}{d\lambda} \frac{dX_3}{d\lambda} + 2C_{31} \frac{dX_3}{d\lambda} \frac{dX_1}{d\lambda} + 2C_{12} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_2}{d\lambda}} d\lambda =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (2)^2 + 2 \cdot (1)^2 + 2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{17} d\lambda = \sqrt{17} \int_0^1 d\lambda = \sqrt{17}$$

DEFORMACJA ŚCIANKI BCGF

Ścianka BCGF przed deformacją jest ścianką prostopadłą do osi X_1 i zawierającą punkty, dla których $X_1 = 1$. Równanie ścianki BCGF przed deformacją ma zatem postać:

$$BCGF: X_1 - 1 = 0$$

Powierzchnię ścianki BCGF przed deformacją wyznaczamy jako odpowiednią całkę:

$$A_R = \iint_{BCGF} dA_R = \int_{X_2=0}^2 \int_{X_3=0}^1 dX_2 dX_3 = 2$$

Równanie powierzchni zawierającej ściankę BCGF po deformacji otrzymamy wstawiając do powyższego równania odwrócone równania deformacji $\mathbf{X}(\mathbf{x})$:

$$BCGF: X_1 - 1 = 0 \\ x_1 + x_3 - 1 = 0$$

Powierzchnię ścianki BCGF wyznaczmy korzystając z zależności między infinitezymalnym elementem powierzchniowym przed deformacją i po deformacji:

$$dA = dA_R \cdot J \cdot \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})}$$

Odwrotność materialnego gradientu deformacji (tj. przestrzenny gradient deformacji):

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wektor normalny do BCGF przed deformacją: $\mathbf{N} = [1; 0; 0]^T$

$$\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} = [1; 0; 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1; 0; 1]$$

$$(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1; 0; 1] = 2 \Rightarrow \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})} = \sqrt{2}$$

$$J = \det \mathbf{F} = 2$$

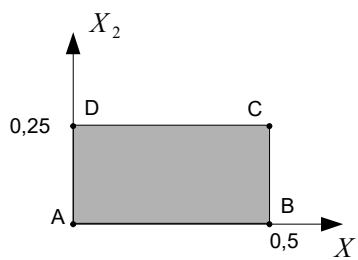
Powierzchnię ścianki BCGF po deformacji wyznaczamy jako odpowiednią całkę:

$$A = \iint_{BCGF} dA = \iint_{BCGF} J \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})} dA_R = \int_{X_2=0}^2 \int_{X_3=0}^1 2\sqrt{2} dX_2 dX_3 = 4\sqrt{2}$$

ZADANIE 9 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Dane są równania opisujące deformację w ramach opisu materialnego.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + 2 X_1^3 \end{cases}$$



- Sprawdź czy związki te są lokalnie odwracalne – jeśli tak, wyznacz równania deformacji w opisie przestrzennym.
- Sporządź szkic ilustrujący zdeformowany kształt obiektu, jak na rysunku powyżej.
- Wyznacz pole przemieszczeń zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym
- Napisz równanie opisujące kształt włókna AC po deformacji. Jaka jest długość włókna AC przed deformacją?

ROZWIĄZANIE:

Odwracalność związków sprawdzamy obliczając **jakobian** przekształcenia:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6X_1^2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Jakobian $J > 0$, zatem w każdym punkcie **związki są lokalnie odwracalne**. Nietrudno zapisać związki odwrócone:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = x_2 - 2 x_1^3 \end{cases}$$

WYZNACZENIE KONFIGURACJI AKTUALNEJ

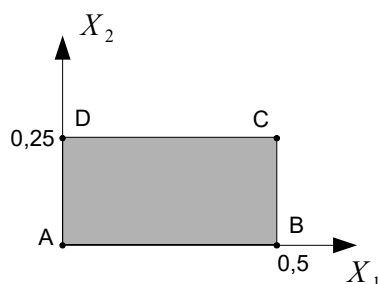
Punkt A: $\mathbf{X}_A = [0; 0] \rightarrow \mathbf{x}_A = [0; 0]$

Punkt B: $\mathbf{X}_B = [0,5; 0] \rightarrow \mathbf{x}_B = [0,5; 0,25]$

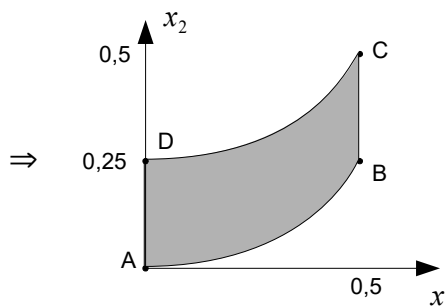
Punkt C: $\mathbf{X}_C = [0,5; 0,25] \rightarrow \mathbf{x}_C = [0,5; 0,5]$

Punkt D: $\mathbf{X}_D = [0; 0,25] \rightarrow \mathbf{x}_D = [0; 0,25]$

Konfiguracja odniesienia



Konfiguracja aktualna



POLE PRZEMIESZCZEŃ

- opis materialny:

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{X}) = x_1((\mathbf{X})) - X_1 = 0 \\ u_2(\mathbf{X}) = x_2((\mathbf{X})) - X_2 = 2X_1^3 \end{cases}$$

- opis przestrzenny:

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) = x_1 - X_1(\mathbf{x}) = 0 \\ u_2(\mathbf{x}) = x_2 - X_2(\mathbf{x}) = 2x_1^3 \end{cases}$$

DEFORMACJA WŁÓKNA AC

Odcinek zawierający punkty A i C przed deformacją opisują równania:

$$AC: \mathbf{X}_{AC} = \mathbf{X}_A + \lambda(\mathbf{X}_C - \mathbf{X}_A) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 0,5\lambda \\ X_2 = 0,25\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \langle 0; 1 \rangle$$

Długość włókna AC przed deformacją:

$$\begin{aligned} |AC| &= \int_{AC} dS = \int_{AC} \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2} = \int_{\lambda=0}^1 \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2} dX_1 = \int_0^1 \sqrt{(0,5)^2 + (0,25)^2} d\lambda = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4} \int_0^1 d\lambda = \frac{\sqrt{5}}{4} \approx 0,560 \end{aligned}$$

Odcinek AC po deformacji przyjmuje kształt krzywej danej równaniami:

$$AC: \mathbf{x} = \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + 2X_1^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5\lambda \\ x_2 = 0,25\lambda + 2(0,5\lambda)^3 = 0,25\lambda + 0,25\lambda^3 \end{cases}$$

Długość włókna AC po deformacji:

$$|AC| = \int_{AC} ds = \int_{AC} \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2} = \int_{\lambda=0}^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{(0,5)^2 + (0,25 + 0,75\lambda^2)^2} d\lambda \approx 0,723$$

Długość włókna AC po deformacji można również obliczyć za pomocą całki po konfiguracji odniesienia. W tym celu należy wyznaczyć materialny gradient deformacji \mathbf{F} oraz materialny tensor deformacji \mathbf{C} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6X_1^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 6X_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6X_1^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36X_1^4 + 1 & 6X_1^2 \\ 6X_1^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Związek między długością nieskończenie małego liniowego elementu różniczkowego przed deformacją $dS = \sqrt{dX_i dX_i}$ i po deformacji ds jest następujący:

$$ds = \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j}$$

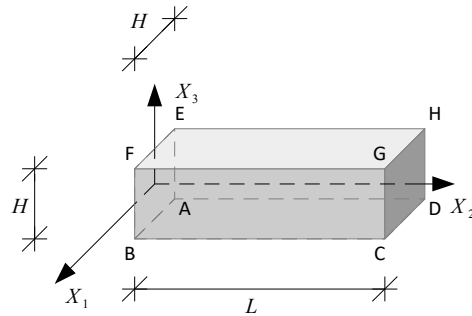
Długość włókna po deformacji możemy zatem obliczyć za pomocą całki po konfiguracji odniesienia (wykorzystujemy parametryzację krzywej przed deformacją):

$$\begin{aligned} |AC| &= \int_{AC} ds = \int_{AC} \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} = \int_0^1 \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\lambda} \frac{dX_j}{d\lambda}} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{C_{11} \left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + C_{22} \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + 2C_{12} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_2}{d\lambda}} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{(36X_1^4 + 1) \cdot (0,5)^2 + 1 \cdot (0,25)^2 + 2 \cdot (6X_1^2) \cdot 0,5 \cdot 0,25} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{9X_1^4 + 1,5X_1^2 + 0,3125} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{9 \cdot (0,5\lambda)^4 + 1,5(0,5\lambda)^2 + 0,3125} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{0,5625\lambda^4 + 0,375\lambda^2 + 0,3125} d\lambda = 0,723 \end{aligned}$$

ZADANIE 10 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Deformacja sprężysta jest zadana w opisie materialnym następującymi równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cdot \left(1 - \frac{X_2}{L}\right) + \frac{X_2}{L\sqrt{2}}(X_1 - X_3) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \cdot \left(1 - \frac{X_2}{L}\right) + \frac{X_2}{L\sqrt{2}}(X_1 + X_3) \end{cases}$$



Wyznaczyć konfigurację aktualną prostopadłościanu jak na rysunku. Sprawdzić odwracalność równań deformacji – jeśli równania są odwracalne, to wyznaczyć równania deformacji w opisie przestrzennym oraz wektor przemieszczenia zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym.

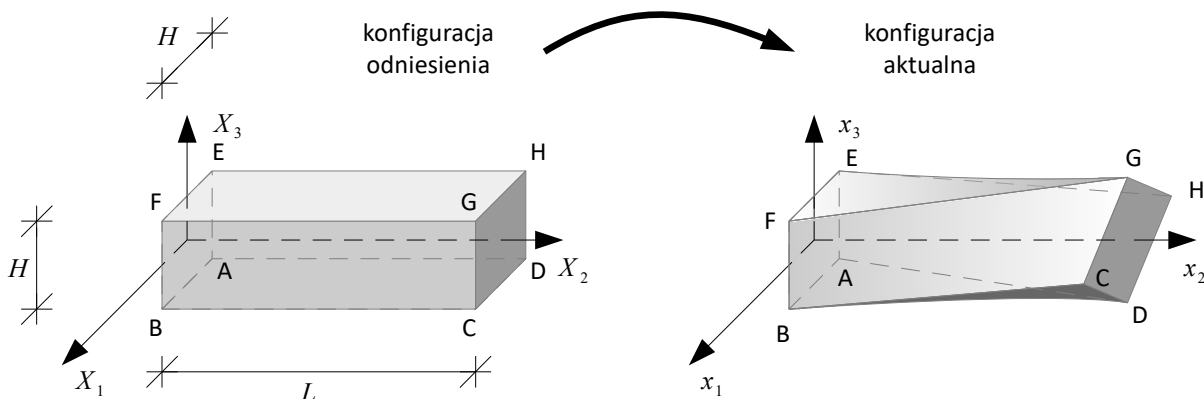
ROZWIĄZANIE:

KONFIGURACJA AKTUALNA

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \mathbf{x}[-H; 0; -H] = [-H; 0; -H] \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{x}[H; 0; -H] = [H; 0; -H] \\ \mathbf{x}_C &= \mathbf{x}[H; L; -H] = [\sqrt{2}H; L; 0] \\ \mathbf{x}_D &= \mathbf{x}[-H; L; -H] = [0; L; -\sqrt{2}H] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_E &= \mathbf{x}[H; 0; H] = [H; 0; H] \\ \mathbf{x}_F &= \mathbf{x}[-H; 0; H] = [-H; 0; H] \\ \mathbf{x}_G &= \mathbf{x}[H; L; H] = [0; L; \sqrt{2}H] \\ \mathbf{x}_H &= \mathbf{x}[-H; L; H] = [-\sqrt{2}H; L; 0] \end{aligned}$$

Po podstawieniu stałych wartości X_1, X_3 odpowiadających kolejnym krawędziom AD, BC, FG, EH, otrzymujemy liniowe zależności x_1, x_2, x_3 od X_2 , zatem krawędzie te pozostają odcinkami prostymi. Podobne rozumowanie dotyczy pozostałych krawędzi prostopadłościanu, równoległych do X_1 oraz do X_3 . Szkic konfiguracji aktualnej przedstawiony jest poniżej:



GRADIENT DEFORMACJI

Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{X_2(1-\sqrt{2})+L\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} & \frac{X_1(1-\sqrt{2})-X_3}{L\sqrt{2}} & -\frac{X_2}{L\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{X_2}{L\sqrt{2}} & \frac{X_3(1-\sqrt{2})+X_1}{L\sqrt{2}} & \frac{X_2(1-\sqrt{2})+L\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Wyznacznik gradientu deformacji jest równy: $J = \det \mathbf{F} = \frac{(2-\sqrt{2})X_2^2}{L^2} + \frac{(\sqrt{2}-2)X_2}{L} + 1$

Jest to kwadratowa funkcja zmiennej X_2 . Musimy zbadać znak tej funkcji. Współczynnik przy drugiej potędze jest dodatni, zatem ramiona paraboli zwrócone są w górę. Ponadto, wyróżnik odpowiadającego równania kwadratowego jest ujemny $\Delta = -2/L^2$, więc funkcja ta przyjmuje tylko wartości dodatnie. W takim razie, **równania deformacji są lokalnie odwracalne w każdym punkcie ciała.**

OPIS PRZESTRZENNY

Z drugiego równania od razu wyznaczamy $X_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$ i podstawiamy do pozostałych równań, otrzymując układ równań liniowych z niewiadomymi X_1, X_3 . Po rozwiązaniu tego układu, otrzymujemy równania deformacji w opisie przestrzennym:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{L[(\sqrt{2}-2)x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + 2x_1L]}{2[(2-\sqrt{2})x_2 - (2-\sqrt{2})Lx_2 + L^2]} \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = \frac{L[(\sqrt{2}-2)x_2x_3 - \sqrt{2}x_1x_2 + 2x_3L]}{2[(2-\sqrt{2})x_2 - (2-\sqrt{2})Lx_2 + L^2]} \end{cases}$$

WEKTOR PRZEMIESZCZENIA

- opis materialny

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = X_1 \cdot \left(1 - \frac{X_2}{L}\right) + \frac{X_2}{L\sqrt{2}}(X_1 - X_3) - X_1 \\ u_2 = x_2 - X_2 = 0 \\ u_3 = x_3 - X_3 = X_3 \cdot \left(1 - \frac{X_2}{L}\right) + \frac{X_2}{L\sqrt{2}}(X_1 + X_3) - X_3 \end{cases}$$

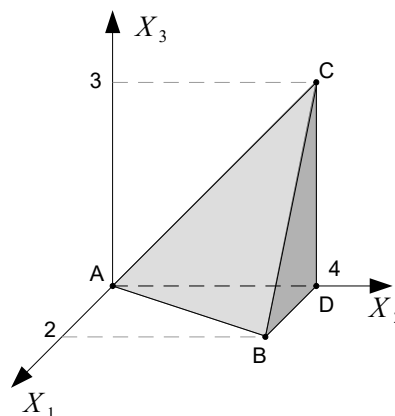
- opis przestrzenny

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = x_1 - \frac{L[(\sqrt{2}-2)x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + 2x_1L]}{2[(2-\sqrt{2})x_2 - (2-\sqrt{2})Lx_2 + L^2]} \\ u_2 = x_2 - X_2 = 0 \\ u_3 = x_3 - X_3 = x_3 - \frac{L[(\sqrt{2}-2)x_2x_3 - \sqrt{2}x_1x_2 + 2x_3L]}{2[(2-\sqrt{2})x_2 - (2-\sqrt{2})Lx_2 + L^2]} \end{cases}$$

ZADANIE 11 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Dane są równania opisujące deformację w ramach opisu materialnego.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_3 + 2 \\ x_2 = -2X_1 + X_2 - X_3 + 4 \\ x_3 = X_1 + X_3 \end{cases}$$



- Sprawdź czy związki te są lokalnie odwracalne – jeśli tak, wyznacz równania deformacji w opisie przestrzennym.
- Wyznacz pole przemieszczeń zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym
- Sporządź szkic ilustrujący zdeformowany kształt obiektu, jak na rysunku powyżej.
- Napisz równanie zawierające włókno BC po deformacji. Jaka jest jego długość?
- Wyznacz równanie płaszczyzny zawierającej punkty ABC po deformacji.
- Jaka jest objętość ciała przed deformacją i po deformacji?

ROZWIĄZANIE:

Odwracalność równań deformacji sprawdzamy obliczając **jakobian** tego przekształcenia:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Wyznacznik $J > 0$, zatem **w każdym punkcie równania są odwracalne**. Układ równań opisujących deformację to układ równań liniowych, które możemy rozwiązać. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - 1 \\ X_2 = \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 5 \\ X_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + 1 \end{cases}$$

POLE PRZEMIESZCZEŃ

- opis materialny:

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{X}) = x_1((\mathbf{X})) - X_1 = -X_3 + 2 \\ u_2(\mathbf{X}) = x_2((\mathbf{X})) - X_2 = -2X_1 - X_3 + 4 \\ u_3(\mathbf{X}) = x_3((\mathbf{X})) - X_3 = X_1 \end{cases}$$

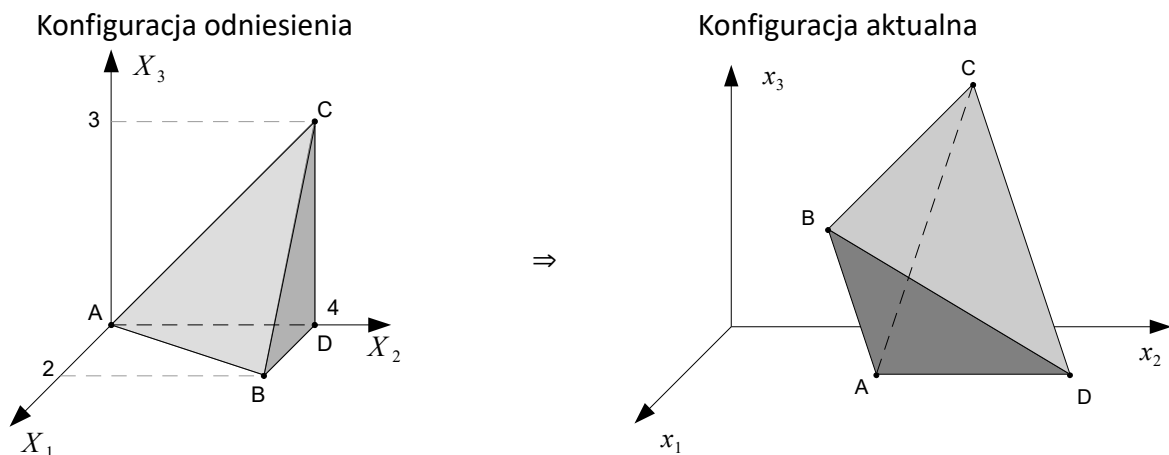
- opis przestrzenny:

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) = x_1 - X_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + 1 \\ u_2(\mathbf{x}) = x_2 - X_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_3 + 5 \\ u_3(\mathbf{x}) = x_3 - X_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 - 1 \end{cases}$$

WYZNACZENIE KONFIGURACJI AKTUALNEJ

Położenie punktów po deformacji $(x_1; x_2; x_3)$ znajdziemy podstawiając odpowiednie ich współrzędne przed deformacją $(X_1; X_2; X_3)$.

Punkt A: $\mathbf{X}_A = [0; 0; 0] \rightarrow \mathbf{x}_A = [2; 4; 0]$
 Punkt B: $\mathbf{X}_B = [2; 4; 0] \rightarrow \mathbf{x}_B = [4; 4; 2]$
 Punkt C: $\mathbf{X}_C = [0; 4; 4] \rightarrow \mathbf{x}_C = [-2; 4; 4]$
 Punkt D: $\mathbf{X}_D = [0; 4; 0] \rightarrow \mathbf{x}_D = [2; 8; 0]$



DEFORMACJA WŁÓKNA BC

Odcinek BC przed deformacją opisują równania:

$$\mathbf{X}_{BC}(\lambda) = \mathbf{X}_B + \lambda(\mathbf{X}_C - \mathbf{X}_B) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 2 + \lambda(0 - 2) = 2 - 2\lambda \\ X_2 = 4 + \lambda(4 - 4) = 4 \\ X_3 = 0 + \lambda(4 - 0) = 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

Długość włókna BC przed deformacją:

$$|BC| = \int_K dS = \int_K \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \int_{\lambda=0}^1 \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(-2)^2 + 0 + (4)^2} d\lambda = 2\sqrt{5} \int_0^1 \lambda = 2\sqrt{5}$$

Odcinek BC po deformacji opisują równania:

$$\mathbf{x}(\lambda) = \begin{cases} x_1 = X_1 - X_3 + 2 \\ x_2 = -2X_1 + X_2 - X_3 + 4 \\ x_3 = X_1 + X_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 6\lambda \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

Długość włókna BC po deformacji możemy obliczyć na dwa sposoby:

- jako całkę wzdłuż krzywej BC w opisie przestrzennym
- jako całkę wzdłuż krzywej BC w opisie materialnym z wykorzystaniem tensora deformacji

Długość włókna BC po deformacji:

$$\begin{aligned} |BC| &= \int_K ds = \int_K \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = \int_{\lambda=0}^1 \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{(-6)^2 + 0 + (2)^2} d\lambda = 2\sqrt{10} \int_0^1 \lambda = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Całkę tę można również obliczyć w opisie materialnym wykorzystując tensor deformacji:

Gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |BC| &= \int_K ds = \int_K \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} = \int_{\lambda=0}^1 \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\lambda} \frac{dX_j}{d\lambda}} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{C_{11} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_1}{d\lambda} + C_{12} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_2}{d\lambda} + \dots + C_{33} \frac{dX_3}{d\lambda} \frac{dX_3}{d\lambda}} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{[6 \cdot (-2) \cdot (-2)] + 2[(-2) \cdot (-2) \cdot 0] + 2[2 \cdot (-2) \cdot 4] + [1 \cdot 0 \cdot 0] + 2[(-1) \cdot 0 \cdot 4] + [3 \cdot 4 \cdot 4]} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{24 - 32 + 48} d\lambda = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

W sumie względem ij pod pierwiastkiem skorzystaliśmy z symetrii tensora \mathbf{C} :

$$C_{ij} \frac{dX_i}{d\lambda} \frac{dX_j}{d\lambda} = C_{ji} \frac{dX_j}{d\lambda} \frac{dX_i}{d\lambda}$$

DEFORMACJA PŁASZCZYZNY ABC

Równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $\mathbf{n}=[a, b, c]$ to: $a X_1 + b X_2 + c X_3 + d = 0$

Wektor normalny do płaszczyzny możemy wyznaczyć jako iloczyn wektorowy dwóch wektorów leżących na tej płaszczyźnie, tj. łączących punkty do niej należące, np.:

$$\vec{AB} = [2; 4; 0] \quad \vec{AC} = [0; 4; 4] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = [16; -8; 8]$$

Możemy przyjąć dowolny równoległy wektor, np. $\mathbf{n}=[2, -1, 1]$. **Równanie płaszczyzny ABC przed deformacją** przyjmuje postać:

$$2 X_1 - X_2 + X_3 + d = 0$$

Parametr d wyznaczamy z warunku, że punkty A, B i C muszą należeć do płaszczyzny. Zapisując ten warunek dla punktu A otrzymujemy: $2 \cdot 0 - 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$. Łatwo sprawdzić, że równanie to spełniają również współrzędne punktów B i C.

Płaszczyznę ABC przed deformacją opisuje równanie: $ABC: 2 X_1 - X_2 + X_3 = 0$

Równanie płaszczyzny po deformacji uzyskujemy podstawiając związki $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$:

$$ABC: 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3 - 1 \right) - \left(\frac{1}{2} x_1 + x_2 + \frac{3}{2} x_3 - 5 \right) + \left(-\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_3 + 1 \right) = 0$$

$$-x_2 + 4 = 0$$

ZMIANA OBJĘTOŚCI CIAŁA

Pierwotna objętość ciała jest równa objętości wyjściowego ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \right) \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

Objętość tę można również obliczyć za pomocą odpowiedniej całki potrójnej:

$$V_R = \iiint_{V_R} dV_R = \int_{X_1=0}^2 \int_{X_2=2X_1}^4 \int_{X_3=0}^{X_2-2X_1} dX_1 dX_2 dX_3 = \int_{X_1=0}^2 \int_{X_2=2X_1}^4 [X_2 - 2X_1] dX_1 dX_2 =$$

$$= \int_{X_1=0}^2 \left[\frac{X_2^2}{2} - 2X_1 X_2 \right]_{X_2=2X_1}^4 dX_1 = \int_0^2 [8 - 8X_1 + 2X_1^2] dX_1 = \left[8X_1 - 4X_1^2 + \frac{2}{3}X_1^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

Objętość po deformacji jest równa: $V = \iiint_V dV = \iiint_{V_R} J dV_R$

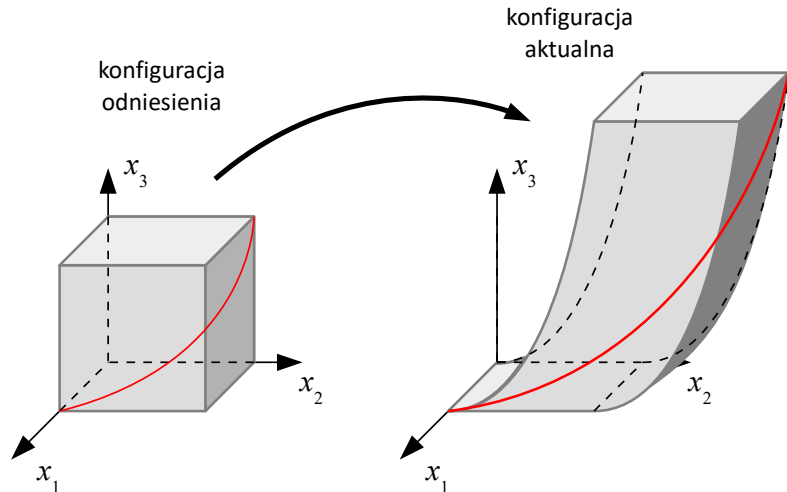
Ponieważ jacobian przekształcenia jest stały (taki sam w każdym punkcie), więc można go wyłączyć przed całkę, skąd otrzymujemy:

$$V = J \iiint_{V_R} dV_R = J \cdot V_R = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$$

ZADANIE 12 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Dany jest sprężysty sześcian o krawędzi długości 2, którego deformacja opisana jest w ramach opisu materialnego równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + X_3 \\ x_3 = X_3^2 \end{cases}$$



Jak w wyniku deformacji zmieni się długość krzywej materialnej danej równaniami parametrycznymi:

$$\begin{cases} X_1 = 2(1-\lambda) \\ X_2 = 2\lambda \\ X_3 = 2\lambda^2 \end{cases}, \quad \lambda \in (0,1)$$

ROZWIĄZANIE:

Długość krzywej w konfiguracji odniesienia wyznaczamy jako całkę krzywoliniową niezorientowaną z funkcji jednostkowej określonej na tej krzywej:

$$\begin{aligned} L_r &= \int dS = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (4\lambda)^2} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{8+16\lambda^2} d\lambda = \operatorname{arsinh} \sqrt{2} + \sqrt{6} \approx 3,5957 \end{aligned}$$

Aby znaleźć długość tej krzywej po deformacji musimy wyznaczyć **gradient deformacji**:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2X_3 \end{bmatrix}$$

oraz **tensor deformacji**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4X_3^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Długość krzywej w konfiguracji aktualnej wyznaczamy jako całkę krzywoliniową niezorientowaną całkującą zdeformowane liniowe elementy różniczkowe:

$$\begin{aligned} L &= \int ds = \int \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} = \int_0^1 \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\lambda} \frac{dX_j}{d\lambda}} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{C_{11} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_1}{d\lambda} + C_{12} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_2}{d\lambda} + \dots + C_{33} \frac{dX_3}{d\lambda} \frac{dX_3}{d\lambda}} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (2)^2 + 1 \cdot (2) \cdot (4\lambda) + 1 \cdot (4\lambda) \cdot (2) + (4X_3^2 + 1) \cdot (4\lambda)^2} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (2)^2 + 1 \cdot (2) \cdot (4\lambda) + 1 \cdot (4\lambda) \cdot (2) + (4(2\lambda^2)^2 + 1) \cdot (4\lambda)^2} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{256\lambda^6 + 16\lambda^2 + 16\lambda + 8} d\lambda \approx 6,5666 \end{aligned}$$

W powyższej całce podstawiliśmy równania parametryczne krzywej w miejsce współrzędnych materialnych – wartości tych współrzędnych na krzywej, wzdłuż której całkujemy, są określone właśnie przez te równania jako funkcje parametru krzywej.

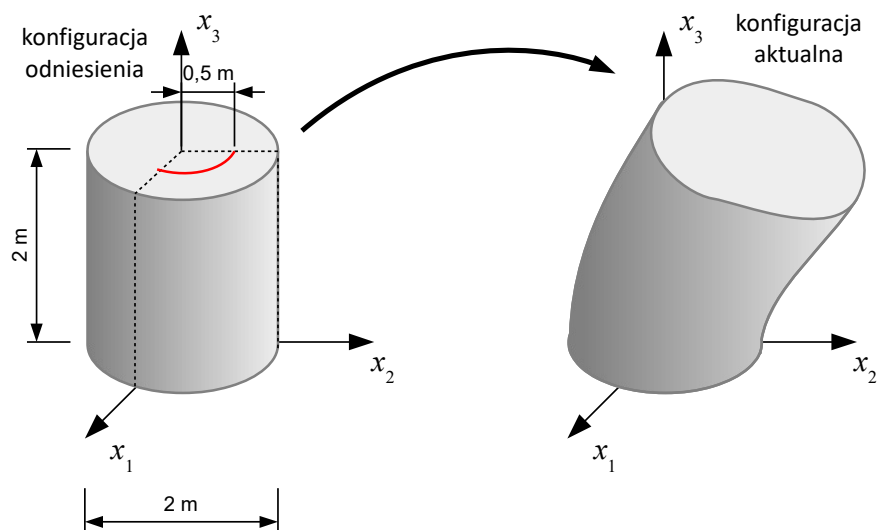
Długość krzywej przed deformacją: $L_r \approx 3,5957$

Długość krzywej po deformacji: $L \approx 6,5666$

ZADANIE 13 (deformacja ciała – opis materialny i opis przestrzenny)

Walec o wysokości 2m i średnicy podstawy 2m podlega deformacji opisanej równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + \frac{1}{4} X_3^2 \\ x_3 = X_3 \left(1 - \frac{1}{4} X_2^3\right) \end{cases}$$



Znaleźć powierzchnię górnej ścianki walca przed i po deformacji oraz długość włókna materialnego, które ma kształt łuku kołowego zawartego w górnej ściance, zawartego w pierwszym oktancie przyjętego układu współrzędnych i oddalonego o 0,5m od osi walca, przed i po deformacji.

ROZWIĄZANIE:

ZMIANA DŁUGOŚCI KRZYWEJ:

Włókno materialne przed deformacją ma długość równą ćwiertci obwodu koła o promieniu 0,5m:

$$L_R = \frac{2\pi R}{4} \approx 0,7854 \text{ m}$$

Aby wyznaczyć długość tego włókna po deformacji, musimy wyznaczyć gradient deformacji oraz tensor deformacji. **Gradient deformacji:**

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{X_3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} X_2^2 X_3 & 1 - \frac{1}{4} X_2^3 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik gradientu deformacji $J = 1 + \frac{3}{8} X_2^2 X_3^2 - \frac{1}{4} X_2^3$ jest dodatni w każdym punkcie konfiguracji odniesienia.

Tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 + 9X_2^4 X_3^2 & X_3(8 - 12X_2^2 + 3X_2^5) \\ 0 & X_3(8 - 12X_2^2 + 3X_2^5) & 16 - 8X_2^3 + X_2^6 + 4X_3^2 \end{bmatrix}$$

Krzywą przed deformacją możemy sparametryzować współrzędną kątową walcowego układu współrzędnych:

$$\begin{cases} X_1 = r \cos \phi \\ X_2 = r \sin \phi \\ X_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \\ \phi = \arctg \frac{X_2}{X_1} \\ z = X_3 \end{cases} \Rightarrow K: \begin{cases} r = 0,5 \\ \phi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ z = 2 \end{cases}$$

Długość krzywej po deformacji możemy zatem wyrazić następująco:

$$L = \int ds = \int \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\phi} \frac{dX_j}{d\phi}} d\phi$$

Niezerowe składniki sumy pod pierwiastkiem (z uwzględnieniem symetrii tensora):

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{dX_1}{d\phi} \frac{dX_1}{d\phi} &= (1) \cdot (-r \sin \phi)^2 = r^2 \sin^2 \phi \\ C_{22} \frac{dX_2}{d\phi} \frac{dX_2}{d\phi} &= \left[1 + \frac{9}{16} (r \sin \phi)^4 z^2 \right] \cdot (r \cos \phi)^2 \\ 2C_{23} \frac{dX_2}{d\phi} \frac{dX_3}{d\phi} &= \frac{z}{16} [8 - 12(r \sin \phi)^2 + 3(r \sin \phi)^5] \cdot (r \cos \phi) \cdot 0 = 0 \\ C_{33} \frac{dX_3}{d\phi} \frac{dX_3}{d\phi} &= \frac{1}{16} [16 - 8(r \sin \phi)^3 + (r \sin \phi)^6 + 4z^2] \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Obliczamy całkę, uwzględniając ustalone wartości r i z :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\phi} \frac{dX_j}{d\phi}} d\phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 \sin^2 \phi + \left[1 + \frac{9}{16} (r \sin \phi)^4 z^2 \right] r^2 \cos^2 \phi} d\phi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 \phi + \frac{1}{4} \left[1 + \frac{9}{64} \sin^4 \phi \right] \cos^2 \phi} d\phi \approx 0,7888 \end{aligned}$$

Długość włókna materialnego po deformacją: $L \approx 0,7888 \text{ m}$

ZMIANA POŁA POWIERZCHNI:

Pole górnej ścianki przed deformacją jest polem koła o promieniu 0,5m:

$$A_R = \pi R^2 = 3,1416 \text{ m}^2$$

Związek między różniczkowymi elementami powierzchniowymi przed i po deformacji jest następujący:

$$dA = J \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T} dA_R$$

Jakobian przekształcenia:

$$J = 1 + \frac{3}{8} X_2^2 X_3^2 - \frac{1}{4} X_2^3$$

Normalna do powierzchni ścianki przed deformacją:

$$\mathbf{N}^T = [0; 0; 1]$$

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \left(1 - \frac{1}{4} X_2^3 \right) & -\frac{X_3}{2J} \\ 0 & \frac{3 X_2^2 X_3}{4J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że przestrzenny gradient deformacji, tj. odwrotność materialnego gradientu deformacji został wyrażony jako funkcja współrzędnych materialnych (opis materialny). Dalsze rachunki:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3 X_2^2 X_3}{4J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T &= \frac{1}{J^2} \left(1 + \frac{9}{16} X_2^4 X_3^2 \right) \\ J \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T} &= \sqrt{1 + \frac{9}{16} X_2^4 X_3^2} \end{aligned}$$

Ponownie wykorzystamy współrzędne walcowe. Powierzchnia ścianki górnej po deformacji wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} A &= \iint_A dA = \iint_{A_R} J \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T} dA_R = \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} J \sqrt{(\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{F}^{-1})^T} r d\phi dr = \\ &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{9}{16} (r \sin \phi)^4 z^2} r d\phi dr \end{aligned}$$

Obliczamy całkę, uwzględniając ustaloną wartość z :

$$A = \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{9}{4} r^6 \sin^4 \phi} d\phi dr \approx 3,5136 \text{ m}^2$$

Pole górnej ścianki po deformacji: $A \approx 3,5136 \text{ m}^2$

ZADANIE 14 (Pochodna materialna)

Dane jest pole prędkości zadane w opisie materialnym.

$$\begin{cases} v_1 = -2t X_2 \\ v_2 = 2t X_1 \\ v_3 = 6t^2 + X_3 \end{cases}$$

- Wyznacz równania opisujące deformację zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym
- Wyznacz pole prędkości w opisie przestrzennym.
 - podstawiając równania deformacji do funkcji prędkości w opisie materialnym
 - obliczając pochodną materialną równań deformacji w opisie przestrzennym
- Wyznacz pole przyspieszeń w opisie materialnym i przestrzennym.

ROZWIĄZANIE:

Równania opisujące deformację w opisie materialnym otrzymamy przez scałkowanie składowych wektora prędkości:

$$\begin{aligned} x_1 &= \int v_1 dt = \int [-2t X_2] dt + C_1 = -t^2 X_2 + C_1 \\ x_2 &= \int v_2 dt = \int [2t X_1] dt + C_2 = t^2 X_1 + C_2 \\ x_3 &= \int v_3 dt = \int [6t^2 + X_3] dt + C_3 = 2t^3 + t X_3 + C_3 \end{aligned}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunku, że w chwili początkowej ciało zajmuje konfigurację początkową, tj. $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{X}$:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = C_1 \equiv X_1 \\ x_2(t=0) = C_2 \equiv X_2 \\ x_3(t=0) = C_3 \equiv X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = X_1 \\ C_2 = X_2 \\ C_3 = X_3 \end{cases}, \text{ stąd ostatecznie } \begin{cases} x_1 = -t^2 X_2 \\ x_2 = t^2 X_1 \\ x_3 = 2t^3 + t X_3 \end{cases}$$

Odwracalność tych związków sprawdzimy wyznaczając jacobian tego przekształcenia:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -t^2 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^5$$

Dla dowolnej wartości $t > 0$ wyznacznik ten zawsze przyjmuje wartość $J > 0$. **Związki są zatem lokalnie odwracalne w każdym punkcie i w każdej chwili.** Z łatwością odwracamy każde z równań:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{x_2}{t^2} \\ X_2 = -\frac{x_1}{t^2} \\ X_3 = \frac{x_3}{t} - 2t^2 \end{cases}$$

Pole prędkości w opisie przestrzennym wyznaczyć możemy na dwa sposoby. Po pierwsze, możemy podstawić powyższe związki do zadanego w opisie materialnym pola prędkości. Otrzymamy:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2x_1}{t} \\ v_2 = \frac{2x_2}{t} \\ v_3 = \frac{x_3}{t} + 4t^2 \end{cases}$$

Ten sam wynik uzyskamy obliczając pochodną materialną z przestrzennego wektora przemieszczenia. Najpierw wyznaczmy **wektor przemieszczenia w opisie przestrzennym**:

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = x_1 - \frac{x_2}{t^2} \\ u_2 = x_2 - X_2 = x_2 + \frac{x_1}{t^2} \\ u_3 = x_3 - X_3 = x_3 \left(1 - \frac{1}{t}\right) + 2t^2 \end{cases}$$

Pochodna materialna

$$\begin{cases} v_1 = \frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \\ v_2 = \frac{du_2}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \\ v_3 = \frac{du_3}{dt} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \end{cases},$$

co możemy zapisać:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} v_3 \\ v_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} v_3 \\ v_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} v_3 \end{cases}$$

Powyższy układ równań stanowi układ 3 równań liniowych na 3 składowe wektora prędkości

v_1, v_2, v_3 w opisie przestrzennym.

$$\begin{bmatrix} (1)-1 & -\frac{1}{t^2} & 0 \\ \frac{1}{t^2} & (1)-1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{1}{t}\right)-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2x_2}{t^3} \\ \frac{2x_1}{t^3} \\ -\frac{x_3}{t^2}-4t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_1}{t} \\ \frac{2x_2}{t} \\ \frac{x_3}{t}+4t^2 \end{bmatrix}$$

Pole przyspieszeń w opisie materialnym wyznaczamy obliczając pochodne cząstkowe składowych pola prędkości względem czasu:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} = -2X_2 \\ a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} = 2X_1 \\ a_3 = \frac{\partial v_3}{\partial t} = 12t \end{cases}$$

Pole przyspieszeń w opisie przestrzennym wyznaczmy obliczając pochodną materialną pola prędkości:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 \\ a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3 \\ a_3 = \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} v_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{2x_1}{t^2} + \left(\frac{2}{t}\right)\left(\frac{2x_1}{t}\right) + 0 \cdot \left(\frac{2x_2}{t}\right) + 0 \cdot \left(\frac{x_3}{t} + 4t^2\right) \\ a_2 = -\frac{2x_2}{t^2} + 0 \cdot \left(\frac{2x_1}{t}\right) + \left(\frac{2}{t}\right)\left(\frac{2x_2}{t}\right) + 0 \cdot \left(\frac{x_3}{t} + 4t^2\right) \\ a_3 = 8t - \frac{x^3}{t^2} + 0 \cdot \left(\frac{2x_1}{t}\right) + 0 \cdot \left(\frac{2x_2}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{x_3}{t} + 4t^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2x_1}{t^2} \\ a_2 = \frac{2x_2}{t^2} \\ a_3 = 12t \end{cases}$$

Ten sam wynik uzyskalibyśmy ze składowych przyspieszenia w opisie materialnym, wyrażając współrzędne materialne przez współrzędne przestrzenne.

ZADANIE 15 (rozkład biegunowy trójwymiarowego tensora deformacji)

Dokonaj rozkładu biegunowego tensora deformacji dla deformacji zadanej równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 X_1 + 0,8 X_2 \\ x_2 = 0,6 X_2 + 1,5 X_3 \\ x_3 = 1,4 X_1 + X_3 \end{cases}$$

Zilustruj działanie tensora obrotu oraz tensorów rozciągnięcia na włókno materialne $d\mathbf{X} = [1,0,0]$.

ROZWIĄZANIE:

Gradient deformacji: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1,5 \\ 1,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tensor deformacji: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 1,4 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1,5 \\ 1,4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,40 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & 1 & 0,90 \\ 1,4 & 0,90 & 3,25 \end{bmatrix}$

Numerycznie wyznaczamy **wartości własne tensora deformacji:**

$$C_1 = 0,582 \quad C_2 = 1,923 \quad C_3 = 5,145$$

Wektory własne tensora C

Wektor własny odpowiadający wartości $C_1 = 0,582$:

$$(\mathbf{C} - C_1 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2,818 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & 0,418 & 0,90 \\ 1,4 & 0,90 & 2,668 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [2,818 ; 0,96 ; 1,4] \times [0,96 ; 0,418 ; 0,90] = [0,279 ; -1,192 ; 0,256]$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = [0,223 ; -0,953 ; 0,204]$$

Wektor własny odpowiadający wartości $C_2 = 1,923$:

$$(\mathbf{C} - C_2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1,477 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & -0,923 & 0,90 \\ 1,4 & 0,90 & 1,327 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = [1,477 ; 0,96 ; 1,4] \times [0,96 ; -0,923 ; 0,90] = [2,156 ; 0,0147 ; -2,284]$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = [0,686 ; 0,00469 ; -0,727]$$

Wektor własny odpowiadający wartości $C_3 = 5,145$:

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = [0,692 ; 0,303 ; 0,655]$$

Macierz przejścia od układu pierwotnego do układu osi własnych C :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,223 & -0,953 & 0,204 \\ 0,686 & 0,00469 & -0,727 \\ 0,692 & 0,303 & 0,655 \end{bmatrix}$$

Tensor rozciągłości w układzie osi własnych:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{U}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \sqrt{0,582} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1,923} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5,145} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,763 & 0 & 0 \\ 0 & 1,387 & 0 \\ 0 & 0 & 2,268 \end{bmatrix}$$

Odwrotność tensora rozciągłości w układzie osi własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/0,763 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1,387 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2,268 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,311 & 0 & 0 \\ 0 & 0,721 & 0 \\ 0 & 0 & 0,441 \end{bmatrix}$$

Tensor rozciągłości w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}_{[\omega]} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,778 & 0,317 & 0,371 \\ 0,317 & 0,901 & 0,296 \\ 0,371 & 0,296 & 1,739 \end{bmatrix}$$

Odwrotność tensora rozciągłości w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,616 & -0,184 & -0,100 \\ -0,184 & 1,231 & -0,170 \\ -0,100 & -0,170 & 0,625 \end{bmatrix}$$

Tensor obrotu wyznaczamy z relacji $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$, przy czym tensory \mathbf{F} i \mathbf{U}^{-1} wyrażone muszą być w tym samym układzie współrzędnych – w układzie wyjściowym. **Tensor obrotu** w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1,5 \\ -1,4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,616 & -0,184 & -0,100 \\ -0,184 & 1,231 & -0,170 \\ -0,100 & -0,170 & 0,625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,592 & 0,764 & -0,257 \\ -0,261 & 0,483 & 0,836 \\ 0,762 & -0,428 & 0,485 \end{bmatrix}$$

Lewy tensor rozciągłości w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1,322 & 0,072 & 0,571 \\ 0,072 & 1,544 & 0,470 \\ 0,571 & 0,470 & 1,551 \end{bmatrix}$$

SPRAWDZENIE

- $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,592 & 0,764 & -0,257 \\ -0,261 & 0,483 & 0,836 \\ 0,762 & -0,428 & 0,485 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,778 & 0,317 & 0,371 \\ 0,317 & 0,901 & 0,296 \\ 0,371 & 0,296 & 1,739 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1,5 \\ 1,4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$
- $\mathbf{U}^T = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U}$ jest symetryczny
- $\det \mathbf{R} = 1 \Rightarrow \mathbf{R}$ jest ortogonalny

DEFORMACJA WŁÓKNA MATERIALNEGO $d\mathbf{X} = [1,0,0]$:

Rozciąganie przed obrotem:

$$\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1,778 & 0,317 & 0,371 \\ 0,317 & 0,901 & 0,296 \\ 0,371 & 0,296 & 1,739 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,778 \\ 0,317 \\ 0,371 \end{bmatrix}$$

Obrót rozciągniętego włókna:

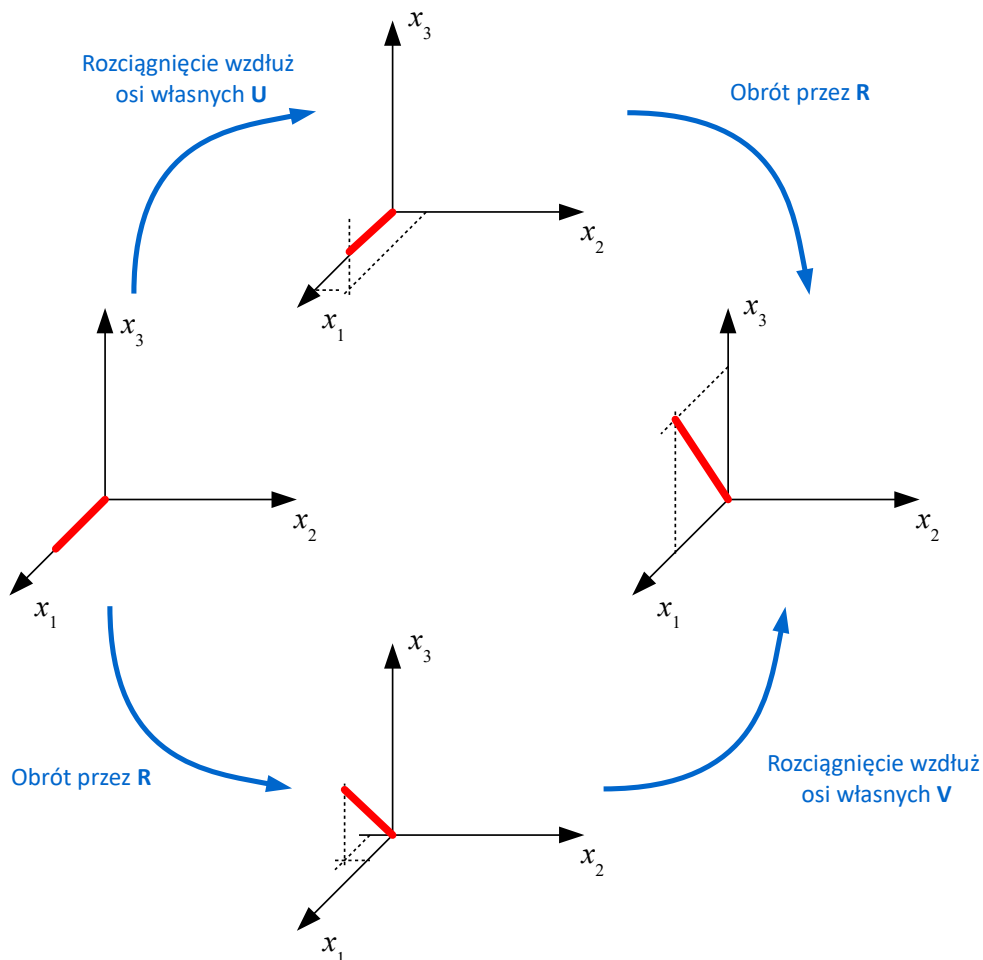
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0,592 & 0,764 & -0,257 \\ -0,261 & 0,483 & 0,836 \\ 0,762 & -0,428 & 0,485 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,778 \\ 0,317 \\ 0,371 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

Obrót przez rozciąganiem:

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0,592 & 0,764 & -0,257 \\ -0,261 & 0,483 & 0,836 \\ 0,762 & -0,428 & 0,485 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,592 \\ -0,261 \\ 0,762 \end{bmatrix}$$

Rozciąganie obróconego włókna:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1,322 & 0,072 & 0,571 \\ 0,072 & 1,544 & 0,470 \\ 0,571 & 0,470 & 1,551 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,592 \\ -0,261 \\ 0,762 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$



ZADANIE 16 (rozkład biegunowy dwuwymiarowego tensora deformacji)

Dokonaj rozkładu biegunowego gradientu deformacji dla deformacji zadanej równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = 2 X_1 - X_2 \\ x_2 = 2 X_1 + 4 X_2 \end{cases}$$

Zilustruj działanie tensora obrotu oraz tensorów rozciągnięcia na włókno materialne o jednostkowej długości, równoległe do pierwszej osi własnej prawego tensora rozciągnięcia.

ROZWIĄZANIE:

Gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

Wartości własne tensora deformacji:

$$C_1 = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_{11} - C_{22}}{2}\right)^2 + C_{12}^2} = 20$$

$$C_2 = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{C_{11} - C_{22}}{2}\right)^2 + C_{12}^2} = 5$$

Kąt między pierwszą osią wyjściowego układu współrzędnych a pierwszą osią własną \mathbf{C} :

$$\phi = \arctg \frac{C_{12}}{C_1 - C_2} = \arctg 2 \approx 63,43^\circ$$

Wektory własne tensora deformacji:

$$\mathbf{c}_1 = [\cos \phi ; \sin \phi] = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} ; \frac{2}{\sqrt{5}} \right]$$

$$\mathbf{c}_2 = [-\sin \phi ; \cos \phi] = \left[-\frac{2}{\sqrt{5}} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

Macierz przejścia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ -0,8944 & 0,4472 \end{bmatrix}$$

Tensor rozciągnięcia w układzie osi własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4,472 & 0 \\ 0 & 2,236 \end{bmatrix}$$

Odwrotność tensora rozciągnięcia w układzie osi własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,2236 & 0 \\ 0 & 0,4472 \end{bmatrix}$$

Tensor rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}_{[\omega]} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{9}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,683 & 0,8944 \\ 0,8944 & 4,025 \end{bmatrix}$$

Odwrotność tensora rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{5}}{50} & -\frac{\sqrt{5}}{25} \\ -\frac{\sqrt{5}}{25} & \frac{15\sqrt{5}}{25} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,4025 & -0,08944 \\ -0,08944 & 1,342 \end{bmatrix}$$

Tensor obrotu w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{9\sqrt{5}}{50} & -\frac{\sqrt{5}}{25} \\ -\frac{\sqrt{5}}{25} & \frac{3\sqrt{5}}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(26,57^\circ) & -\sin(26,57^\circ) \\ \sin(26,57^\circ) & \cos(26,57^\circ) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ -0,8944 & 0,4472 \end{bmatrix}$$

SPRAWDZENIE

- $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{9}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$
- $\mathbf{U}^T = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U}$ jest symetryczny
- $\det \mathbf{R} = 1 \Rightarrow \mathbf{R}$ jest ortogonalny

Lewy tensor rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,236 & 0 \\ 0 & 4,472 \end{bmatrix}$$

DEFORMACJA WŁÓKNA MATERIALNEGO

Włókno materialne o jednostkowej długości, leżące na pierwszej osi własnej prawego tensora rozciągnięcia jest opisane wektorem własnym tensora deformacji odpowiadającym pierwszej wartości własnej:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{c}_1 = [\cos \phi ; \sin \phi] = \left[\frac{1}{\sqrt{5}} ; \frac{2}{\sqrt{5}} \right] = [0,4472 ; 0,8944]$$

Rozciągnięcie przed obrotem:

$$\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{9}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Obrót rozciągniętego włókna:

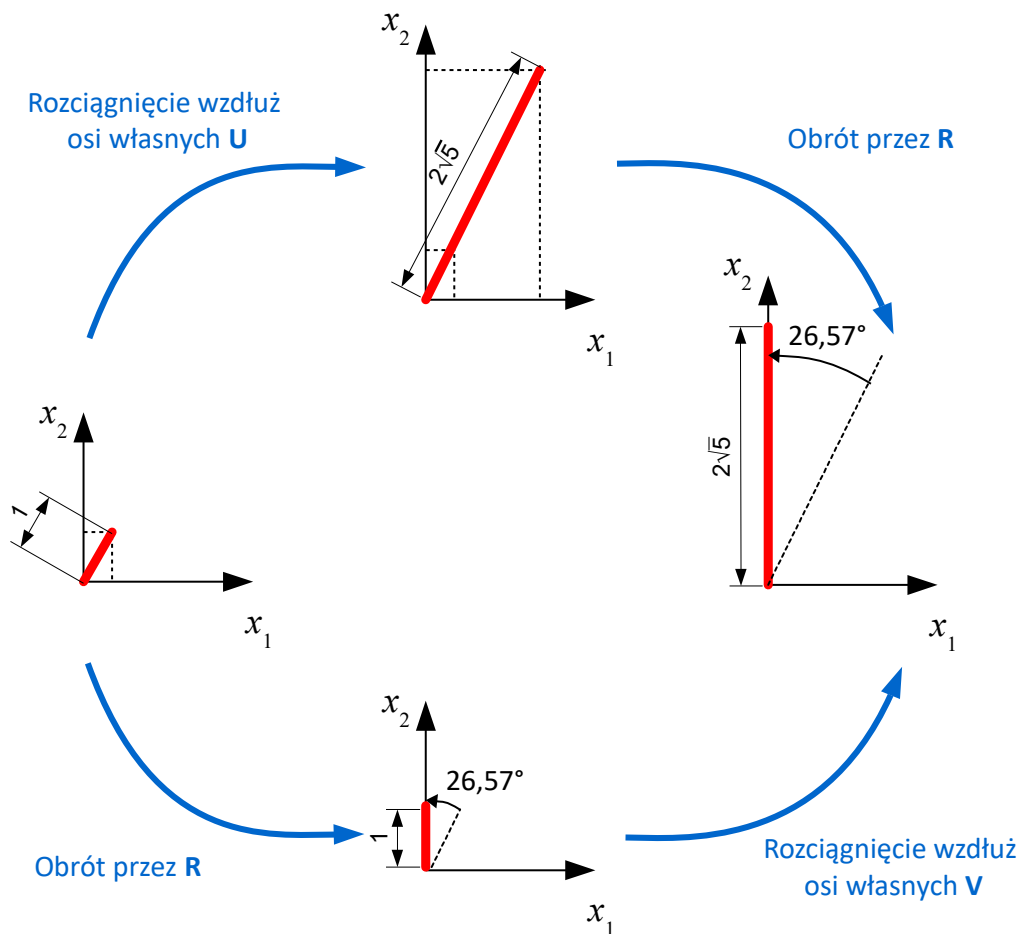
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Obrót przez rozciągnięciem:

$$\mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozciągnięcie obróconego włókna:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$



ZADANIE 17 (Równania nierozdzielności)

Sprawdź, czy podany tensor odkształcenia opisuje rzeczywisty rozkład odkształceń w ciele.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4x_1^2x_2^2 & -2x_1x_2^2 \\ -2x_1x_2^2 & x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE:

Sprawdzamy **warunek nierozdzielności dla dwuwymiarowego rozkładu odkształceń**:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 8x_1^2 - 2 \cdot (4x_2) + 2 \neq 0$$

Warunek nierozdzielności nie jest spełniony. Nie istnieje taki rozkład przemieszczeń, który po zróżniczkowaniu dałby taki rozkład odkształceń, jaki opisany jest podanym tensorem.

ZADANIE 18 (Równania nierozdzielności)

Sprawdź, czy podany tensor odkształcenia może opisywać rzeczywisty rozkład odkształceń w ciele:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 6x_1^2x_3^3 & 8x_1^3x_2 & 3x_1^3x_3^2 \\ 8x_1^3x_2 & 4x_1^4 - 1 & 2 - 2x_2x_3^4 \\ 3x_1^3x_3^2 & 2 - 2x_2x_3^4 & 2x_3 - 8x_2^2x_3^3 \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE:

Sprawdzamy **warunki nierozdzielności**:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 - 2 \cdot (-8x_3^3) + (-16x_3^3) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 0 - 2 \cdot (18x_1^2x_3) + (36x_1^2x_3) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 0 - 2 \cdot (24x_1^2) + 48x_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 x_3} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right] = 0 - \frac{\partial}{\partial x_1} [-0 + 0 + 0] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right] = 0 - \frac{\partial}{\partial x_2} [-0 + 0 + 0] = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right] = 0 - \frac{\partial}{\partial x_3} [-0 + 0 + 0] = 0$$

Warunki nierozdzielności są spełnione – podany tensor odkształcenia opisuje pewien teoretycznie możliwy rozkład odkształceń w ciele.

ZADANIE 19 (Związki geometryczne Cauchy'ego)

Znajdź rozkład przemieszczeń odpowiadający podanemu tensorowi małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 2x_2 + 3x_1^2 & x_1 + 2x_2x_3 & \frac{1}{2} + x_1 \\ & 4x_1x_3 + 2x_2 & \frac{1}{2} + 2x_1x_2 \\ \text{sym} & & 1 \end{bmatrix}$$

przy warunkach początkowych $\mathbf{u}(\mathbf{x}=\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

ROZWIĄZANIE:

Na początku całkujemy odkształcenia liniowe:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = 2x_3 + 2x_2 + 3x_1^2 \Rightarrow u_1 = 2x_1x_3 + 2x_1x_2 + x_1^3 + \phi(x_2, x_3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} = 4x_1x_3 + 2x_2 \Rightarrow u_2 = 4x_1x_2x_3 + x_2^2 + \psi(x_1, x_3)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{33} = 1 \Rightarrow u_3 = x_3 + \vartheta(x_1, x_2)$$

Nieznane funkcje ϕ, ψ, ϑ wyznaczmy z całkowania odkształceń kątowych:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{12} = 2x_1 + 4x_2x_3 \Rightarrow 2x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + 4x_2x_3 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2x_1 + 4x_2x_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 2\varepsilon_{13} = 1 + 2x_1 \Rightarrow 2x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = 1 + 2x_1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{23} = 1 + 4x_1x_2 \Rightarrow 4x_1x_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = 1 + 4x_1x_2$$

Otrzymujemy układ równań różniczkowych cząstkowych na funkcje ϕ, ψ, ϑ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = 1$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych cząstkowych jest z reguły bardzo trudnym zadaniem – w wielu przypadkach rozwiązania nie da się zapisać przy pomocy skończonej liczby funkcji elementarnych. Mamy jednak gwarancję, że rozwiązanie układu liniowego istnieje i jest jednoznaczne. Spróbujmy je odszukać. Nietrudno zauważyć, że pierwsze równanie będzie spełnione, jeśli przyjmiemy $\phi(x_2, x_3) = C_1$, $\psi(x_1, x_3) = C_2$, gdzie C_1, C_2 są pewnymi stałymi całkowania. Wtedy pozostałe dwa równania dają nam:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = 1 \Rightarrow \vartheta = x_1 + v(x_2)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + v(x_2)) = \frac{\partial v}{\partial x_2} = 1 \Rightarrow v = x_2 + C_3$$

$$\vartheta = x_1 + x_2 + C_3$$

Wstawiając założone rozwiązanie do funkcji przemieszczeń:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2x_1x_3 + 2x_1x_2 + x_1^3 + C_1 \\ u_2 &= 4x_1x_2x_3 + x_2^2 + C_2 \\ u_3 &= x_3 + x_1 + x_2 + C_3 \end{aligned}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych $\mathbf{u}(\mathbf{x}=\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, otrzymując:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

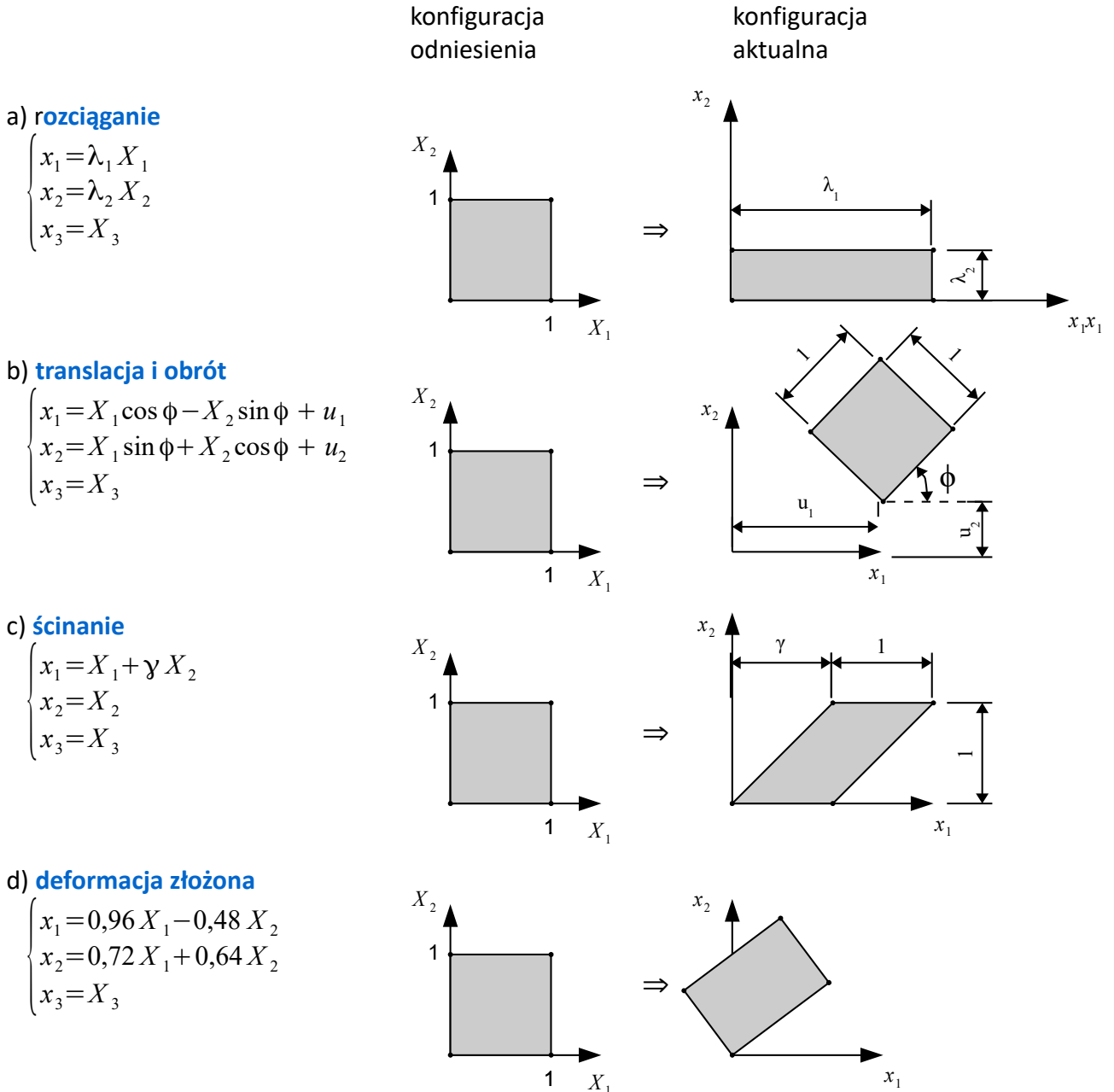
Otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} u_1 = x_1^3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ u_2 = x_2^2 + 4x_1x_2x_3 \\ u_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

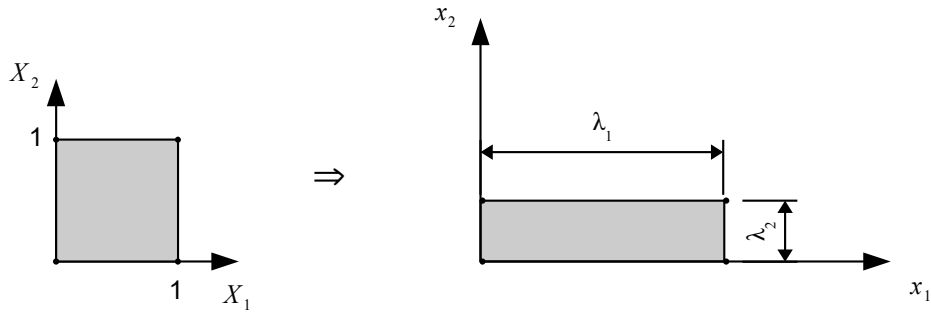
Rozwiązanie to spełnia wszystkie równania geometryczne oraz warunki brzegowe – ponieważ rozwiązanie takiego liniowego zagadnienia jest jednoznaczne, jest zatem tym poszukiwanym rozwiązaniem.

ZADANIE 20 (Szczegółowa analiza wybranych przypadków deformacji sprężyste)

Dokonać rozkładu biegunowego gradientu deformacji dla deformacji opisanych następującymi wzorami oraz wyznaczyć materialny i przestrzenny tensor odkształcenia oraz tensor naprężenia Cauchy'ego przy założeniu liniowego prawa Hooke'a między tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa II rodzaju oraz tensorem odkształceń Greena – de Saint-Venanta.



PRZYPADEK a) – ROZCIĄGNIĘCIE



Deformacja charakteryzuje się tym, że włókna równoległe do trzech prostopadłych kierunków nie zmieniają swojej orientacji a jedynie swoją długość.

Równania deformacji:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 X_1 \\ x_2 = \lambda_2 X_2 \\ x_3 = \lambda_3 X_3 \end{cases}$$

Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Jakobian:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Postawione zagadnienie ma sens tylko wtedy, gdy: $J > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$

Materialny tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Tensor deformacji \mathbf{C} jest w postaci diagonalnej, a zatem jest on określony w jego osiach własnych. Tensor rozciągnięcia \mathbf{U} ma te same osie własne co \mathbf{C} a jego wartości własne są pierwiastkami wartości własnych \mathbf{C} . Stąd mamy:

Prawy tensor rozciągnięcia:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Tensor obrotu obliczymy z następującej zależności: $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$

Mnożenie tensorów \mathbf{F} oraz \mathbf{U}^{-1} należy wykonać w ustalonym układzie współrzędnych – w przyjętym układzie zarówno tensor \mathbf{F} jak i \mathbf{U} mają postać diagonalną, zatem jest to układ osi własnych każdego z nich.

Tensor odwrotny do danego (o ile tylko jest odwracalny) ma te same osie własne, a jego wartości własne są odwrotnościami wartości własnych wyjściowego tensora. Wykorzystując ten fakt z łatwością znajdujemy odwrotność tensora rozciągnięcia.

Tensor obrotu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gradient przemieszczenia:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor deformacji:

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-2} \end{bmatrix}$$

TENSORY ODKSZTAŁCENIA

Materialny tensor odkształceni:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 - 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^2 - 1}{2} \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor odkształcenia:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \frac{1 - \lambda_1^{-2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \lambda_2^{-2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \lambda_3^{-2}}{2} \end{bmatrix}$$

Tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - 1 \end{bmatrix}$$

TENSORY NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$\mathbf{T}_S = 2G \mathbf{E} + \Lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} = 2G \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 - 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^2 - 1}{2} \end{bmatrix} + \Lambda(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) & 0 & 0 \\ 0 & G(\lambda_2^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) & 0 \\ 0 & 0 & G(\lambda_3^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \mathbf{T}_S =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \left[G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \right] & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 \left[G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \right] & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \lambda_3 \left[G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \right] & \dots \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego:

$$\mathbf{T}_\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} \left[G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \right] & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_3 \lambda_1} \left[G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \right] & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2} \left[G(\lambda_1^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \right] & \dots \end{bmatrix}$$

UWAGI:

- Wartości własne tensora rozciągnięcia określają ile razy włókna na kierunku odpowiedniej osi zostały wydłużone.
- Cały element nie uległ obrotowi, zatem **tensor obrotu jest tensorem jednostkowym**, a gradient deformacji równa się prawemu tensorowi rozciągnięcia.
- Jeśli deformacja dotyczy materiału izotropowego i jest tego rodzaju, że $\lambda_2 = \lambda_3$, a ponadto tensor naprężeń rzeczywistych jest stanem jednoosiowym, mówimy wtedy o przypadku **czystego rozciągania**.
- Jeśli deformacja dotyczy materiału izotropowego i jest tego rodzaju, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, mówimy wtedy o przypadku **deformacji objętościowej**.

CZYTE ROZCIĄGANIE

Jeśli obliczymy składowe tensora naprężenia Cauchy'ego odpowiadającego założonemu tensorowi odkształcenia na podstawie założonego związku konstytutywnego, wtedy w ogólności będzie $\sigma_{22} = \sigma_{33} \neq 0$. W stanie czystego rozciągania zakładamy jednak, że stan naprężenia jest stanem jednoosiowym, pamiętając zatem, że $\lambda_2 = \lambda_3$, po podstawieniu do uzyskanego wyniku, musi zatem zachodzić

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{\lambda_1} \left[G(\lambda_2^2 - 1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3) \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = \sqrt{1 + \frac{\Lambda}{2(G+\Lambda)}(1 - \lambda_1^2)}$$

Widzimy zatem, że w stanie czystego rozciągania wydłużenia nie są niezależne i deformacja ciała zadana jest jednym tylko wydłużeniem, wartość drugiego zaś wynika z założonego dla czystego rozciągania zerowania się poprzecznych naprężeń normalnych. Dla $\lambda_1 > 0$ spełniony jest wtedy

warunek $\lambda_2 > 0$. Mamy wtedy:

Materialny gradient deformacji:
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Materialny tensor deformacji:
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

Materialny tensor odkształcenia:
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Lambda}{2(G+\Lambda)} \frac{\lambda_1^2-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Lambda}{2(G+\Lambda)} \frac{\lambda_1^2-1}{2} \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} G(\lambda_1^2-1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G(2G+3\Lambda)}{G+\Lambda} \frac{\lambda_1^2-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \lambda_1 \left[G(\lambda_1^2-1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} \left[G(\lambda_1^2-1) + \frac{\Lambda}{2}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 3) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przy oznaczeniach:

$$\begin{cases} G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \Lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = \frac{G(2G+3\Lambda)}{G+\Lambda} \\ \nu = \frac{\Lambda}{2(G+\Lambda)} \end{cases}$$

Tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\lambda_1^2-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\lambda_1^2-1}{2} \end{bmatrix} \quad \nu = -\frac{E_{22}}{E_{11}}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} E \frac{\lambda_1^2-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_{11} = E E_{11}$$

DEFORMACJA OBJĘTOŚCIOWA

Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Materialny tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \lambda^2 \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Materialny tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda^2-1}{2} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2-1}{2} \end{bmatrix}$$

Przy oznaczeniu: $K = \frac{2G+3\Lambda}{3}$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$\mathbf{T}_S = 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2} \end{bmatrix}$$

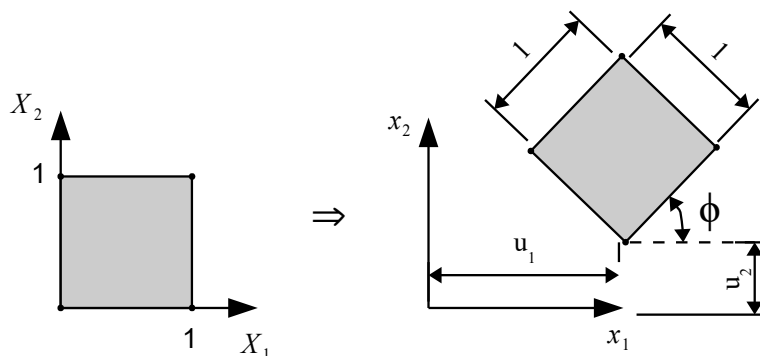
Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\mathbf{T}_R = 3K \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)}{2} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 3K \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3K \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3K \frac{\lambda(\lambda^2 - 1)}{2} \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego:

$$\mathbf{T}_\sigma = 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 3K \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \end{bmatrix}$$

PRZYPADEK b) – TRANSLACJA I OBRÓT



Ciało polega na przesunięciu równoległym oraz obrotowi bez odkształcenia, tj. bez zmiany jego kształtu i wielkości.

Równania deformacji:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \phi - X_2 \sin \phi + u_1 \\ x_2 = X_1 \sin \phi + X_2 \cos \phi + u_2 \\ x_3 = X_3 + u_3 \end{cases}$$

Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Materialny tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor deformacji \mathbf{C} jest w postaci diagonalnej, a zatem jest on określony w jego osiach własnych. Tensor rozciągnięcia \mathbf{U} ma te same osie własne co \mathbf{C} a jego wartości własne są pierwiastkami wartości własnych \mathbf{C} . Stąd mamy:

Tensor rozciągnięcia:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor obrotu obliczymy z zależności:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$$

Mnożenie powyższe trzeba wykonać w ustalonym układzie współrzędnych. Wyjściowy układ współrzędnych jest zarazem układem osi własnych tensorów \mathbf{C} oraz \mathbf{U} , ponieważ mają w nim postać diagonalną. Są to ponadto tensory izotropowe (aksjatory, tensory proporcjonalne do jedynki tensorowej, tj. mają trzy jednakowe wartości własne), więc każdy układ współrzędnych jest ich układem osi własnych i w każdym z nich mają postać diagonalną. Przyjmijmy więc do obliczeń ten podstawowy układ współrzędnych, w którym znane są nam składowe gradientu deformacji \mathbf{F} .

Tensor obrotu:
$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny gradient deformacji:
$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor deformacji:
$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gradient przemieszczenia:
$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \cos \phi - 1 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TENSORY ODKSZTAŁCENIA

Materialny tensor odkształcenia:
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor odkształcenia:
$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor małych odkształceń:
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} \cos \phi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TENSORY NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:
$$\mathbf{T}_S = 2G \mathbf{E} + \Lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{kPa}]$$

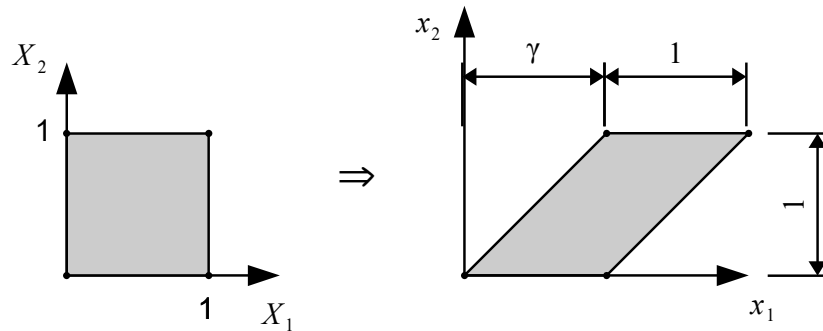
Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju:
$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{kPa}]$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego:
$$\mathbf{T}_\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{kPa}]$$

UWAGI:

- Przesunięcie równoległe bez odkształcenia (translacja o wektor $\mathbf{u}=[u_1; u_2; u_3]$), któremu odpowiadają w równaniach deformacji człony niezależne od współrzędnych materialnych, nie wpływają na postać gradientu deformacji, ponieważ znikają przy różniczkowaniu. W rezultacie nie mają żadnego wpływu na miary odkształcenia i naprężenia.
- Element uległ jedynie translacji i obrotowi i nie zmienił swojego kształtu i rozmiarów – żadne jego włókno nie zostało rozciągnięte, zatem **tensor rozciągnięcia oraz tensory deformacji są tensorami jednostkowymi a gradient deformacji jest równy tensorowi obrotu.**
- Przestrzenny gradient deformacji jest odwrotnością materialnego tensora deformacji – odpowiada on operatorowi obrotu o kąt przeciwny do do kąta obrotu realizowanego przez materialny gradient deformacji.
- Ponieważ ciało nie uległo deformacji, a jedynie sztywnemu przesunięciu i obrotowi (tak, jakby było bryłą sztywną), zatem **wszystkie tensory deformacji i tensory odkształcenia oraz tensory naprężenia są zerowe.** Wyjątek stanowi tensor małych odkształceń. Jest on właściwą miarą odkształcenia jedynie w ramach teorii małych przemieszczeń i małych odkształceń. Gdy kąt obrotu jest bliski 0, wtedy cosinus tego kąta jest bliski 1 i tensor małych odkształceń rzeczywiście jest bliski tensorowi zerowemu.

PRZYPADEK c) – ŚCINANIE



Deformacja charakteryzuje się tym, że płaszczyzny materialne równoległe do jednej z osi podlegają przemieszczeniu w kierunku prostopadłym do tej osi, przy czym wielkość tego przemieszczenia jest proporcjonalna do odległości od jednej z tych płaszczyzn.

Równania deformacji:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Materialny gradient deformacji

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jakobian:

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1$$

Materialny tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Niezmienniki tensora deformacji: $I = 3 + \gamma^2 \quad II = 3 + \gamma^2 \quad III = 1$

Równanie charakterystyczne: $C^3 - (3 + \gamma^2)C^2 + (3 + \gamma^2)C - 1 = 0$

Wartości własne tensora deformacji:

$$C_1 = 1 + \frac{\gamma}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})$$

$$C_2 = 1 + \frac{\gamma}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})$$

$$C_3 = 1$$

Wartość własna $C_3 = 1$ była już widoczna z samej postaci tensora \mathbf{C} , ponieważ pozadiagonalne składowe związane z osią 3 były równe 0. Przyjmujemy zatem, że wartość ta odpowiada trzeciej osi układu współrzędnych, tj. wektor $\omega_3 = [0; 0; 1]$ jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.

Wartości własne \mathbf{U} , czyli **rozciągnięcia główne**, są pierwiastkami wartości własnych \mathbf{C} :

$$\lambda_1 = \sqrt{C_1} = \sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})} \quad \lambda_1 = \lambda_{max} \in \langle 1; \infty \rangle$$

$$\lambda_2 = \sqrt{C_2} = \sqrt{1 + \frac{\gamma}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})} \quad \lambda_2 = \lambda_{min} \in \langle 0; 1 \rangle$$

$$\lambda_3 = \sqrt{C_3} = 1$$

Związki powyższe można odwrócić, przez co uzyskamy zależność:

$$\gamma = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} - 2} = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_2^{-2} - 2}$$

przy czym związek ten zachodzi dla $\lambda_1 \in \langle 1; \infty \rangle$ oraz $\lambda_2 \in \langle 0; 1 \rangle$.

Jakobian jest równy wyznacznikowi tensora rozciągnięcia i jest niezmiennikiem, tj. jego wartość nie zależy od układu współrzędnych, w którym jest obliczany, zatem:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{U}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

skąd

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$$

Ścinanie jest zatem **deformacją izochoryczną**, tj. **zachowującą objętość ciała**.

Prawy tensor rozciągnięcia w układzie osi własnych:

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odwrotność tensora rozciągnięcia w układzie osi własnych:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aby móc obliczyć tensor obrotu \mathbf{R} z zależności $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$ musimy wykonać to mnożenie w ustalonym układzie współrzędnych – jednak składowe \mathbf{F} znamy tylko w podstawowym przyjętym układzie współrzędnych, natomiast składowe \mathbf{U}^{-1} znamy jedynie w jego układzie osi własnych (tj. układzie osi własnych \mathbf{C} i \mathbf{U}), który jest różny od tego wyjściowego, co widać po tym, że nie ani \mathbf{C} ani \mathbf{U} przyjmują w nim postaci diagonalnej. Musimy zatem znaleźć wektory własne \mathbf{C} i \mathbf{U} (są takie same) oraz macierz przejścia, a następnie albo obrócić \mathbf{U}^{-1} do wyjściowego układu współrzędnych, albo obrócić \mathbf{F} do układu osi własnych \mathbf{U}^{-1} . Tensor \mathbf{C} jest w przyjętym układzie współrzędnych tensorem antypłaskim. Trzecia oś przyjętego układu jest jego osią własną, zatem macierz przejścia do układu osi własnych będzie macierzą obrotu wokół tej osi. Oznaczmy przez ϕ , kąt zawarty między osią X_1 , a kierunkiem maksymalnego rozciągnięcia λ_1 , wtedy wektor własny odpowiadający tej wartości własnej ma postać:

$$\omega_1 = [\cos \phi; \sin \phi; 0]$$

Ponieważ tensor deformacji jest symetryczny, zatem drugi wektor własny musi być wektorem prostopadłym do dwóch pozostałych.

$$\omega_2 = [-\sin \phi; \cos \phi; 0]$$

Możemy napisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\omega_1 = \lambda_1\omega_1 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}\omega_2 = \lambda_2\omega_2 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po rozpisaniu mnożenia macierzowego dla pierwszego wektora własnego otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \cos \phi + \gamma \sin \phi = \lambda_1 \cos \phi \\ \gamma \cos \phi + (1 + \gamma^2) \sin \phi = \lambda_1 \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \gamma \operatorname{tg} \phi = \lambda_1 \\ \frac{\gamma}{\operatorname{tg} \phi} + (1 + \gamma^2) = \lambda_1 \end{cases}$$

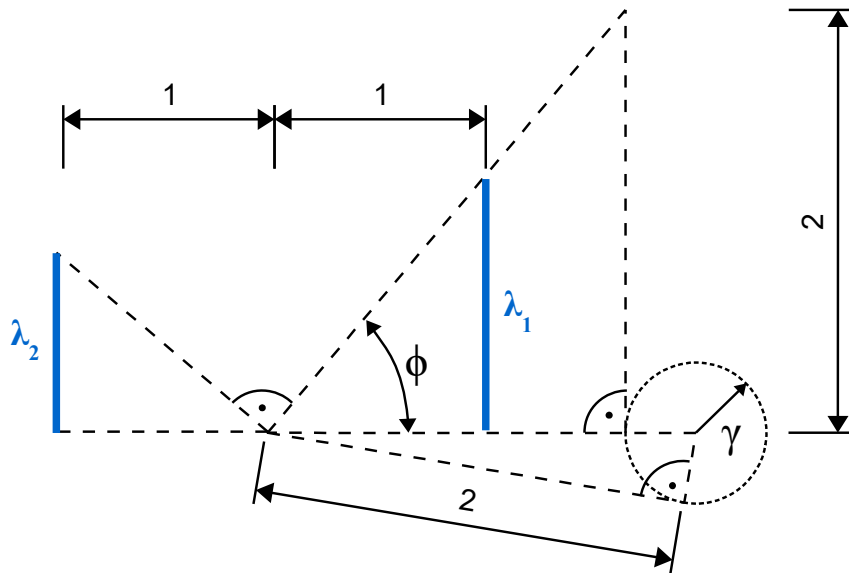
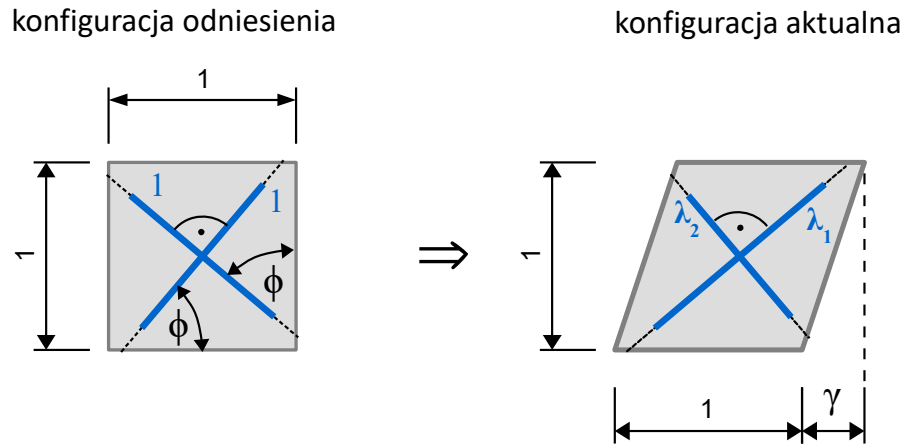
Po przyrównaniu obydwu równań z prawej strony do siebie otrzymujemy zależności:

$$\gamma = \operatorname{tg} \phi - \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \phi = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})$$

Dla $\gamma \in (0; \infty)$ kąt $\phi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Można przy tym pokazać, że:

$$\operatorname{tg} \phi = \lambda_1$$

Zależności powyższe ilustrują poniższe obrazki:



Znając tangens kąta ϕ możemy wyznaczyć pozostałe funkcje trygonometryczne tego kąta:

$$\sin \phi = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}}$$

Prawy tensor rozciągłości i jego odwrotność możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \boldsymbol{\omega}_1 \otimes \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\omega}_2 \otimes \boldsymbol{\omega}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{\omega}_3 \otimes \boldsymbol{\omega}_3$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} \boldsymbol{\omega}_1 \otimes \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \boldsymbol{\omega}_2 \otimes \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{1}{\lambda_3} \boldsymbol{\omega}_3 \otimes \boldsymbol{\omega}_3$$

W wyjściowym układzie współrzędnych:

$$\omega_1 \otimes \omega_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & 0 \\ \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} \phi & 0 \\ \operatorname{tg} \phi & \operatorname{tg}^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 \otimes \omega_2 = \begin{bmatrix} \sin^2 \phi & -\cos \phi \sin \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \phi & \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}^2 \phi & -\operatorname{tg} \phi & 0 \\ -\operatorname{tg} \phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_3 \otimes \omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Żmudne rachunki dają nam w wyjściowym układzie współrzędnych:

Prawy tensor rozciągnięcia:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{4+y^2}} & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{4+y^2}} & \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odwrotność prawego tensora rozciągnięcia:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2+y^2}{\sqrt{4+y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{4+y^2}} & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{4+y^2}} & \frac{2}{\sqrt{4+y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor obrotu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\phi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor deformacji:

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gradient przemieszczenia:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TENSORY ODKSZTAŁCENIA

Materialny tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor odkształcenia:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & -\frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TENSORY NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$\mathbf{T}_S = 2G \mathbf{E} + \Lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \Lambda \frac{\gamma^2}{2} & G\gamma & 0 \\ G\gamma & (2G+\Lambda)\frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \frac{\gamma^2}{2} \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} (2G+\Lambda)\frac{\gamma^2}{2} & G\gamma + (2G+\Lambda)\frac{\gamma^3}{2} & 0 \\ G\gamma & (2G+\Lambda)\frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \frac{\gamma^2}{2} \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego:

$$\mathbf{T}_\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} (4G+\Lambda)\frac{\gamma^2}{2} + (2G+\Lambda)\frac{\gamma^4}{2} & G\gamma + (2G+\Lambda)\frac{\gamma^3}{2} & 0 \\ G\gamma + (2G+\Lambda)\frac{\gamma^3}{2} & (2G+\Lambda)\frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \frac{\gamma^2}{2} \end{bmatrix}$$

Jeśli $\gamma \ll 1$, wtedy wyższe potęgi γ szybko dążą do zera. Dla takiej małej deformacji otrzymujemy stan czystego ścinania:

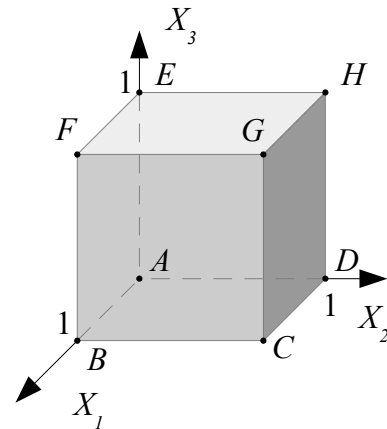
$$\gamma \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_S = \mathbf{T}_R = \mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & G\gamma & 0 \\ G\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 21 (Odtworzenie obciążenia brzegu w opisie materialnym)

Dany jest sześcian o jednostkowym boku, którego deformację opisują następujące równania:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 X_1 \\ x_2 = 1,2 X_2 \\ x_3 = 0,6 X_3 - 0,2 X_1 - 0,2 X_2 \end{cases}$$

Sześcian wykonany jest z izotropowego materiału liniowo sprężystego o współczynniku Poissona $\nu=0,3$ oraz module Younga $E = 10 \text{ kPa}$ (stałe dotyczą związku $\mathbf{T}_S(\mathbf{E})$). Naszkicuj konfigurację aktualną sześcianu, a następnie wyznacz aktualne obciążenie ścianki EFGH w konfiguracji aktualnej oraz odniesione do konfiguracji początkowej.



ROZWIĄZANIE:

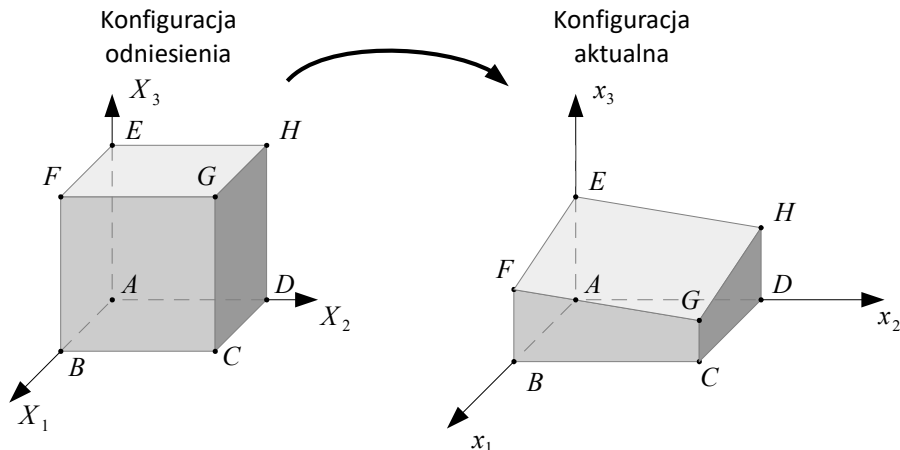
Sprawdzamy odwracalność związków. Wyznaczamy **gradient deformacji** i jego **wyznacznik**:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \Rightarrow \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \quad J = \det \mathbf{F} = 0,864$$

Jakobian przekształcenia jest większy od 0 – **związki są odwracalne w każdym punkcie.**

KONFIGURACJA AKTUALNA

$A: \mathbf{x}(0;0;0)=[0;0;0]^T$	$B: \mathbf{x}(1;0;0)=[1,2;0;0]^T$
$C: \mathbf{x}(1;1;0)=[1,2;1,2;0]^T$	$D: \mathbf{x}(0;1;0)=[0;1,2;0]^T$
$E: \mathbf{x}(0;0;1)=[0;0;0,6]^T$	$F: \mathbf{x}(1;0;1)=[1,2;0;0,4]^T$
$G: \mathbf{x}(1;1;1)=[1,2;1,2;0,2]^T$	$H: \mathbf{x}(0;1;1)=[0;1,2;0,4]^T$



WEKTOR PRZEMIESZCZENIA

Wyznaczamy **wektor przemieszczenia** w opisie materialnym:

$$u_i = x_i - X_i \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0,2 X_1 \\ u_2 = 0,2 X_2 \\ u_3 = -0,4 X_3 - 0,2 X_1 - 0,2 X_2 \end{cases}$$

STAN ODKSZTAŁCENIA

Wyznaczamy **tensor odkształceń Greena – de Saint-Venanta** korzystając ze **związków geometrycznych**:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \Rightarrow$$

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) = 0,24$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) = 0,02$$

...

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,02 & -0,06 \\ 0,02 & 0,24 & -0,06 \\ -0,06 & -0,06 & -0,32 \end{bmatrix} \quad [-]$$

STAN NAPRĘŻENIA

Wyznaczamy **tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 2 rodzaju** korzystając z **prawa Hooke'a**:

moduł Kirchhoffa: $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 3,846 \text{ kPa}$

pierwszy parametr Lamego: $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 5,769 \text{ kPa}$

$$S_{ij} = 2G E_{ij} + \lambda E_{kk} \Rightarrow$$

$$S_{11} = 2G E_{11} + \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) = 3,577 \text{ kPa}$$

$$S_{12} = 2G E_{12} = 0,154 \text{ kPa}$$

...

$$\mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 2,769 & 0,154 & -0,462 \\ 0,154 & 2,769 & -0,462 \\ -0,462 & -0,462 & -1,538 \end{bmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

Wyznaczamy **tensor naprężenia Pioli – Kirchhoffa 1 rodzaju**:

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,769 & 0,154 & -0,462 \\ 0,154 & 2,769 & -0,462 \\ -0,462 & -0,462 & -1,538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,323 & 0,185 & -0,554 \\ 0,185 & 3,323 & -0,554 \\ -0,862 & -0,862 & -0,738 \end{bmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

Wyznaczamy **tensor naprężenia Cauchy'ego**:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\sigma &= \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T = \\ &= \frac{1}{0,864} \begin{bmatrix} 3,323 & 0,185 & -0,554 \\ 0,185 & 3,323 & -0,554 \\ -0,862 & -0,862 & -0,738 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & -0,2 \\ 0 & 1,2 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,815 & 0,456 & -0,598 \\ 0,456 & 4,815 & -0,598 \\ -0,598 & -0,598 & -0,513 \end{bmatrix} \text{ [kPa]} \end{aligned}$$

OBCIĄŻENIE ŚCIANKI EFGH

Obciążenie aktualne odniesione do konfiguracji początkowej:

Równanie płaszczyzny zawierającej ściankę EFGH przed deformacją:

$$F : X_3 - 1 = 0$$

Wersor normalny do ścianki EFGH przed deformacją:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla_x F}{|\nabla_x F|} = [0, 0, 1]$$

Wektor obciążenia aktualnego ścianki EFGH **odniesiony do konfiguracji początkowej:**

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 3,323 & 0,185 & -0,554 \\ 0,185 & 3,323 & -0,554 \\ -0,862 & -0,862 & -0,738 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,554 \\ -0,554 \\ -0,738 \end{bmatrix} \text{ [kPa]}$$

Obciążenie aktualne odniesione do konfiguracji aktualnej:

Równanie płaszczyzny zawierającej ściankę EFGH po deformacji wyznaczamy podstawiając do jej równania przed deformacją związki deformacyjne opisu przestrzennego.

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 X_1 \\ x_2 = 1,2 X_2 \\ x_3 = 0,6 X_3 - 0,2 X_1 - 0,2 X_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 0,833 x_1 \\ X_2 = 0,833 x_2 \\ X_3 = 1,667 x_3 + 0,278 x_1 + 0,278 x_2 \end{cases}$$

Ścianka EFGH po deformacji:

$$f : X_3 - 1 = 1,667 x_3 + 0,278 x_2 + 0,278 x_1 - 1 = 0$$

Wersor normalny do ścianki EFGH przed deformacją:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_x f}{|\nabla_x f|} = [0,162, ; 0,162 ; 0,973]$$

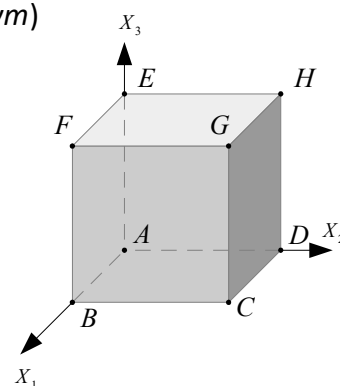
Wektor obciążenia aktualnego ścianki EFGH **odniesiony do konfiguracji aktualnej:**

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 4,815 & 0,456 & -0,598 \\ 0,456 & 4,815 & -0,598 \\ -0,598 & -0,598 & -0,513 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,162 \\ 0,162 \\ 0,973 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,272 \\ 0,272 \\ -0,693 \end{bmatrix} \text{ [kPa]}$$

ZADANIE 22 (Liniowa deformacja w opisie przestrzennym i materialnym)

Dla sześcianu o jednostkowej krawędzi:

$$\begin{cases} x_1 = 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 \\ x_2 = -3X_3 \\ x_3 = -X_1 - X_2 \end{cases}$$



sprawdzić odwracalność równań deformacji a następnie wyznaczyć:

1. równania deformacji w opisie przestrzennym,
2. wektor przemieszczenia w opisie materialnym i w opisie przestrzennym,
3. konfigurację aktualną sześcianu – sporządzić szkic,
4. materialny gradient deformacji \mathbf{F} oraz przestrzenny gradient deformacji \mathbf{f} – dokonać rozkładu biegunowego \mathbf{F} , znaleźć tensor obrotu, lewy i prawy tensor rozciągnięcia oraz zilustrować działanie tych tensorów na włókno $d\mathbf{X} = [0; 1; 0]$
5. prawy tensor deformacji Cauchy'ego-Greena \mathbf{C} i tensor deformacji Cauchy'ego \mathbf{c} ,
6. tensor odkształcenia Greena – de Saint-Venanta \mathbf{E} i tensor odkształcenia Almansiego-Hamela \mathbf{e} oraz tensor małych odkształceń i tensor małych obrotów
7. tensory naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 i 2 rodzaju oraz tensor naprężenia Cauchy'ego przyjmując liniowy związek fizyczny Hooke'a między tensorem odkształcenia Greena – de Saint-Venanta a tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$S_{ij} = 2G E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij}, \text{ moduł Younga } E = 11 \text{ kPa}, \text{ współczynnik Poissona } \nu = 0,1$$

8. aktualne obciążenie ścianki BCGF odniesione do konfiguracji aktualnej,
9. aktualne obciążenie ścianki BCGF odniesione do konfiguracji początkowej,
10. powierzchnię ścianki BCGF przed i po deformacji
11. długość odcinka AG przed i po deformacji,
12. objętość sześcianu przed i po deformacji.

ROZWIĄZANIE:

Na początku wyznaczamy **materialny gradient deformacji**. Składowa i, j jest równa pochodnej i -tej współrzędnej przestrzennej \mathbf{x} względem j -tej współrzędnej materialnej \mathbf{X} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Odwracalność równań deformacji sprawdzamy wyznaczając **jakobian** przekształcenia:

$$J = \det(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad (2)$$

Jakobian jest większy od 0, zatem **równania są lokalnie odwracalne w każdym punkcie**.

AD 1) RÓWNANIA DEFORMACJI W OPISIE PRZESTRZENNYM

Równania deformacyjne stanowią układ równań wiążących zmienne materialne i zmienne przestrzenne, który można rozwiązać z uwagi na jeden z tych kompletów współrzędnych. Rozwiązujemy układ równań deformacji z uwagi na zmienne materialne \mathbf{X} . W naszym przypadku jest to **układ równań liniowych** – w prosty sposób możemy znaleźć jego rozwiązanie za pomocą **wzorów Cramera**:

$$\begin{cases} x_1 = 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 \\ x_2 = -3X_3 \\ x_3 = -X_1 - X_2 \end{cases} \quad (3)$$

Wyznaczniki: $W = \det(\mathbf{F}) = 3 \quad (4)$

$$W_1 = \begin{vmatrix} x_1 & 3 & -4 \\ x_2 & 0 & -3 \\ x_3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3x_1 + 4x_2 - 9x_3 \quad (5)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & x_1 & -4 \\ 0 & x_2 & -3 \\ -1 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 \quad (6)$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ -1 & -1 & x_3 \end{vmatrix} = x_2 \quad (7)$$

Otrzymujemy:
$$\begin{cases} X_1 = \frac{W_1}{W} = -x_1 + \frac{4}{3}x_2 - 3x_3 \\ X_2 = \frac{W_2}{W} = x_1 - \frac{4}{3}x_2 + 2x_3 \\ X_3 = \frac{W_3}{W} = -\frac{x_2}{3} \end{cases} \quad (8)$$

W przypadku związków nieliniowych podejście powyższe nie jest możliwe i konieczne jest rozwiązanie układu równań nieliniowych.

AD 2) WEKTOR PRZEMIESZCZENIA

Wektor przemieszczenia wyznaczamy zgodnie z zależnością: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ (9)

W zależności od tego, w jakim opisie chcemy go wyznaczyć, jedną ze współrzędnych musimy wyrazić przez drugą zgodnie ze związkami deformacyjnymi (3) lub (8).

- **opis materialny** – zmiennymi niezależnymi są współrzędne materialne \mathbf{X} , więc współrzędne przestrzenne \mathbf{x} musimy wyrazić przez współrzędne materialne zgodnie ze związkami (3):

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{X}) = x_1(\mathbf{X}) - X_1 = X_1 + 3X_2 - 4X_3 \\ u_2(\mathbf{X}) = x_2(\mathbf{X}) - X_2 = -X_2 - 3X_3 \\ u_3(\mathbf{X}) = x_3(\mathbf{X}) - X_3 = -X_1 - X_2 - X_3 \end{cases} \quad (10)$$

- **opis przestrzenny**: zmiennymi niezależnymi są współrzędne przestrzenne \mathbf{x} , więc współrzędne materialne \mathbf{X} musimy wyrazić przez współrzędne przestrzenne zgodnie ze związkami (8):

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) = x_1 - X_1(\mathbf{x}) = 2x_1 - \frac{4}{3}x_2 + 3x_3 \\ u_2(\mathbf{x}) = x_2 - X_2(\mathbf{x}) = -x_1 + \frac{7}{3}x_2 - 2x_3 \\ u_3(\mathbf{x}) = x_3 - X_3(\mathbf{x}) = x_3 + \frac{x_2}{3} \end{cases} \quad (11)$$

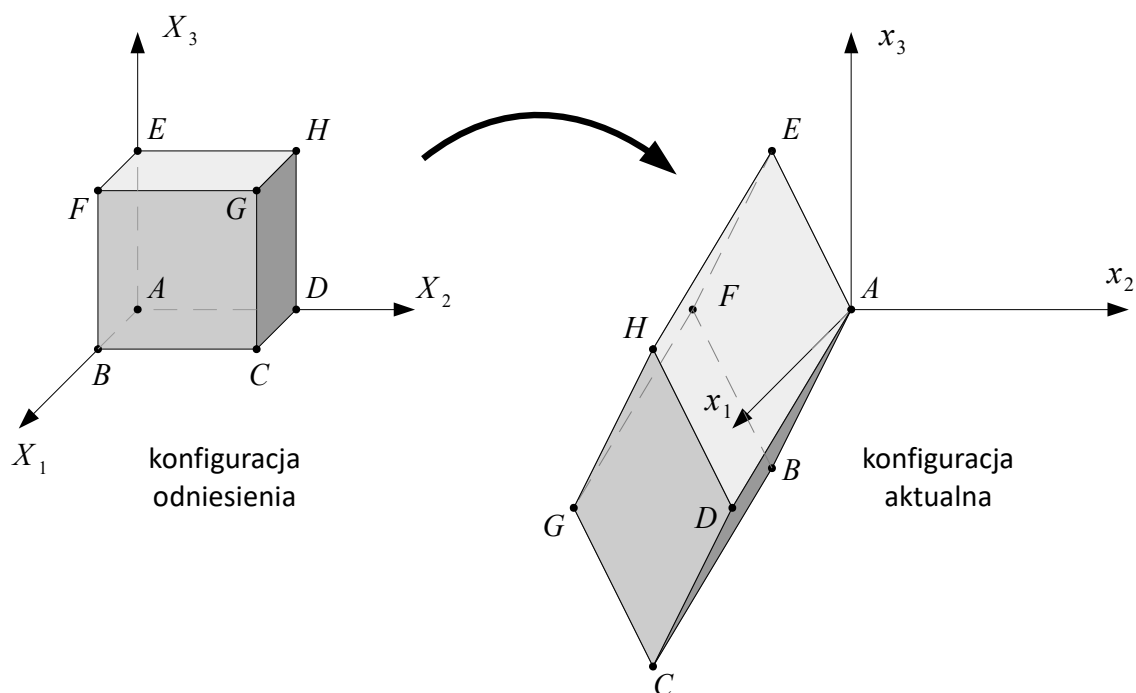
Można łatwo sprawdzić, że podstawienie (3) do (11) daje nam (10), natomiast podstawienie (8) do (10) daje nam (11).

AD 3) KONFIGURACJA AKTUALNA SZEŚCIANU

Związki deformacyjne są funkcjami liniowymi, co oznacza, że **każdy odcinek prosty przekształcany jest w odcinek prosty**, choć w ogólności zmienia się jego kierunek i długość i położenie końców. Skoro konfiguracja odniesienia jest sześcianem, zatem **konfiguracja aktualna będzie z pewnością równoległobokiem – wystarczy zatem znaleźć jedynie położenie wierzchołków** tego równoległościanu i połączyć je odcinkami prostymi.

Położenie w konfiguracji aktualnej dane jest współrzędnymi przestrzennymi \mathbf{x} . Korzystamy zatem ze związków (3) i dla każdego wierzchołka w konfiguracji odniesienia odczytujemy jego położenie (współrzędne materialne \mathbf{X}) i podstawiamy odpowiednie współrzędne do kolejnych związków w (3). Otrzymujemy:

$$\begin{array}{ll} A: \mathbf{x}(0;0;0)=[0;0;0]^T & B: \mathbf{x}(1;0;0)=[2;0;-1]^T \\ C: \mathbf{x}(1;1;0)=[5;0;-2]^T & D: \mathbf{x}(0;1;0)=[3;0;-1]^T \\ E: \mathbf{x}(0;0;1)=[-4;-3;0]^T & F: \mathbf{x}(1;0;1)=[-2;-3;-1]^T \\ G: \mathbf{x}(1;1;1)=[1;-3;-2]^T & H: \mathbf{x}(0;1;1)=[-1;-3;-1]^T \end{array}$$



AD 4) ROZKŁAD BIGUNOWY GRADIENTU DEFORMACJI

Rozkładem biegunowym materialnego gradientu deformacji nazywamy możliwość zapisania gradientu deformacji w postaci iloczynu tensora symetrycznego i tensora ortogonalnego w jednej z dwóch postaci:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (12)$$

gdzie:

- **R** **tensor obrotu** – ortogonalny: $\det(\mathbf{R}) = 1, \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$
- **U** **prawy tensor rozciągnięcia** – symetryczny: $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$
- **V** **lewy tensor rozciągnięcia** – symetryczny: $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$

Schematy znajdowania składników rozkładu biegunowego jest następujący:

1. wyznaczyć **materialny gradient deformacji**: \mathbf{F}
2. wyznaczyć **tensor deformacji**: $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$
3. znaleźć **wartości własne** C_1, C_2, C_3 i **wektory własne** $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ **tensora deformacji**.
Postać tensora deformacji w układzie osi własnych:

$$\mathbf{C}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

4. wyznaczyć **macierz przejścia**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \omega^{(1)} \\ \omega^{(2)} \\ \omega^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \omega_3^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \omega_3^{(2)} \\ \omega_1^{(3)} & \omega_2^{(3)} & \omega_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

5. Wyznaczyć **prawy tensor rozciągnięcia w układzie osi własnych**:

$$\mathbf{U}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{bmatrix}$$

6. Wyznaczyć **odwrotność prawego tensora rozciągnięcia w układzie osi własnych**:

$$\mathbf{U}^{-1}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_3}} \end{bmatrix}$$

7. Wyznaczyć **prawy tensor rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych**:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \mathbf{U}_{[\omega]} \mathbf{A}$$

8. Wyznaczyć **odwrotność prawego tensora rozciągnięcia w wyjściowym układzie współrzędnych**:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}^T \mathbf{U}^{-1}_{[\omega]} \mathbf{A}$$

9. Wyznaczyć **tensor obrotu**:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$$

10. Wyznaczyć **lewy tensor rozciągnięcia**:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T = \mathbf{F} \mathbf{R}^T$$

Tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 7 & 10 & -12 \\ -8 & -12 & 25 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Aby znaleźć wartości własne tensora deformacji musimy rozwiązać **równanie wiekowe**:

$$C^3 - I_1 C^2 + I_2 C - I_3 = 0 \quad (14)$$

którego współczynniki dane są **niezmiennikami tensora** deformacji:

- **pierwszy niezmiennik – ślad tensora:**

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) = C_{11} + C_{22} + C_{33} = 40 \quad (15)$$

- **drugi niezmiennik:**

$$I_2 = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} = 168 \quad (16)$$

- **trzeci niezmiennik – wyznacznik tensora:**

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} = 9 \quad (17)$$

Równanie wiekowe: $C^3 - 40C^2 + 168C - 9 = 0$ (18)

Można pokazać, że z symetrii i dodatniej określoności tensora wynika, że równanie powyższe zawsze ma trzy dodatnie pierwiastki rzeczywiste. Znajdujemy je bądź z wykorzystaniem **wzorów Cardano** (jak poniżej), bądź **numerycznie** na kalkulatorze lub komputerze:

Rachunki analityczne wymagają obliczenia następujących parametrów:

$$p = \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = 13,333 \quad (19)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(C_{22}-C_{33})^2 + (C_{33}-C_{11})^2 + (C_{11}-C_{22})^2] + (C_{23}^2 + C_{31}^2 + C_{12}^2) = 365,333 \quad (20)$$

$$J_3 = (C_{11}-p)(C_{22}-p)(C_{33}-p) + 2C_{23}C_{31}C_{12} - (C_{11}-p)C_{23}^2 - (C_{22}-p)C_{31}^2 - (C_{33}-p)C_{12}^2 = 2509,741 \quad (21)$$

$$q = \sqrt{2J_2} = 27,031 \quad (22)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) = 0,122 \text{ rad} \quad (23)$$

Pierwiastki równania wiekowego: $C_1 = p + \sqrt{\frac{2}{3}}q \cos(\theta) = 35,240$ (24)

$$C_2 = p + \sqrt{\frac{2}{3}}q \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 0,0543 \quad (25)$$

$$C_3 = p + \sqrt{\frac{2}{3}}q \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 4,706 \quad (26)$$

Numeracja wartości własnych może być wybrana dowolnie. Tradycyjnie numeruje się je od największej do najmniejszej lub odwrotnie:

Wartości własne tensora deformacji: $C_1=0,0543 \quad C_2=4,706 \quad C_3=35,240$ (27)

Każdej pojedynczej wartości własnej tensora deformacji odpowiada jeden kierunek własny i dowolny wektor równoległy do tego kierunku jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej. Spośród nieskończonej liczby możliwych do wyboru wektorów wybierać będziemy **wektory unormowane (o jednostkowej długości)**, natomiast **zwrot dwóch z wektorów własnych również wybierać będziemy dowolnie**, a **zwrot trzeciego wektora własnego dobierzemy tak, aby wektory własne tworzyły trójkę prawoskrętną**. Taka trójka posłuży nam do wyznaczenia macierzy przejścia między wyjściowym układem współrzędnych a układem osi własnych. Z symetrii tensora deformacji wynika, że będzie to układ ortogonalny, zaś unormowanie i zachowanie odpowiedniej orientacji trzeciego wektora własnego zagwarantuje nam, że będzie to dodatkowo **prawoskrętny układ ortonormalny (kartezjański)**.

Aby wyznaczyć pierwszy wektor własny $\omega^{(1)}$ odpowiadający pierwszej wartości własnej C_1 , zapiszmy poniższe wyrażenie:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\omega^{(1)} - C_1\omega^{(1)} = \mathbf{0} &\Rightarrow (\mathbf{C} - C_1\mathbf{1})\omega^{(1)} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 5-0,0543 & 7 & -8 \\ 7 & 10-0,0543 & -12 \\ -8 & -12 & 25-0,0543 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \\ \omega_3^{(1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Powyższe równanie wektorowe jest spełnione na mocy definicji wektora własnego. Odpowiada ono układowi równań liniowych jednorodnych (o prawych stronach równych 0). Równanie takie ma niezerowe rozwiązanie jedynie wtedy, gdy wyznacznik główny jest równy 0. Zerowanie się wyznacznika można interpretować geometrycznie jako zerowanie się iloczynu mieszanego trzech wektorów, których składowe opisane są trzema wierszami macierzy współczynników tego układu. Zerowanie się tego wyznacznika oznacza, że wektory te leżą na jednej płaszczyźnie. Jednocześnie każde z równań z osobna interpretować można jako iloczyn skalarny jednego z tych wektorów (wierszy macierzy) z wektorem własnym $\omega^{(1)}$ - ponieważ prawa strona jest równa 0, zatem iloczyn ten jest zerowy, a to oznacza, że wektory te są prostopadłe. A zatem wektor własny $\omega^{(1)}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory odpowiadające wierszom macierzy współczynników. Taki prostopadły wektor można wyznaczyć jako iloczyn wektorowy dowolnych dwóch wektorów leżących w płaszczyźnie, np. pierwszych dwóch:

$$\begin{bmatrix} 4,946 & 7 & -8 \\ 7 & 9,946 & -12 \\ -8 & -12 & 24,946 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\begin{bmatrix} 4,946 & 7 & -8 \\ 7 & 9,946 & -12 \end{bmatrix}}{\mathbf{v}^{(1)} = [-4,434; 3,349; 0,189]} \quad (29)$$

Wektor własny otrzymujemy przez unormowanie obliczonego wektora:

$$\omega^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{|\mathbf{v}^{(1)}|} = \frac{[-4,434; 3,349; 0,189]}{\sqrt{(-4,434)^2 + (3,349)^2 + (0,189)^2}} = [-0,798; 0,603; 0,034] \quad (30)$$

Analogicznie postępujemy przy wyznaczaniu drugiego wektora własnego $\omega^{(2)}$ odpowiadającego drugiej wartości własnej C_2 .

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} - C_2\mathbf{1})\omega^{(2)} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 5-4,706 & 7 & -8 \\ 7 & 10-4,706 & -12 \\ -8 & -12 & 25-4,706 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \\ \omega_3^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} 0,294 & 7 & -8 \\ 7 & 5,294 & -12 \\ -8 & -12 & 20,294 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\begin{bmatrix} 0,294 & 7 & -8 \\ 7 & 5,294 & -12 \end{bmatrix}}{\mathbf{v}^{(2)} = [-41,646; -52,470; -47,442]} \quad (32)$$

$$\omega^{(2)} = \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{|\mathbf{v}^{(2)}|} = \frac{[-41,646; -52,470; -47,442]}{\sqrt{(-41,646)^2 + (-52,470)^2 + (-47,442)^2}} = [-0,507; -0,639; -0,578] \quad (33)$$

Trzeci wektor własny wyznaczamy inaczej. Skoro wiemy, że musi on być prostopadły do dwóch pozostałych, a ponadto chcemy, aby był unormowany i razem z pozostałymi tworzył trójkę prawoskrętną, to wszystkie te cechy posiada **wektor będący iloczynem wektorowym dwóch pozostałych wektorów własnych**:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= [-0,798; 0,602; 0,034] \\ \omega^{(2)} &= [-0,507; -0,639; -0,578] \\ \omega^{(3)} &= \overline{\omega^{(1)} \times \omega^{(2)}} = [-0,326; -0,478; 0,815] \end{aligned} \quad (34)$$

Wektory własne tensora deformacji:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} &= [-0,798; 0,602; 0,034] \\ \omega^{(2)} &= [-0,507; -0,639; -0,578] \\ \omega^{(3)} &= [-0,326; -0,478; 0,815] \end{aligned}$$

Składowa i, j macierzy przejścia jest równa j -tej składowej i -tego wektora własnego:

Macierz przejścia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,798 & 0,602 & 0,034 \\ -0,507 & -0,639 & -0,578 \\ -0,326 & -0,478 & 0,815 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Prawy tensor rozciągnięcia w osiach własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]} = \begin{bmatrix} \sqrt{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,233 & 0 & 0 \\ 0 & 2,169 & 0 \\ 0 & 0 & 5,936 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Odwrotność prawego tensora rozciągnięcia w osiach własnych:

$$\mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{C_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{C_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,293 & 0 & 0 \\ 0 & 0,461 & 0 \\ 0 & 0 & 0,169 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Prawy tensor rozciągnięcia \mathbf{U} w układzie wyjściowym:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{A}^T \mathbf{U}_{[\omega]} \mathbf{A} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,798 & -0,507 & -0,326 \\ 0,602 & -0,639 & -0,478 \\ 0,034 & -0,578 & 0,815 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,233 & 0 & 0 \\ 0 & 2,169 & 0 \\ 0 & 0 & 5,936 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,798 & 0,602 & 0,034 \\ -0,507 & -0,639 & -0,578 \\ -0,326 & -0,478 & 0,815 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,186 & -1,100 & -1,935 \\ 0,140 & -1,386 & -2,837 \\ 0,00792 & -1,254 & 4,838 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,798 & 0,602 & 0,034 \\ -0,507 & -0,639 & -0,578 \\ -0,326 & -0,478 & 0,815 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,339 & 1,518 & -0,950 \\ 1,518 & 2,328 & -1,508 \\ -0,950 & -1,508 & 4,671 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Odwrotność prawego tensora rozciągnięcia \mathbf{U}^{-1} w układzie wyjściowym:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1} &= \mathbf{A}^T \mathbf{U}_{[\omega]}^{-1} \mathbf{A} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,798 & -0,507 & -0,326 \\ 0,602 & -0,639 & -0,478 \\ 0,034 & -0,578 & 0,815 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,293 & 0 & 0 \\ 0 & 0,461 & 0 \\ 0 & 0 & 0,169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,798 & 0,602 & 0,034 \\ -0,507 & -0,639 & -0,578 \\ -0,326 & -0,478 & 0,815 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3,423 & -0,234 & -0,055 \\ 2,585 & -0,295 & -0,081 \\ 0,146 & -0,266 & 0,137 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,798 & 0,602 & 0,034 \\ -0,507 & -0,639 & -0,578 \\ -0,326 & -0,478 & 0,815 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,867 & -1,886 & -0,026 \\ -1,886 & 1,784 & 0,192 \\ -0,026 & 0,192 & 0,271 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

Tensor obrotu:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,867 & -1,886 & -0,026 \\ -1,886 & 1,784 & 0,192 \\ -0,026 & 0,192 & 0,271 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,179 & 0,810 & -0,558 \\ 0,078 & -0,577 & -0,813 \\ -0,981 & 0,102 & -0,167 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

Lewy tensor rozciągnięcia:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T = \mathbf{F} \mathbf{R}^T = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,179 & 0,078 & -0,981 \\ 0,810 & -0,577 & 0,102 \\ -0,558 & -0,813 & -0,167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,018 & 1,676 & -0,988 \\ 1,676 & 2,440 & 0,500 \\ -0,988 & 0,500 & 0,879 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

Sprawdzenia:

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U} \text{ - tensor } \mathbf{U} \text{ jest symetryczny}$$

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{V} \text{ - tensor } \mathbf{V} \text{ jest symetryczny}$$

$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0,179 & 0,810 & -0,558 \\ 0,078 & -0,577 & -0,813 \\ -0,981 & 0,102 & -0,167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,179 & 0,078 & -0,981 \\ 0,810 & -0,577 & 0,102 \\ -0,558 & -0,813 & -0,167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,179 & 0,810 & -0,558 \\ 0,078 & -0,577 & -0,813 \\ -0,981 & 0,102 & -0,167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,339 & 1,518 & -0,950 \\ 1,518 & 2,328 & -1,508 \\ -0,950 & -1,508 & 4,671 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$$

DEFORMACJA WŁÓKNA MATERIALNEGO $d\mathbf{X} = [0; 1; 0]$

Rozciąganie przed obrotem:

$$\mathbf{U} d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1,339 & 1,518 & -0,950 \\ 1,518 & 2,328 & -1,508 \\ -0,950 & -1,508 & 4,671 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,518 \\ 2,328 \\ -1,508 \end{bmatrix}$$

Obrót po rozciąganiu:

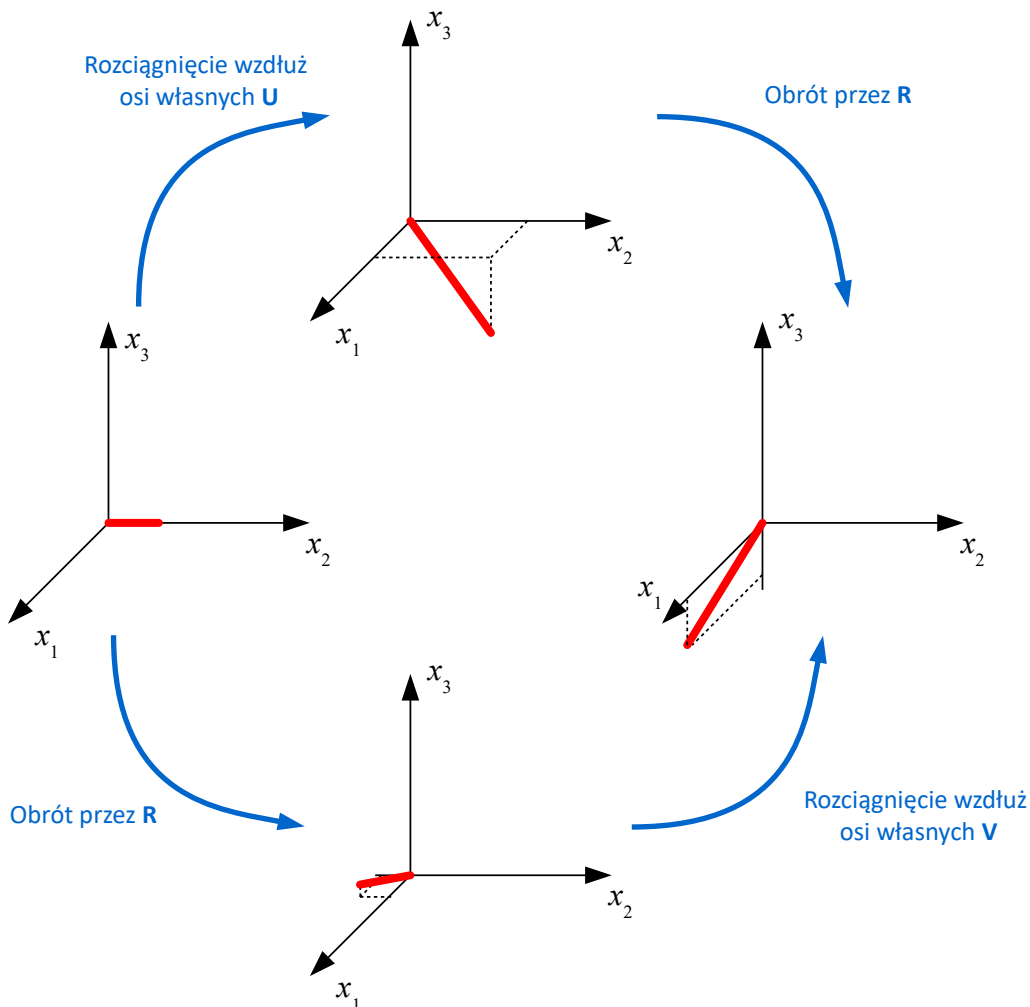
$$\mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{R}(\mathbf{U} d\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0,179 & 0,810 & -0,558 \\ 0,078 & -0,577 & -0,813 \\ -0,981 & 0,102 & -0,167 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,518 \\ 2,328 \\ -1,508 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Obrót przed rozciąganiem:

$$\mathbf{R} d\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0,179 & 0,810 & -0,558 \\ 0,078 & -0,577 & -0,813 \\ -0,981 & 0,102 & -0,167 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,810 \\ -0,577 \\ 0,102 \end{bmatrix}$$

Rozciąganie po obrocie:

$$\mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{V}(\mathbf{R} d\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 5,018 & 1,676 & -0,988 \\ 1,676 & 2,440 & 0,500 \\ -0,988 & 0,500 & 0,879 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,810 \\ -0,577 \\ 0,102 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



AD 5) TENSOR DEFORMACJI

Do wyznaczenia przestrzennego tensora deformacji konieczne jest wyznaczenie przestrzennego gradientu deformacji:

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} = \frac{(\text{cof}(\mathbf{F}))^T}{\det(\mathbf{F})} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -3 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Przestrzenny gradient deformacji może być również wyznaczony z definicji na podstawie związków (8):

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -3 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Prawy tensor deformacji Cauchy'ego-Greena (materialny tensor deformacji):

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 7 & 10 & -12 \\ -8 & -12 & 25 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Tensor deformacji Cauchy'ego (przestrzenny tensor deformacji):

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1,333 & -1,333 & -0,333 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1,333 & -3 \\ 1 & -1,333 & 2 \\ 0 & -0,333 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2,667 & 5 \\ -2,667 & 3,667 & -6,667 \\ 5 & -6,667 & 13 \end{bmatrix} \quad (45)$$

AD 6) TENSOR ODKSZTAŁCENIA

Tensor odkształcenia Greena – de Saint-Venanta (materialny tensor odkształcenia)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 7 & 10 & -12 \\ -8 & -12 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3,5 & -4 \\ 3,5 & 4,5 & -6 \\ -4 & -6 & 12 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Tensor odkształcenia Almansiego-Hamela (przestrzenny tensor odkształcenia)

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2,667 & 5 \\ -2,667 & 3,667 & -6,667 \\ 5 & -6,667 & 13 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0,5 & 1,333 & -2,5 \\ 1,333 & -1,333 & 3,333 \\ -2,5 & 3,333 & -6 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Aby wyznaczyć tensor małych przemieszczeń i tensor małych obrotów, wyznaczamy **materialny gradient przemieszczenia**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Tensor małych odkształceń:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & -2,5 \\ 1,5 & -1 & -2 \\ -2,5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Tensor małych obrotów:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1,5 & -1,5 \\ -1,5 & 0 & -1 \\ 1,5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

AD 7) TENSOR NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa II rodzaju wyznaczamy z podanych związków fizycznych, których parametry określamy na podstawie modułu Younga i współczynnika Poissona:

- **moduł Younga:** $E = 11 \text{ kPa}$ (51)

- **współczynnik Poissona:** $\nu = 0,1$ (52)

- **moduł Kirchhoffa:** $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 5 \text{ kPa}$ (53)

- **parametr Lamego:** $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 1,25 \text{ kPa}$ (54)

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju (tensor naprężeń materialnych)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_S &= 2G\mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{1} = 2 \cdot 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3,5 & -4 \\ 3,5 & 4,5 & -6 \\ -4 & -6 & 12 \end{bmatrix} + 1,25 \cdot (2 + 4,5 + 12) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 43,125 & 35 & -40 \\ 35 & 68,125 & -60 \\ -40 & -60 & 143,125 \end{bmatrix} \text{ [kPa]} \end{aligned} \quad (55)$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju (tensor naprężeń nominalnych)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_R &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 43,125 & 35 & -40 \\ 35 & 68,125 & -60 \\ -40 & -60 & 143,125 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 351,25 & 514,375 & -832,5 \\ 120 & 180 & -429,375 \\ -78,125 & -103,125 & 100 \end{bmatrix} \text{ [kPa]} \end{aligned} \quad (56)$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego (tensor naprężeń rzeczywistych)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\sigma &= \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{F}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 351,25 & 514,375 & -832,5 \\ 120 & 180 & -429,375 \\ -78,125 & -103,125 & 100 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1858,542 & 832,5 & -288,542 \\ 832,5 & 429,375 & -100 \\ -288,542 & -100 & 60,417 \end{bmatrix} \text{ [kPa]} \end{aligned} \quad (57)$$

AD 8) AKTUALNE OBCIĄŻENIE ŚCIANKI BCGF ODNIESIONE DO KONFIGURACJI AKTUALNEJ

Ścianka BCGF przed deformacją zawierała się w płaszczyźnie danej równaniem:

$$A_R: X_1 - 1 = 0 \quad (58)$$

Równanie ścianki po deformacji uzyskamy podstawiając do (8) związku (58). Po deformacji ścianka ta zawiera się w powierzchni danej równaniem:

$$A: X_1(x_1, x_2, x_3) - 1 = -x_1 + \frac{4}{3}x_2 - 3x_3 - 1 = 0 \quad (59)$$

Normalną zewnętrzną do ścianki BCGF po deformacji wyznaczamy jako **unormowany gradient funkcji określającej kształt zdeformowanej ścianki**:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} A}{|\nabla_{\mathbf{x}} A|} = \frac{\left[-1; \frac{4}{3}; -3\right]}{\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + (-3)^2}} = [-0,291; 0,389; -0,874] \quad (60)$$

Wektor obciążenia rzeczywistego ścianki BCGF:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1858,542 & 832,5 & -288,542 \\ 832,5 & 429,375 & -100 \\ -288,542 & -100 & 60,417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,291 \\ 0,398 \\ -0,874 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34,116 \\ 11,655 \\ -7,588 \end{bmatrix} \text{ [kPa]} \quad (61)$$

AD 9) AKTUALNE OBCIĄŻENIE ŚCIANKI BCGF ODNIESIONE DO KONFIGURACJI POCZĄTKOWEJ

Ścianka BCGF przed deformacją zawierała się w płaszczyźnie danej równaniem:

$$A_R: X_1 - 1 = 0 \quad (62)$$

Normalną zewnętrzną do ścianki BCGF przed deformacją wyznaczamy jako **unormowany gradient funkcji określającej oryginalny kształt ścianki**:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} A_R}{|\nabla_{\mathbf{x}} A_R|} = \frac{[1; 0; 0]}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = [1; 0; 0] \quad (63)$$

Wektor obciążenia nominalnego ścianki BCGF:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 351,25 & 514,375 & -832,5 \\ 120 & 180 & -429,375 \\ -78,125 & -103,125 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 351,25 \\ 120 \\ -78,125 \end{bmatrix} \text{ [kPa]} \quad (64)$$

AD 10) POWIERZCHNIA ŚCIANKI BCGF

Pole wycinka dowolnej krzywoliniowej powierzchni sparametryzowanej dwoma parametrami można obliczyć jako **całkę podwójną niezorientowaną z funkcji jednostkowej**:

$$A = \iint_A dA = \iint_A \sqrt{\left(\left|\frac{\partial X_2}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial X_2}{\partial \beta}\right|^2 + \left|\frac{\partial X_3}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial X_3}{\partial \beta}\right|^2 + \left|\frac{\partial X_1}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial X_1}{\partial \beta}\right|^2\right)} d\alpha d\beta \quad (65)$$

W naszym przypadku powierzchnią tą jest płaszczyzna prostopadła do osi X_1 , stąd łatwo sparametryzować ją zmiennymi X_2, X_3 :

$$A_R = \{\mathbf{X}: X_1 = 1 \wedge X_2 \in \langle 0; 1 \rangle \wedge X_3 \in \langle 0; 1 \rangle\} \quad (66)$$

Powierzchnia ścianki BCGF przed deformacją:

$$A_R = \iint_{BCGF} dA_R = \int_{X_2=0}^1 \int_{X_3=0}^1 dX_2 dX_3 = 1 \quad (67)$$

Powierzchnię ścianki zdeformowanej możemy obliczyć w sposób analogiczny, przy czym wykorzystamy tutaj zależność, która wiąże wielkość infinitezimalnego elementu powierzchniowego przed deformacją i po deformacji:

$$dA = J \sqrt{(\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1})^T} dA_R \quad (68)$$

Wtedy:

$$A = \iint_{BCGF} dA = \iint_{BCGF} J \sqrt{(\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1})^T} dA_R \quad (69)$$

Obliczamy:

$$\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1} = [1; 0; 0] \begin{bmatrix} -1 & \frac{4}{3} & -3 \\ 1 & -\frac{4}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \left[-1; \frac{4}{3}; -3\right] \quad (70)$$

$$(\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{N}^T \mathbf{F}^{-1})^T = \left[-1; \frac{4}{3}; -3\right] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \\ -3 \end{bmatrix} = (-1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + (-3)^2 = \frac{106}{9} \approx 11,778 \quad (71)$$

Powierzchnia ścianki BCGF po deformacji:

$$A = \iint_{BCGF} dA = \iint_{BCGF} 3 \cdot \sqrt{11,778} dA_R = 10,296 \int_{X_2=0}^1 \int_{X_3=0}^1 dX_2 dX_3 = 10,296 \cdot 1 = 10,296 \quad [\text{m}^2] \quad (72)$$

AD 11) DŁUGOŚĆ ODCINKA AG

Długość łuku krzywej można obliczyć jako **całkę krzywoliniową nieorientowaną z funkcji jednostkowej** wzdłuż rozpatrywanego łuku:

$$L_R = \int_{L_R} dS = \int_{L_R} \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \int_{L_R} \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda \quad (73)$$

Prosta zawierająca odcinek AG przed deformacją dana jest równaniami:

$$\mathbf{X}_{AG}(\lambda) = \mathbf{X}_A + \lambda(\mathbf{X}_G - \mathbf{X}_A) = \begin{cases} X_1(\lambda) = X_1^A + \lambda(X_1^G - X_1^A) = 0 + \lambda(1 - 0) = \lambda \\ X_2(\lambda) = X_2^A + \lambda(X_2^G - X_2^A) = 0 + \lambda(1 - 0) = \lambda \\ X_3(\lambda) = X_3^A + \lambda(X_3^G - X_3^A) = 0 + \lambda(1 - 0) = \lambda \end{cases} \quad (74)$$

Odcinkowi AG odpowiadają wartości parametru krzywej: $\lambda \in \langle 0 ; 1 \rangle$

Pochodne współrzędnych punktów krzywej względem parametru krzywej:

$$\frac{dX_1}{d\lambda} = 1, \quad \frac{dX_2}{d\lambda} = 1, \quad \frac{dX_3}{d\lambda} = 1 \quad (75)$$

Długość odcinka AG przed deformacją:

$$\begin{aligned} L_R &= \int_{AG} dS = \int_{AG} \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2} = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2} d\lambda = \\ &= \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{3} d\lambda = \sqrt{3} \int_0^1 d\lambda = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3} \approx 1,732 \quad [\text{m}] \quad (76) \end{aligned}$$

Długość krzywej zdeformowanej możemy obliczyć w sposób analogiczny, przy czym wykorzystamy tutaj zależność, która wiąże wielkość infinitezimalnego elementu liniowego przed deformacją i po deformacji:

$$ds = \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} \quad (77)$$

Długość odcinka AG po deformacji:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_L ds = \int_{AG} \sqrt{C_{ij} dX_i dX_j} = \int_{AG} \sqrt{C_{ij} \frac{dX_i}{d\lambda} \frac{dX_j}{d\lambda}} d\lambda = \\
 &= \int_0^1 \sqrt{C_{11} \left(\frac{dX_1}{d\lambda}\right)^2 + C_{22} \left(\frac{dX_2}{d\lambda}\right)^2 + C_{33} \left(\frac{dX_3}{d\lambda}\right)^2 + 2C_{23} \frac{dX_2}{d\lambda} \frac{dX_3}{d\lambda} + 2C_{31} \frac{dX_3}{d\lambda} \frac{dX_1}{d\lambda} + 2C_{12} \frac{dX_1}{d\lambda} \frac{dX_2}{d\lambda}} d\lambda = \\
 &= \int_0^1 \sqrt{5 \cdot (1)^2 + 10 \cdot (1)^2 + 25 \cdot (1)^2 + 2 \cdot (-12) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-8) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1} d\lambda = \int_0^1 \sqrt{14} d\lambda = \\
 &= \sqrt{14} \int_0^1 d\lambda = \sqrt{14} \cdot 1 = \sqrt{14} \approx 3,742 \quad (78)
 \end{aligned}$$

AD 12) OBJĘTOŚĆ BRYŁY

Objętość bryły można obliczyć jako **całkę potrójną po konfiguracji bryły**. Konfiguracja początkowa określona jest następująco:

$$V_R = \{ \mathbf{X} : X_1 \in \langle 0; 1 \rangle \wedge X_2 \in \langle 0; 1 \rangle \wedge X_3 \in \langle 0; 1 \rangle \} \quad (79)$$

Objętość bryły przed deformacją:

$$V_R = \iiint_V dV_R = \int_{X_1=0}^1 \int_{X_2=0}^1 \int_{X_3=0}^1 dX_1 dX_2 dX_3 = 1$$

Objętość bryły zdeformowanej możemy obliczyć w sposób analogiczny, przy czym wykorzystamy tutaj zależność, która wiąże wielkość infinitezimalnego elementu objętościowego przed deformacją i po deformacji:

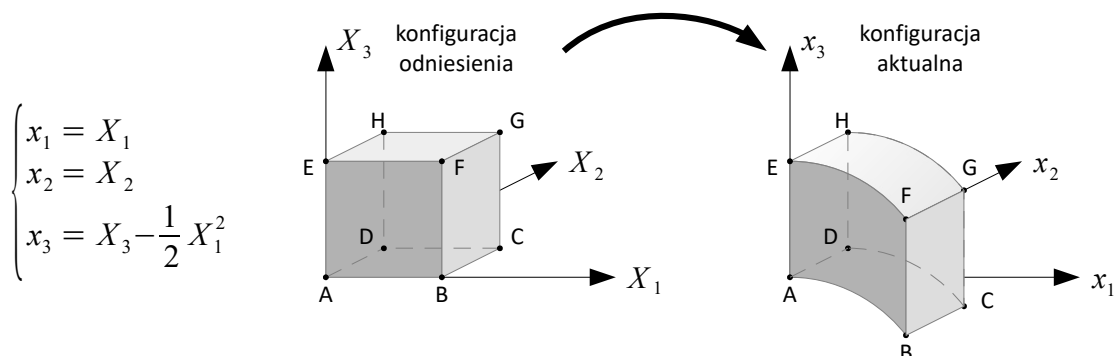
$$dV = J dV_R \quad (80)$$

Objętość bryły po deformacji:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_V dV = \iiint_V J dV_R = \int_{X_1=0}^1 \int_{X_2=0}^1 \int_{X_3=0}^1 (3) dX_1 dX_2 dX_3 = \\
 &= 3 \int_{X_1=0}^1 \int_{X_2=0}^1 \int_{X_3=0}^1 dX_1 dX_2 dX_3 = 3 \cdot 1 = 3 \quad (81)
 \end{aligned}$$

ZADANIE 23 (Wyznaczenie rozkładu odkształceń i naprężeń w opisie materialnym i przestrzennym)

Deformacja sprężysta jest zadana w opisie materialnym następującymi równaniami:



Wyznaczyć stan odkształcenia i naprężenia oraz obciążenie ścianki EFGH i rozkład sił masowych w opisie materialnym i przestrzennym. Przyjąć liniowe związki konstytutywne Hooke'a między II tensorem Pioli-Kirchhoffa a tensorem odkształcenia Greena – de Saint-Venanta.

ROZWIĄZANIE:

GRADIENT DEFORMACJI

Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jakobian przekształcenia:

$$J = \det \mathbf{F} = 1$$

Ponieważ $J > 0$ równania deformacji są lokalnie odwracalne we wszystkich punktach ciała. Równania deformacji w opisie przestrzennym:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 + \frac{1}{2} x_1^2 \end{cases}$$

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TENSOR DEFORMACJI

Materialny tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} X_1^2 + 1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -X_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor deformacji:

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1^2 + 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

STAN ODKSZTAŁCENIA

Materialny tensor odkształcenia: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} \frac{X_1^2}{2} & 0 & -\frac{X_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{X_1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Przestrzenny tensor odkształcenia: $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} -\frac{x_1^2}{2} & 0 & -\frac{x_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

STAN NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju (opis materialny)

$$\mathbf{T}_S = 2G \mathbf{E} + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2G + \lambda) X_1^2 & 0 & -G X_1 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} X_1^2 & 0 \\ -G X_1 & 0 & \frac{\lambda}{2} X_1^2 \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju (opis materialny)

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} \frac{X_1^2}{2}(2G + \lambda) & 0 & -G X_1 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} X_1^2 & 0 \\ -\frac{X_1}{2}[2G + (2G + \lambda) X_1^2] & 0 & \frac{X_1^2}{2}(2G + \lambda) \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego (opis przestrzenny) – wyznaczamy go najpierw korzystając z wielkości wyznaczonych w ramach opisu materialnego, a następnie podstawiając podstawiając odwrócone związki deformacyjne.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\sigma &= \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{F}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{X_1^2}{2}(2G + \lambda) & 0 & -\frac{X_1}{2}[2G + (2G + \lambda) X_1^2] \\ 0 & \frac{\lambda}{2} X_1^2 & 0 \\ -\frac{X_1}{2}[2G + (2G + \lambda) X_1^2] & 0 & \frac{X_1^2}{2}[4G + \lambda + (2G + \lambda) X_1^2] \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{2}(2G+\lambda) & 0 & -\frac{x_1}{2}[2G+(2G+\lambda)x_1^2] \\ 0 & \frac{\lambda}{2}x_1^2 & 0 \\ -\frac{x_1}{2}[2G+(2G+\lambda)x_1^2] & 0 & \frac{x_1^2}{2}[4G+\lambda+(2G+\lambda)x_1^2] \end{bmatrix}$$

OBCIĄŻENIE BRZEGU

Równanie ścianki EFGH przed deformacją:

$$F = X_3 - 1 = 0$$

Normalna zewnętrzna ścianki EFGH przed deformacją:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} F}{|\nabla_{\mathbf{x}} F|} = [0 ; 0 ; 1]$$

Wektor obciążenia nominalnego:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -G X_1 \\ 0 \\ \frac{X_1^2}{2}(2G+\lambda) \end{bmatrix}$$

Równanie ścianki EFGH po deformacji:

$$f = X_3 - 1 = x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 - 1 = 0$$

Normalna zewnętrzna ścianki EFGH po deformacji:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} f}{|\nabla_{\mathbf{x}} f|} = \left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} ; 0 ; \frac{1}{\sqrt{x_1^2+1}} \right]$$

Wektor obciążenia rzeczywistego:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{-x_1 G}{\sqrt{x_1^2+1}} \\ 0 \\ \frac{x_1^2(2G+\lambda)}{2\sqrt{x_1^2+1}} \end{bmatrix}$$

ROZKŁAD SIŁ MASOWYCH

Równania równowagi w opisie materialnym, dla tensora naprężeń Pioli Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + B_i = 0 \quad i=1,2,3$$

Na ich podstawie wyznaczamy **wektor sił masowych w opisie materialnym**:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} + \rho_R B_1 = X_1(2G + \lambda) + B_1 = 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3} + \rho_R B_2 = B_2 = 0 \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} + \rho_R B_3 = -G - \frac{3}{2}(2G + \lambda)X_1^2 + B_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = -(2G + \lambda)X_1 \\ B_2 = 0 \\ B_3 = \left[G + \frac{3}{2}(2G + \lambda)X_1^2 \right] \end{cases}$$

Równania równowagi w opisie przestrzennym, dla tensora naprężeń Cauchy'ego:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad i=1,2,3$$

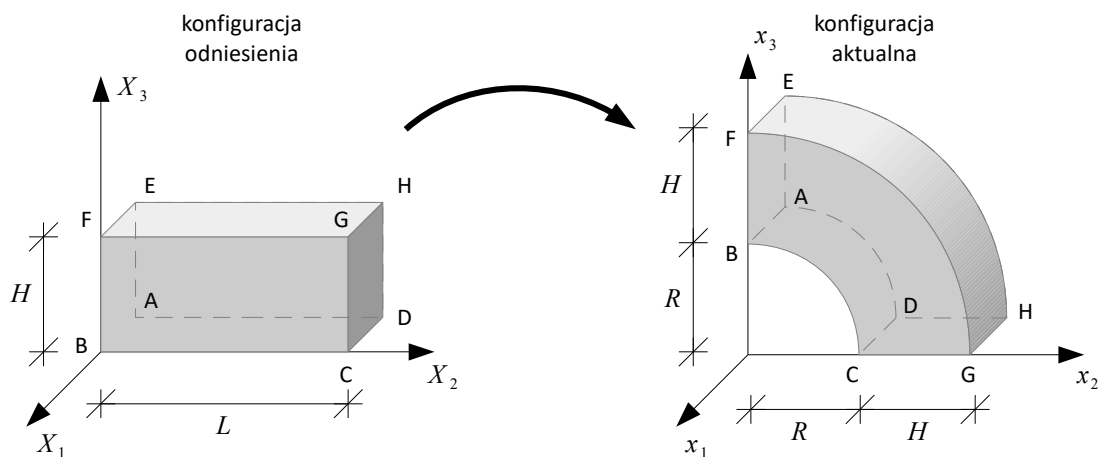
Na ich podstawie wyznaczamy **wektor sił masowych w opisie przestrzennym**:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 = x_1(2G + \lambda) + b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 = b_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = -G - \frac{3}{2}(2G + \lambda)x_1^2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -(2G + \lambda)x_1 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = \left[G + \frac{3}{2}(2G + \lambda)x_1^2 \right] \end{cases}$$

ZADANIE 24 (Wyznaczenie rozkładu odkształceń i naprężeń w opisie materialnym i przestrzennym)

Deformacja sprężysta jest zadana w opisie materialnym następującymi równaniami:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = (R + X_3) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) \\ x_3 = (R + X_3) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) \end{cases} \text{ gdzie } \begin{cases} R > 0 \\ L > 0 \\ H > 0 \end{cases}$$



Wyznaczyć stan odkształcenia i naprężenia oraz aktualne obciążenie ścianki EFGH zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym. Przyjąć liniowe związki konstytutywne Hooke'a między II tensorem Pioli-Kirchhoffa a tensorem odkształcenia Greena – de Saint-Venanta .

ROZWIĄZANIE:

GRADIENT DEFORMACJI

Materialny gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi(R+X_3)}{2L} \cos\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) \\ 0 & -\frac{\pi(R+X_3)}{2L} \sin\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) \end{bmatrix}$$

Jakobian przekształcenia:

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{\pi(R+X_3)}{2L} \text{ dla } X_3 > 0 \text{ mamy } J > 0$$

Równania deformacji dla danego obszaru są lokalnie odwracalne.

OPIS PRZESTRZENNY

Odwrócone równania deformacji:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = \frac{2L}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \\ X_3 = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} - R \end{cases}$$

Przestrzenny gradient deformacji:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2Lx_3}{\pi(x_2^2 + x_3^2)} & -\frac{2Lx_2}{\pi(x_2^2 + x_3^2)} \\ 0 & \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} & \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \end{bmatrix}$$

TENSOR DEFORMACJI

Materialny tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2(R + X_3)^2}{4L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor deformacji:

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2 x_2^2 (x_2^2 + x_3^2) + 4z^2 L^2}{\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} & \frac{x_2 x_3 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} \\ 0 & \frac{x_2 x_3 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} & \frac{\pi^2 x_3^2 (x_2^2 + x_3^2) + 4y^2 L^2}{\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} \end{bmatrix}$$

TENSOR ODKSZTAŁCENIA

Materialny tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2(R + X_3)^2 - 4L^2}{8L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przestrzenny tensor odkształcenia:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_3^2 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{2\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} & -\frac{x_2 x_3 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{2\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} \\ 0 & -\frac{x_2 x_3 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{2\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} & \frac{x_2^2 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{2\pi^2 (x_2^2 + x_3^2)^2} \end{bmatrix}$$

TENSOR NAPRĘŻENIA

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 2 rodzaju:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_S &= 2G \mathbf{E} + \lambda \cdot \text{tr}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{8L^2} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda + 2G}{8L^2} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{8L^2} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_R &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_S = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{8L^2} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\pi(\lambda + 2G)}{16L^3} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] (R + X_3) \cos\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) & \dots \\ 0 & \frac{\pi(\lambda + 2G)}{16L^3} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] (R + X_3) \sin\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & \frac{\lambda}{8L^2} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] \sin\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) & \dots \\ \dots & \frac{\lambda}{8L^2} [\pi^2 (R + X_3)^2 - 4L^2] \cos\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tensor naprężenia Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\sigma &= \frac{1}{J} \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \text{sym} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \\ \sigma_{11} &= \frac{\lambda [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{4\pi L \sqrt{x_3^2 + x_2^2}} \\ \sigma_{12} &= 0 \\ \sigma_{13} &= 0 \\ \sigma_{22} &= \frac{[\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2] \cdot [\pi^2 (\lambda + 2G) x_3^2 (x_2^2 + x_3^2) + 4\lambda x_2^2 L^2]}{16\pi L^3 (x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \\ \sigma_{23} &= -\frac{x_2 x_3 [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2] \cdot [\pi^2 (\lambda + 2G) (x_2^2 + x_3^2) - 4\lambda L^2]}{16\pi L^3 (x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \\ \sigma_{33} &= \frac{[\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2] \cdot [\pi^2 (\lambda + 2G) x_2^2 (x_2^2 + x_3^2) + 4\lambda x_3^2 L^2]}{16\pi L^3 (x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

OBCIĄŻENIE BRZEGU

Ścianka EFGH przed deformacją leży w płaszczyźnie o równaniu: $F: X_3 - H = 0$

Normalna zewnętrzna ścianki EFGH przed deformacją: $\mathbf{N} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} F}{|\nabla_{\mathbf{x}} F|} = [0; 0; 1]$

Wektor nominalnego obciążenia ścianki EFGH:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda}{8L^2} [(R+X_3)^2 - 4L^2] \sin\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) \\ \frac{\lambda}{8L^2} [(R+X_3)^2 - 4L^2] \cos\left(\frac{\pi}{2L} X_2\right) \end{bmatrix}$$

Ścianka EFGH po deformacji leży na powierzchni o równaniu: $f: \sqrt{x_2^2 + x_3^2} - (R+H) = 0$

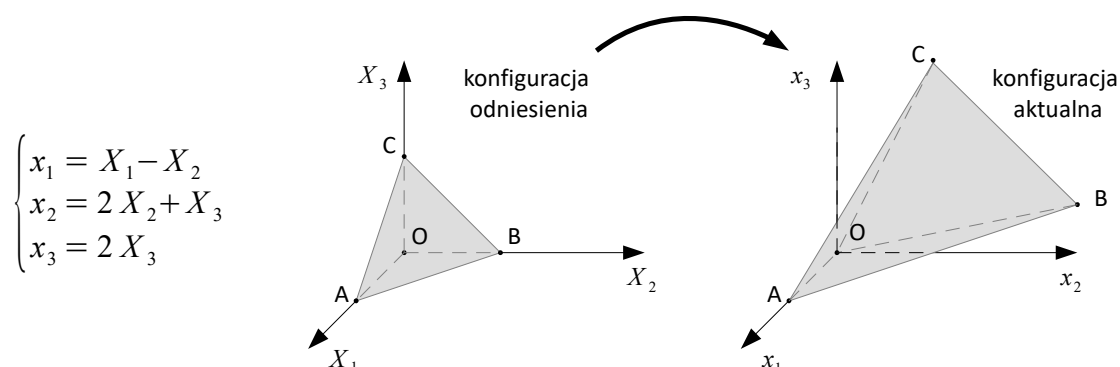
Normalna zewnętrzna ścianki EFGH po deformacji: $\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} f}{|\nabla_{\mathbf{x}} f|} = \left[0; \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}; \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \right]$

Wektor rzeczywistego obciążenia ścianki EFGH:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda y [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{4\pi L (x_2^2 + x_3^2)} \\ \frac{\lambda z [\pi^2 (x_2^2 + x_3^2) - 4L^2]}{4\pi L (x_2^2 + x_3^2)} \end{bmatrix}$$

ZADANIE 25 (Odtworzenie obciążenia dla zadanej deformacji i rozkładu naprężeń)

Dane są równania deformacji sprężystej w opisie materialnym:



Stan naprężenia w konfiguracji aktualnej opisuje tensor naprężenia Cauchy'ego postaci:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_3 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć rozkład sił masowych oraz wektor obciążenia ścianek OAC oraz ABC zarówno w opisie materialnym jak i przestrzennym.

ROZWIĄZANIE:

Materialny gradient deformacji: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Jakobian przekształcenia: $J = \det \mathbf{F} = 4$

Ponieważ $J > 0$, **równania deformacji są lokalnie odwracalne we wszystkich punktach ciała.** Równania deformacji w opisie przestrzennym:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{4} \\ X_2 = \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{4} \\ X_3 = \frac{x_3}{2} \end{cases}$$

ROZKŁAD SIŁ MASOWYCH

Równania równowagi w opisie przestrzennym, dla tensora naprężeń Cauchy'ego:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad i=1,2,3$$

Na ich podstawie wyznaczamy **wektor sił masowych w opisie przestrzennym**:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho g_1 = 1 + \rho g_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho g_2 = 1 + 2 + \rho g_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_3 = 2x_3 + \rho g_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = -\frac{1}{\rho} \\ g_2 = -\frac{3}{\rho} \\ g_3 = -\frac{2x_3}{\rho} \end{cases}$$

Aby wyznaczyć siły masowe w opisie materialnym, potrzebujemy **tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa 1 rodzaju**:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_R &= J \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} = J \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{f}^T = \\ &= \begin{bmatrix} 4(x_1 + x_2) & 0 & 0 \\ 2(x_2 - 2x_3) & 2(x_2 - 2x_3) & 4x_3 \\ x_3(4 - x_3) & x_3(4 - x_3) & 2x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(X_1 + X_2 + X_3) & 0 & 0 \\ 2(2X_2 - 3X_3) & 2(2X_2 - 3X_3) & 8X_3 \\ 4X_3(2 - X_3) & 4X_3(2 - X_3) & 8X_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Równania równowagi w opisie materialnym, dla tensora naprężeń Pioli Kirchhoffa 1 rodzaju:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + \rho_R g_i = 0 \quad i=1,2,3$$

Na ich podstawie wyznaczamy **wektor sił masowych w opisie materialnym**:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3} + \rho_R g_1 = 4 + \rho_R g_1 = 0 \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3} + \rho_R g_2 = 4 + 8 + \rho_R g_2 = 0 \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3} + \rho_R g_3 = 16X_3 + \rho_R g_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = -\frac{4}{\rho_R} \\ g_2 = -\frac{12}{\rho_R} \\ g_3 = -\frac{16X_3}{\rho_R} \end{cases}$$

Gęstość przed deformacją wyznaczamy z **zasady zachowania masy**: $\rho_R = J\rho = 4\rho$

Uwzględniając odwrócone związki deformacyjne przekonujemy się, że wektor sił masowych wyrażony w ramach jednego i drugiego opisu jest taki sam

$$\begin{cases} g_1(X_1, X_2, X_3) = -\frac{4}{\rho_R} = -\frac{1}{\rho} = g_1(x_1, x_2, x_3) \\ g_2(X_1, X_2, X_3) = -\frac{12}{\rho_R} = -\frac{3}{\rho} = g_2(x_1, x_2, x_3) \\ g_3(X_1, X_2, X_3) = -\frac{16X_3}{\rho_R} = -\frac{2x_3}{\rho} = g_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

OBCIĄŻENIE ŚCIANKI OAC

Równanie ścianki OAC przed deformacją:

$$F = X_2 = 0$$

Normalna zewnętrzna ścianki OAC przed deformacją:

$$\mathbf{N} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} F}{|\nabla_{\mathbf{x}} F|} = [0 ; -1 ; 0]$$

Wektor obciążenia nominalnego:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(3 X_3 - 2 X_2) \\ 4 X_3 (X_3 - 2) \end{bmatrix}$$

Równanie ścianki OAC po deformacji:

$$f = X_2 = \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{4} = 0$$

Normalna do ścianki OAC po deformacji:

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} f}{|\nabla_{\mathbf{x}} f|} = \left[0 ; -\frac{2}{\sqrt{5}} ; \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

Wektor obciążenia rzeczywistego:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}}(2 x_3 - x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} x_3 (x_3 - 4) \end{bmatrix}$$

OBCIĄŻENIE ŚCIANKI ABC

Równanie ścianki ABC przed deformacją:

$$F = X_1 + X_2 + X_3 - 1 = 0$$

Normalna zewnętrzna ścianki ABC przed deformacją:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} F}{|\nabla_{\mathbf{x}} F|} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

Wektor obciążenia nominalnego:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3) \\ \frac{4}{\sqrt{3}}(2 X_2 - X_3) \\ \frac{16}{\sqrt{3}} X_3 \end{bmatrix}$$

Równanie ścianki ABC po deformacji:

$$f = X_1 + X_2 + X_3 - 1 = x_1 + x_2 - 1 = 0$$

Normalna do ścianki ABC po deformacji:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} f}{|\nabla_{\mathbf{x}} f|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 0 \right]$$

Wektor obciążenia rzeczywistego:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} x_3 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 26 (Porównanie miar odkształcenia dla teorii liniowej i nieliniowej)

Dane są równania opisujące deformację w opisie materialnym:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 + a(X_3 - 1)X_2 \\ x_3 = X_3 - bX_2 \end{cases}$$

Wyznaczyć tensor odkształcenia Greena – de Saint-Venanta oraz tensor małych odkształceń Cauchy'ego i tensor małych obrotów.

ROZWIĄZANIE:

NIELINIOWA TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI – teoria dużych odkształceń i przemieszczeń:

Gradient deformacji:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a(X_3-1) & -b \\ 0 & -aX_2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a(X_3-1) & aX_2 \\ 0 & -b & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor deformacji:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2(X_3-1)^2 + 2a(X_3-1) + 1 + b^2 & aX_2 - b + a^2X_2(X_3-1) & 0 \\ \text{sym} & a^2X_2^2 + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor odkształcenia:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a^2(X_3-1)^2 + b^2}{2} + a(X_3-1) & \frac{a^2X_2(X_3-1)}{2} + \frac{aX_2 - b}{2} & 0 \\ \text{sym} & \frac{a^2X_2^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

LINIOWA TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI – teoria małych odkształceń i przemieszczeń:

Wektor przemieszczenia: $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = [0 ; aX_2(X_3 - 1) ; -bX_2]^T$

Gradient przemieszczenia: $\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(X_3 - 1) & aX_2 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$

Część symetryczna – **tensor małych odkształceń**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(X_3 - 1) & \frac{aX_2 - b}{2} \\ 0 & \frac{aX_2 - b}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Część antysymetryczna – **tensor małych obrotów**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aX_2 + b}{2} \\ 0 & -\frac{aX_2 + b}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Dla $a, b \ll 1$ wyrazy z wyższymi potęgami tych parametrów szybko maleją do 0 i $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$.
Przykładowo, dla $a=b=0,1$:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & 0,005 X_3^2 + 0,09 X_3 - 0,09 & 0,005 X_2 X_3 + 0,045 X_2 - 0,05 \\ & & 0,005 X_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & 0,1 X_3 - 0,1 & 0,05 X_2 - 0,05 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Różnica między nimi powyższymi tensorami jest równa:

$$\mathbf{E} - \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega})^T \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sym} & 0,005 X_3^2 + 0,01 X_3 - 0,01 & 0,005 X_2 X_3 + 0,005 X_2 \\ & & 0,005 X_2^2 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 27 (Podstawowe równania liniowej teorii sprężystości)

Deformacja ciała opisana jest poprzez rozkład przemieszczeń.

$$\begin{cases} u_1 = 0,002 x_1^2 - 0,001 x_1 x_2 \\ u_2 = 0,004 x_2 x_3 \\ u_3 = -0,002 x_3^2 \end{cases}$$

Zakładając, że zarówno przemieszczenia jak i odkształcenia są małe oraz przyjmując związki konstytutywne prawa Hooke'a dla modułu Younga $E = 210 \text{ GPa}$ oraz współczynnika Poissona $\nu = 0,2$ wyznacz:

- tensor małych odkształceń,
- tensor naprężenia,
- wektor sił masowych.

ROZWIĄZANIE:

Tensor odkształcenia wyznaczamy ze **związków geometrycznych (kinematycznych) Cauchy'ego**:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,004 x_1 - 0,001 x_2 & -0,0005 x_1 & 0 \\ -0,0005 x_1 & 0,004 x_3 & 0,002 x_2 \\ 0 & 0,002 x_2 & -0,004 x_3 \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia wyznaczamy z **prawa Hooke'a**:

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 87,5 \text{ GPa} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 58,33 \text{ GPa} \\ \sigma_{ij} &= 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0,933 x_1 - 0,233 x_2 & -0,0875 x_1 & 0 \\ -0,0875 x_1 & 0,7 x_3 - 0,0583 x_2 + 0,233 x_1 & 0,350 x_2 \\ 0 & 0,350 x_2 & -0,7 x_3 - 0,0583 x_2 + 0,233 x_1 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \text{ [Pa]} \end{aligned}$$

Wektor sił masowych wyznaczamy z **równań równowagi**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i &= 0 \\ i=1 : \quad 0,933 \cdot 10^9 + 0 + 0 + \rho b_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{0,933 \cdot 10^9}{\rho} \\ i=2 : \quad -0,0875 \cdot 10^9 - 0,0583 \cdot 10^9 + 0 + \rho b_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{0,1458 \cdot 10^9}{\rho} \\ i=3 : \quad 0 + 0,350 \cdot 10^9 - 0,7 \cdot 10^9 + \rho b_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad b_3 = \frac{0,350 \cdot 10^9}{\rho} \end{aligned}$$

ZADANIE 28 (Proste zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości)

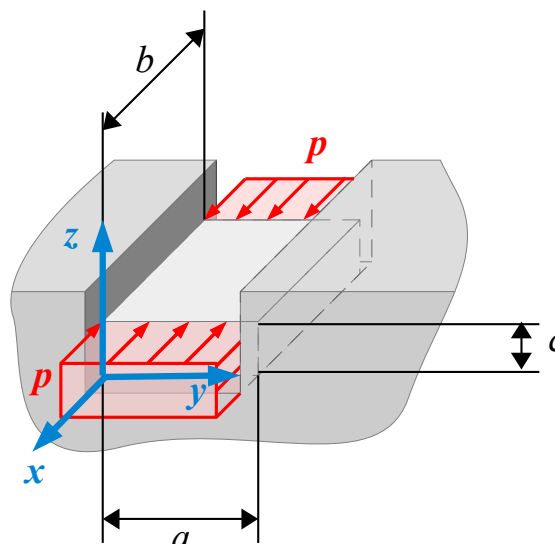
Prostopadłościenny blok o wymiarach a , b , c wykonany z izotropowego materiału liniowo sprężystego umieszczony został w nieodkształcalnym korytku i poddany został obciążeniu ściskającemu p , jak to przedstawiono na rysunku. Wyznaczyć stan naprężenia i odkształcenia wewnątrz bloku (w zakresie teorii małych odkształceń i przemieszczeń), wymiary geometryczne po deformacji, dylatację (I niezmiennik stanu odkształcenia) oraz rzeczywistą względną zmianę objętości. Wyznaczyć ekstremalne naprężenia styczne. Założyć, że tarcie między ściankami bloku i korytka jest pomijalnie małe. Przyjąć:

$$a = 10 \text{ mm}, \quad b = 15 \text{ mm}, \quad c = 6 \text{ mm}$$

$$\text{Moduł Younga:} \quad E = 70 \text{ GPa}$$

$$\text{Współczynnik Poissona:} \quad \nu = 0,35$$

$$\text{Gęstość obciążenia:} \quad p = 180 \text{ MPa}$$



ROZWIĄZANIE:

Z warunków zadania otrzymujemy:

- Brak więzów ograniczających ruch na kierunku x i równomiernie rozłożone obciążenie ściskające na przeciwległych ściankach prostopadłych do x : $\sigma_{xx} = -p$, $\epsilon_{xx} \neq 0$
- Brak obciążenia i swobodne przemieszczanie się na kierunku z : $\sigma_{zz} = 0$, $\epsilon_{zz} \neq 0$
- Odkształcenie na kierunku y zablokowane przez ścianki nieodkształcalnego korytka, na których powstają siły reakcji generujące naprężenie ściskające σ_{yy} : $\epsilon_{yy} = 0$, $\sigma_{yy} \neq 0$
- Brak tarcia \rightarrow zerowe naprężenia styczne $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0$ skąd (na podstawie prawa Hooke'a) zerowe odkształcenia postaciowe $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{xy} = 0$.

Znając naprężenia normalne σ_{xx} i σ_{zz} oraz odkształcenie ϵ_{yy} , nieznane naprężenie σ_{yy} , jakie powstaje wskutek oporu, jaki stawiają rozszerzającemu się poprzecznie wskutek ściskania blokowi ścianki sztywnego korytka, obliczyć możemy na podstawie uogólnionego prawa Hooke'a dla ciała izotropowego:

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad \Rightarrow \quad \sigma_{yy} = [E \epsilon_{yy} + \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] = -\nu p = -63 \text{ MPa}$$

W ten sposób znane są już wszystkie składowe **tensora naprężenia**:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -\nu p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180 & 0 & 0 \\ 0 & -63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

Tensor naprężenia jest w postaci diagonalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest opisany w układzie swoich osi własnych. **Wyznaczone naprężenia są zatem naprężeniami głównymi.** Na tej podstawie wyznaczamy **ekstremalne naprężenia styczne**:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_{min} &= -180 \text{ MPa} \\ |\tau_{max}| &= \frac{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}{2} = 90 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Nieznane odkształcenia liniowe ϵ_{xx} i ϵ_{zz} wyznaczamy na podstawie związków prawa Hooke'a:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{p}{E} (\nu^2 - 1) = -2,256\text{‰} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{p}{E} \nu(\nu + 1) = 1,215\text{‰}\end{aligned}$$

Tensor odkształcenia:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \text{sym} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ & & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{E} (\nu^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{E} \nu(\nu + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,256 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,215 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad [-]$$

Wymiary bloku w konfiguracji aktualnej (odkształconej):

$$\begin{aligned}a' &= a + a \epsilon_{yy} = a(1 + \epsilon_{yy}) = a = 10 \text{ mm} \\ b' &= b + b \epsilon_{xx} = b(1 + \epsilon_{xx}) = 14,96616 \text{ mm} \\ c' &= c + c \epsilon_{zz} = c(1 + \epsilon_{zz}) = 6,00729 \text{ mm}\end{aligned}$$

Objętość początkowa:

$$V = abc = 900 \text{ mm}^3$$

Objętość po deformacji:

$$V' = a' b' c' = 899,0606 \text{ mm}^3$$

Rzeczywista względna zmiana objętości:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = -1,044\text{‰}$$

Dylatacja (I niezmiennik stanu odkształcenia):

$$\theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = -1,041\text{‰}$$

Porównanie rzeczywistego względnego odkształcenia objętościowego z dylatacją:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{V' - V}{V} = \frac{a' b' c' - abc}{abc} = \frac{a(1 + \epsilon_{xx}) b(1 + \epsilon_{yy}) c(1 + \epsilon_{zz}) - abc}{abc} = \\ &= (1 + \epsilon_{xx})(1 + \epsilon_{yy})(1 + \epsilon_{zz}) - 1 = \underbrace{(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})}_{\theta} + \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} + \epsilon_{zz} \epsilon_{xx} + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} = \\ &= -1,041\text{‰} - 0,00274\text{‰} = -1,044\text{‰}\end{aligned}$$

ZADANIE 29 (Różnica między płaskim stanem naprężenia i płaskim stanem odkształcenia)

Stan naprężenia w pewnym układzie płaskim opisuje tensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 70 & -30 \\ -30 & 140 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Jaki będzie przestrzenny rozkład naprężeń i odkształceń przy założeniu płaskiego stanu naprężenia, a jaki w przypadku płaskiego stanu odkształcenia? Przyjmij liniowe związki konstytutywne Hooke'a dla $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.

ROZWIĄZANIE:

PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$) :

Tensor naprężenia:
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 70 & -30 & 0 \\ -30 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \text{ (płaski)}$$

Tensor odkształcenia:
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4 & -5,571 & 0 \\ -5,571 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} [-] \text{ (anty płaski)}$$

PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA ($\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$) :

$$\varepsilon_{13} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 63 \text{ MPa}$$

Tensor naprężenia:
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 70 & -30 & 0 \\ -30 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 63 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \text{ (anty płaski)}$$

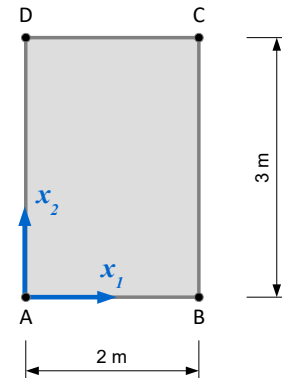
Tensor odkształcenia:
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1,3 & -5,571 & 0 \\ -5,571 & 14,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} [-] \text{ (płaski)}$$

ZADANIE 30 (Odtworzenie obciążenia tarczy prostokątnej – małe odkształcenia)

Dana jest tarcza prostokątna o wymiarach $2\text{ m} \times 3\text{ m}$, w której stan naprężenia opisany jest w układzie współrzędnych jak na rysunku tensorem naprężenia:

$$\sigma(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1x_2 - 1 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$



Wyznaczyć obciążenie tarczy – siły masowe oraz obciążenie powierzchniowe jej brzegu. Dokonać rozkładu obciążenia brzegowego na składową styczną i normalną do brzegu.

ROZWIĄZANIE:

SIŁY MASOWE:

Siły masowe, będące wewnętrznym obciążeniem punktów tarczy, wyznaczamy na podstawie **równań równowagi Naviera**, które spełniać muszą składowe tensora naprężenia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \Rightarrow 3x_2 + 0 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -3x_2 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \Rightarrow -2 + 3 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -1 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned}$$

Wartości w narożach tarczy

$A = (0,0)$

$b_1(A) = 0, \quad b_2(A) = -1 \Rightarrow b(A) = \sqrt{b_1^2(A) + b_2^2(A)} = 1$

$B = (2,0)$

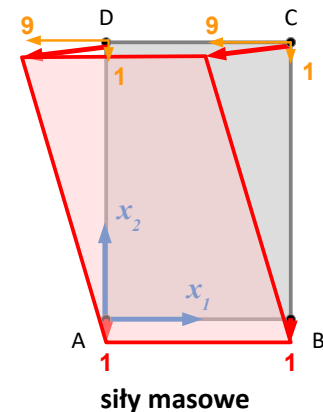
$b_1(B) = 0, \quad b_2(B) = -1 \Rightarrow b(B) = \sqrt{b_1^2(B) + b_2^2(B)} = 1$

$C = (2,3)$

$b_1(C) = -9, \quad b_2(C) = -1 \Rightarrow b(C) = \sqrt{b_1^2(C) + b_2^2(C)} = 9,055$

$D = (0,3)$

$b_1(D) = -9, \quad b_2(D) = -1 \Rightarrow b(D) = \sqrt{b_1^2(D) + b_2^2(D)} = 9,055$



OBCIĄŻENIE BRZEGOWE:

Dla każdego brzegu określamy zależności między współrzędnymi x_1 i x_2 na tym brzegu, które podstawiamy do tensora naprężenia, oraz wyznaczamy normalną zewnętrzną \mathbf{n} tego brzegu. Wektor obciążenia brzegowego \mathbf{q} wyznaczamy z zależności $\mathbf{q} = \sigma \cdot \mathbf{n}$. Znak wyznaczonych składowych wektora obciążenia określa jego zwrot w globalnym układzie współrzędnych.

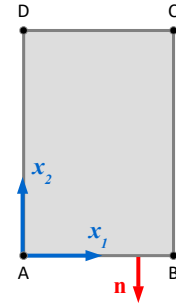
Brzeg AB: $x_1 \in (0; 2)$, $x_2 = 0$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{AB} = [0; -1]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{AB} = \mathbf{q}_{AB} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(AB)} \\ q_2^{(AB)} \end{bmatrix}$$

- Składowa x_1 wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- Składowa x_2 wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.

$$A=(0,0): q_1^{(AB)}(A) = 0, q_2^{(AB)}(A) = 0$$

$$B=(2,0): q_1^{(AB)}(B) = 4, q_2^{(AB)}(B) = -4$$



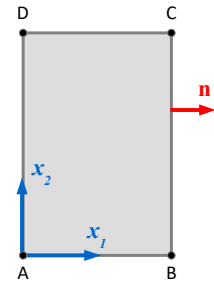
Brzeg BC: $x_1 = 2$, $x_2 \in (0; 3)$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{BC} = [1; 0]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{BC} = \mathbf{q}_{BC} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x_2-1 & -4 \\ -4 & 4+3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_2-1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(BC)} \\ q_2^{(BC)} \end{bmatrix}$$

- Składowa x_1 wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- Składowa x_2 wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.

$$B=(2,0): q_1^{(BC)}(B) = -1, q_2^{(BC)}(B) = -4$$

$$C=(2,3): q_1^{(BC)}(C) = 17, q_2^{(BC)}(C) = -4$$



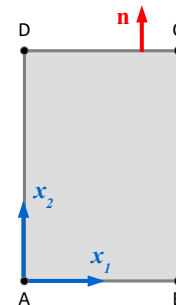
Brzeg CD: $x_1 \in (0; 2)$, $x_2 = 3$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{CD} = [0; 1]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{CD} = \mathbf{q}_{CD} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9x_1-1 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2x_1+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 2x_1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(CD)} \\ q_2^{(CD)} \end{bmatrix}$$

- Składowa x_1 wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- Składowa x_2 wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.

$$C=(2,3): q_1^{(CD)}(C) = -4, q_2^{(CD)}(C) = 13$$

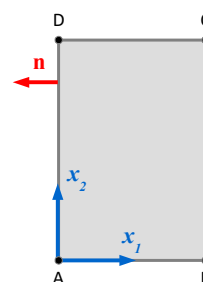
$$D=(0,3): q_1^{(CD)}(D) = 0, q_2^{(CD)}(D) = 9$$



Brzeg DA: $x_1=0$, $x_2 \in (0;3)$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{DA} = [-1; 0]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{DA} = \mathbf{q}_{DA} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(DA)} \\ q_2^{(DA)} \end{bmatrix}$$

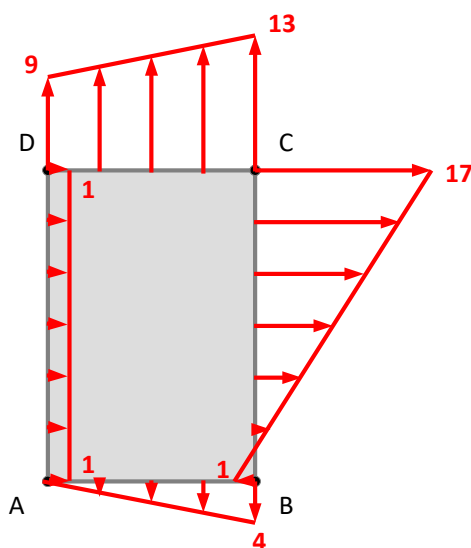
- Składowa x_1 wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- Składowa x_2 wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.



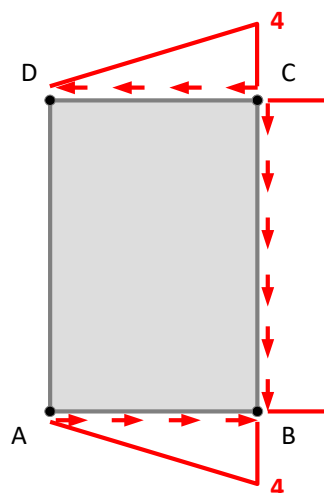
$$D=(0,3): q_1^{(DA)}(D) = 1, q_2^{(DA)}(D) = 0$$

$$A=(0,0): q_1^{(DA)}(A) = 1, q_2^{(DA)}(A) = 0$$

Uzyskane wyniki można zilustrować na wykresach obciążenia normalnego i stycznego:



obciążenie brzegowe normalne

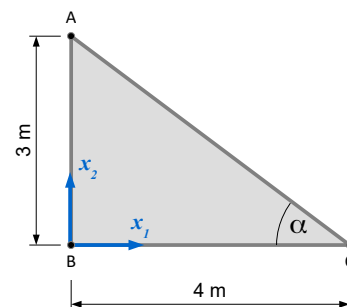


obciążenie brzegowe styczne

ZADANIE 31 (Odtworzenie obciążenia tarczy trójkątnej – małe odkształcenia)

Dana jest płaska tarcza trójkątna jak na rysunku. Wyznaczyć obciążenie tarczy, jeśli rozkład stanu naprężenia panującego wewnątrz tej tarczy opisuje pole tensorowe:

$$\sigma(x_1; x_2) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 4x_2 & 2x_1x_2 + 1 \\ 2x_1x_2 + 1 & 4 - 2x_1 \end{bmatrix} \quad [\text{Pa}]$$



ROZWIĄZANIE:

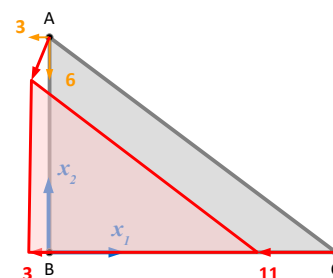
SIŁY MASOWE:

Wartość sił masowych stanowiących obciążenie wewnątrz tarczy wyznaczamy z **równań równowagi Naviera**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0 \Rightarrow 3 + 2x_1 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -3 - 2x_1 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0 \Rightarrow 2x_2 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -2x_2 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned}$$

Wartości w narożach tarczy:

$$\begin{aligned} B &= (0; 0) & C &= (4; 0) & A &= (0; 3) \\ b_1(0; 0) &= -3 & b_1(4; 0) &= -3 & b_1(0; 3) &= -11 \\ b_2(0; 0) &= -6 & b_2(4; 0) &= 0 & b_2(0; 3) &= 0 \end{aligned}$$

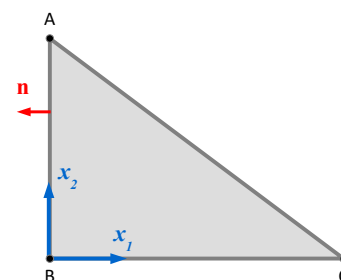


OBCIĄŻENIE BRZEGOWE:

Brzeg AB: $x_1 = 0, x_2 \in \langle 0; 3 \rangle$ - **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{AB} = [-1; 0]$

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{AB} = \mathbf{q}_{AB} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4x_2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(AB)} \\ q_2^{(AB)} \end{bmatrix}$$

- Składowa x_1 wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- Składowa x_2 wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.

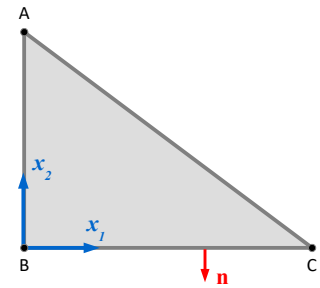


$$\begin{aligned} q_{(AB)}^{(x)}(0; 3) &= 12, & q_{(AB)}^{(x)}(0; 0) &= 0 \\ q_{(AB)}^{(y)}(0; 3) &= -1 & q_{(AB)}^{(y)}(0; 0) &= -1 \end{aligned}$$

Brzeg BC: $x_1 \in \langle 0; 4 \rangle$, $x_2 = 0$ - **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{BC} = [0; -1]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{BC} = \mathbf{q}_{BC} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x_1 & 1 \\ 1 & 4-2x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(BC)} \\ q_2^{(BC)} \end{bmatrix}$$

- Składowa x_1 wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- Składowa x_2 wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.



$$q_{(BC)}^{(x)}(0;0) = -1, \quad q_{(BC)}^{(x)}(4;0) = -1$$

$$q_{(BC)}^{(y)}(0;0) = -4, \quad q_{(BC)}^{(y)}(4;0) = 4$$

Brzeg CA: $x_1 \in \langle 0; 4 \rangle$, $x_2 = 3 - \frac{3}{4}x_1$ - **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{CA} = [\sin \alpha; \cos \alpha] = \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{CA} = \mathbf{q}_{CA} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x_1-4\left(3-\frac{3}{4}x_1\right) & 2x_1\left(3-\frac{3}{4}x_1\right)+1 \\ 2x_1\left(3-\frac{3}{4}x_1\right)+1 & 4-2x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}(-3x_1^2+21x_1-16) \\ \frac{1}{10}(-9x_1^2+20x_1+38) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^{(CA)} \\ q_2^{(CA)} \end{bmatrix}$$

Składowa **normalna** do brzegu:

(zwrot dodatni zgodny z normalną zewnętrzną)

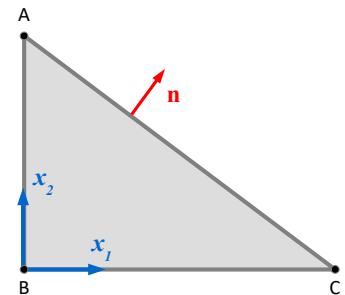
$$q_n^{(CA)} = \mathbf{q}_{CA} \cdot \mathbf{n}_{CA} = \frac{2}{25}(-18x_1^2 + 83x_1 - 10)$$

Wartości na końcach brzegu: $q_{CA}^{(n)}(4;0) = 2,72$, $q_{CA}^{(n)}(0;3) = -0,8$

Miejsca zerowe: $q_n^{(CA)} = 0 \Rightarrow x_1 = 0,124 \vee x_1 = 4,487$ $4,487 \notin CA$

Poszukiwanie ekstremum:

$$\frac{d q_n^{(CA)}}{d x_1} = \frac{2}{25}(-36x_1 + 83) = 0 \Rightarrow x_1 = 2,306, \quad q_n^{(CA)}(2,306) = 6,854$$



Składowa **styczna** do brzegu: $\mathbf{q}_s^{(CA)} = \mathbf{q}_{CA} - q_n^{(CA)} \mathbf{n}_{CA} = \frac{21x_1^2 - 276x_1 + 370}{250} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Wartości na końcach brzegu: $\mathbf{q}_s^{(CA)}(4;0) = \begin{bmatrix} 6,368 \\ -4,776 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{q}_s^{(CA)}| = 7,96$

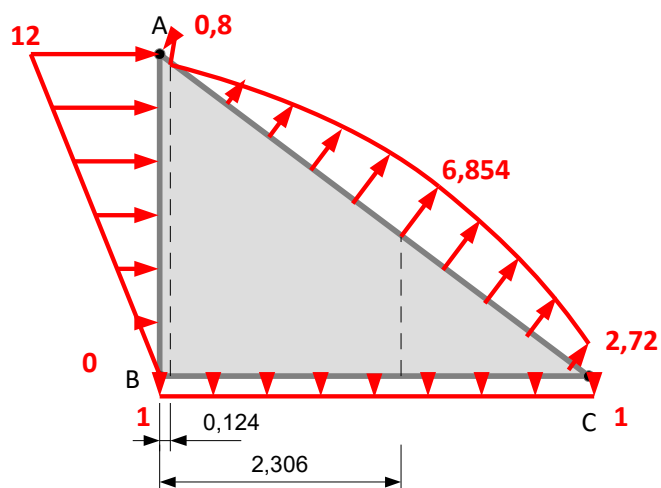
(zwroty zgodnie z osiami ukł. wsp.) $\mathbf{q}_{CA}^{(s)}(x_A; y_A) = \begin{bmatrix} -5,98 \\ 4,44 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{q}_s^{(CA)}| = 7,4$

Miejsca zerowe:

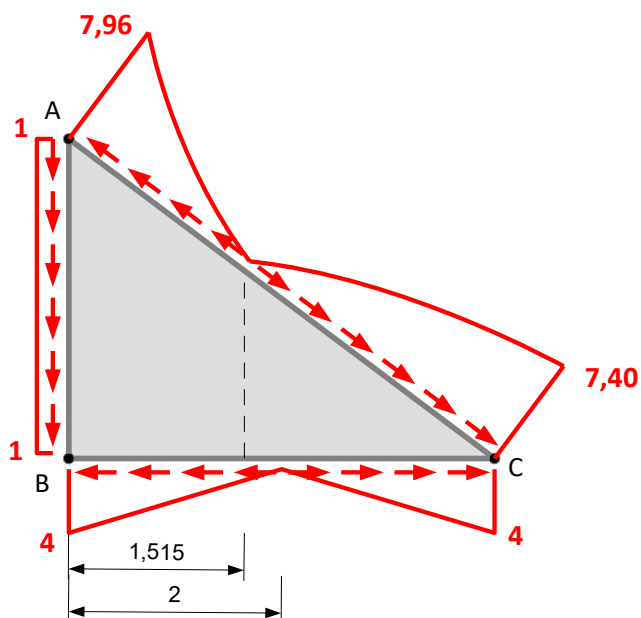
$$\mathbf{q}_s^{(CA)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow 21x_1^2 - 276x_1 + 370 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,515 \vee x_1 = 11,628 \quad 11,628 \notin CA$$

Poszukiwanie ekstremum: $\frac{d\mathbf{q}_s^{(CA)}}{dx_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{25}(42x_1 - 276) = 0 \Rightarrow x_1 = 6,571 \notin CA$

Uzyskane wyniki można zilustrować na wykresach obciążenia normalnego i stycznego:



obciążenie brzegowe normalne



obciążenie brzegowe styczne

ZADANIE 32 (Płyta sprężysta – metoda różnic skończonych, szereg trygonometryczny)

Dana jest sprężysta płyta prostokątna o wymiarach 6m x 8m, podparta przegubowo na obwodzie. Płyta ma grubość 30cm i wykonana jest z materiału o module Younga 32 GPa oraz współczynnika Poissona 0,2. Płyta obciążona jest obciążeniem równomiernie rozłożonym o sumarycznej wartości (wraz z ciężarem własnym) 10 kN/m².

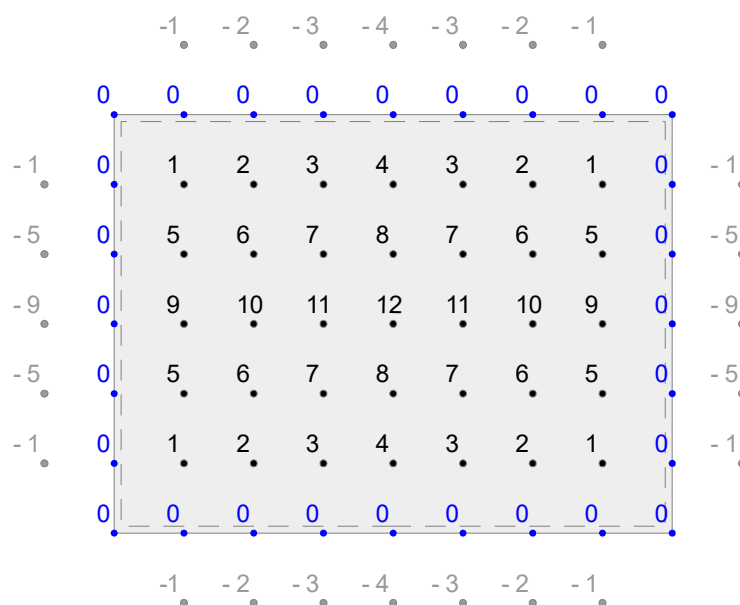
- Wyznaczyć maksymalne ugięcie płyty za pomocą:
 - metody różnic skończonych
 - szeregu trygonometrycznego
- Porównać uzyskane wyniki ze sobą

ROZWIĄZANIE:

Sztywność giętą płyty:
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 75000 \text{ kNm}$$

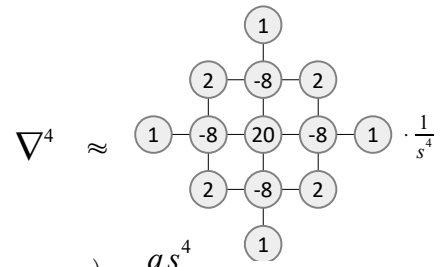
METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

- Przyjmujemy siatkę 1m x 1m. $s = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 1 \text{ m}$.
- Węzły na brzegu podpartym przyjmują wartości zerowe.
- Wprowadzamy fikcyjne węzły poza obrysem płyty, uwzględniające warunki brzegowe. Przegubowe podparcie na krawędzi wymaga, aby zerował się na niej moment zginający, który jest odpowiada drugiej pochodnej rozkładu ugięcia – węzły fikcyjne znajdujące się symetrycznie po drugiej stronie krawędzi podpartej muszą zatem przyjmować przeciwne wartości ugięć.
- Układ posiada dwie osie symetrii – wartości ugięcia w węzłach odpowiadających sobie względem tych symetrii, muszą być równe.
- Ostatecznie otrzymujemy układ 12 niezależnych węzłów.



Układamy równanie dla każdego z węzłów korzystając ze schematu różnicowego równania płyty:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D}$$



$$20 w_1 - 8 \cdot (0 + 0 + w_2 + w_5) + 2 \cdot (0 + 0 + 0 + w_6) + 1 \cdot (-w_1 - w_1 + w_3 + w_9) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_2 - 8 \cdot (0 + w_1 + w_3 + w_6) + 2 \cdot (0 + 0 + w_5 + w_7) + 1 \cdot (-w_2 + 0 + w_4 + w_{10}) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_3 - 8 \cdot (0 + w_2 + w_4 + w_7) + 2 \cdot (0 + 0 + w_6 + w_8) + 1 \cdot (-w_3 + w_1 + w_3 + w_{11}) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_4 - 8 \cdot (0 + w_3 + w_3 + w_8) + 2 \cdot (0 + 0 + w_7 + w_7) + 1 \cdot (-w_4 + w_2 + w_2 + w_{12}) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_5 - 8 \cdot (w_1 + 0 + w_6 + w_9) + 2 \cdot (0 + w_2 + 0 + w_{10}) + 1 \cdot (0 - w_5 + w_7 + w_5) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_6 - 8 \cdot (w_2 + w_5 + w_7 + w_{10}) + 2 \cdot (w_1 + w_3 + w_9 + w_{11}) + 1 \cdot (0 + 0 + w_8 + w_6) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_7 - 8 \cdot (w_3 + w_6 + w_8 + w_{11}) + 2 \cdot (w_2 + w_4 + w_{10} + w_{12}) + 1 \cdot (0 + w_5 + w_7 + w_7) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_8 - 8 \cdot (w_4 + w_7 + w_7 + w_{12}) + 2 \cdot (w_3 + w_3 + w_{11} + w_{11}) + 1 \cdot (0 + w_6 + w_6 + w_8) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_9 - 8 \cdot (w_5 + 0 + w_{10} + w_5) + 2 \cdot (0 + w_6 + 0 + w_6) + 1 \cdot (w_1 - w_9 + w_{11} + w_1) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_{10} - 8 \cdot (w_6 + w_9 + w_{11} + w_6) + 2 \cdot (w_5 + w_7 + w_5 + w_7) + 1 \cdot (w_2 + 0 + w_{12} + w_2) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_{11} - 8 \cdot (w_7 + w_{10} + w_{12} + w_7) + 2 \cdot (w_6 + w_8 + w_6 + w_8) + 1 \cdot (w_3 + w_9 + w_{11} + w_3) = \frac{q s^4}{D}$$

$$20 w_{12} - 8 \cdot (w_8 + w_{11} + w_{11} + w_8) + 2 \cdot (w_7 + w_7 + w_7 + w_7) + 1 \cdot (w_4 + w_{10} + w_{10} + w_4) = \frac{q s^4}{D}$$

$$\begin{bmatrix} 18 & -8 & 1 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -8 & 1 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 19 & 0 & 0 & 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & 20 & -8 & 1 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & -8 & 21 & -8 & 1 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 1 & -8 & 22 & -8 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 0 & 2 & -16 & 21 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -16 & 4 & 0 & 0 & 19 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & -16 & 4 & 0 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & -16 & 4 & 1 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & -16 & 0 & 2 & -16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \frac{q s^4}{D} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = \frac{q s^4}{D} \begin{bmatrix} 1,851 \\ 3,268 \\ 4,130 \\ 4,418 \\ 3,115 \\ 5,528 \\ 7,007 \\ 7,501 \\ 3,5580 \\ 6,325 \\ 8,025 \\ 8,594 \end{bmatrix}$$

Ugięcie maksymalne: $w_{max} = 8,594 \frac{q s^4}{D} = 1,146 \text{ mm}$

SZEREGI TRYGNOMETRYCZNE

Ugięcie prostokątnej płyty o wymiarach $L_1 \times L_2$ i sztywności D , podpartej przegubowo na krawędziach wyrazić można nieskończonym szeregiem trygonometrycznym. Dla płyty obciążonej obciążeniem równomiernym q odpowiedni szereg przyjmuje postać:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{16q \left[\frac{(2m-1)^2}{L_1^2} + \frac{(2n-1)^2}{L_2^2} \right]^{-2}}{(2m-1)(2n-1)\pi^6 D} \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi x_1}{L_1} \sin \frac{(2n-1)\pi x_2}{L_2} \right\}$$

Zbieżność tego szeregu możemy sprawdzić przeprowadzając sumowanie do pewnej maksymalnej wartości indeksów m, n . Ugięcie wyznaczmy w punktach odpowiadających węzłom siatki MRS:

węzły			(u·D/q/s ⁴)				MRS
			Szereg trygonometryczny				
N	x ₁	x ₂	n,m=1	n,m=1,...,3	n,m=1,...,5	n,m=1,...,100	
1	1	1	1,690	1,836	1,836	1,835	1,851
2	2	1	3,124	3,251	3,249	3,249	3,268
3	3	1	4,081	4,110	4,111	4,111	4,13
4	4	1	4,417	4,401	4,398	4,398	4,418
5	1	2	2,928	3,096	3,097	3,097	3,115
6	2	2	5,410	5,514	5,513	5,513	5,528
7	3	2	7,069	6,993	6,996	6,996	7,007
8	4	2	7,651	7,493	7,492	7,492	7,501
9	1	3	3,381	3,540	3,540	3,540	3,558
10	2	3	6,247	6,315	6,313	6,313	6,325
11	3	3	8,162	8,018	8,020	8,020	8,025
12	4	3	8,835	8,594	8,591	8,591	8,594

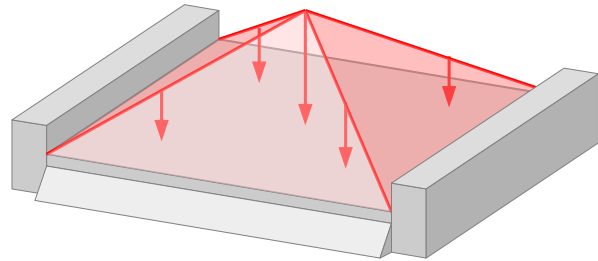
Uznając, że uwzględnienie 10000 wyrazów szeregu daje nam dokładność wystarczająco bliską rozwiązaniu ścisłemu, zauważamy, że:

- rozwiązanie MRS jest bardzo bliskie rozwiązaniu ścisłemu – błąd względny nie przekracza 1%
- Uwzględnienie już tylko 9 wyrazów szereg trygonometrycznego (m,n=1,...,3) daje nam oszacowanie z maksymalnym błędem względnym 0,07%.

ZADANIE 33 (Płyta sprężysta - metoda różnic skończonych)

Dana jest sprężysta płyta kwadratowa o wymiarach $L \times L$ ($L=2\text{ m}$), utwierdzona na dwóch przeciwległych krawędziach i podparta przegubowo na pozostałych dwóch krawędziach. Obciążona jest obciążeniem danym funkcją

$$q(x_1, x_2) = \frac{4q_0}{L^2} \left(\frac{L}{2} - |x_1| \right) \left(\frac{L}{2} - |x_2| \right)$$

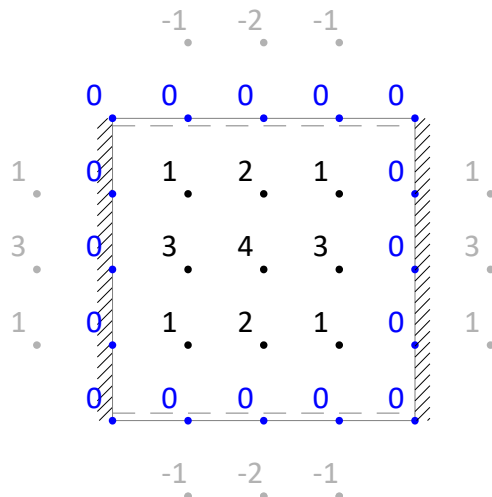


gdzie $q_0 = 2\text{ kN/m}^2$, a początek układu współrzędnych znajduje się w środku geometrycznym płyty. Wyznaczyć rozkład ugięć płyty oraz momentów zginających

m_{xx}, m_{yy}, m_{xy} korzystając z metody różnic skończonych. Przyjąć oczko siatki MRS $s=0,5\text{ m}$. Grubość płyty $h=1\text{ cm}$, stałe sprężyste materiału płyty: moduł Younga $E = 29\text{ GPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,2$.

ROZWIĄZANIE:

- Sztywność giętna płyty: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 2517\text{ Nm}$
- Oczko siatki MRS: $s = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,5\text{ m}$
- Tworzymy węzły fikcyjne poza obrysem siatki
 - wartości węzłów fikcyjnych w przypadku utwierdzenia są takie same jak węzłów do nich symetrycznych względem krawędzi utwierdzonej
 - wartości węzłów fikcyjnych w przypadku podparcia przegubowego są przeciwne do węzłów symetrycznych do nich względem krawędzi podpartej.
- Uwzględniając podwójną symetrię zagadnienia, siatka MRS przyjmuje postać:



Wartości obciążenia w węzłach:

$$q_1 = q(0,5\text{ m} ; 0,5\text{ m}) = 500\text{ N/m}^2$$

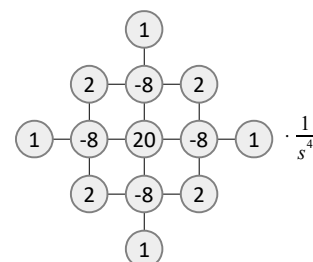
$$q_3 = q(0,5\text{ m} ; 0\text{ m}) = 1000\text{ N/m}^2$$

$$q_2 = q(0\text{ m} ; 0,5\text{ m}) = 1000\text{ N/m}^2$$

$$q_4 = q(0\text{ m} ; 0\text{ m}) = 2000\text{ N/m}^2$$

ROZKŁAD UGIĘĆ

Układamy równanie dla każdego z węzłów korzystając ze schematu różnicowego równania płyty:



$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q(x_1, x_2)}{D} \quad \nabla^4 \approx$$

$$20 w_1 - 8 \cdot (0 + 0 + w_2 + w_3) + 2 \cdot (0 + 0 + 0 + w_4) + 1 \cdot (-w_1 + w_1 + w_1 + w_1) = \frac{q_1 s^4}{D}$$

$$20 w_2 - 8 \cdot (0 + w_1 + w_1 + w_4) + 2 \cdot (0 + 0 + w_3 + w_3) + 1 \cdot (-w_2 + w_2 + 0 + 0) = \frac{q_2 s^4}{D}$$

$$20 w_3 - 8 \cdot (w_1 + 0 + w_4 + w_1) + 2 \cdot (0 + w_2 + 0 + w_2) + 1 \cdot (0 + w_3 + w_3 + 0) = \frac{q_3 s^4}{D}$$

$$20 w_4 - 8 \cdot (w_2 + w_3 + w_3 + w_2) + 2 \cdot (w_1 + w_1 + w_1 + w_1) + 1 \cdot (0 + 0 + 0 + 0) = \frac{q_4 s^4}{D}$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 22 & -8 & -8 & 2 \\ -16 & 20 & 4 & -8 \\ -16 & 4 & 22 & -8 \\ 8 & -16 & -16 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,416 \cdot 10^{-3} \\ 24,831 \cdot 10^{-3} \\ 24,831 \cdot 10^{-3} \\ 49,662 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7,082 \cdot 10^{-3} \\ 11,804 \cdot 10^{-3} \\ 10,492 \cdot 10^{-3} \\ 17,487 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ m}$$

Maksymalne ugięcie: $w_{max} \approx w_4 = 17,487 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Dla porównania maksymalne ugięcie wyznaczone MES dla płyty modelowanej elementami powłokowymi dla maksymalnego wymiaru elementu skończonego równego 10cm (444 elementy, 1171 równań) jest równe $13,480 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

ROZKŁAD MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH

Momenty zginające wyznaczamy z zależności:

$$m_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

Drugie pochodne ugięcia aproksymujemy schematami:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \approx \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & | & \\ 1 & -2 & 1 \\ & | & \\ & 1 & \end{array} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \approx \begin{array}{c} 1 \\ | \\ -2 \\ | \\ 1 \end{array} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \approx \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ | & | \\ 1 & -1 \end{array} \cdot \frac{1}{4s^2}$$

Momenty zginające w węźle 1:

$$m_{xx,1} = -\frac{D}{s^2}[(0-2w_1+w_2)+\nu(w_3-2w_1+0)] = 1,571 \text{ kNm/m}$$

$$m_{yy,1} = -\frac{D}{s^2}[(w_3-2w_1+0)+\nu(0-2w_1+w_2)] = 1,581 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xy,1} = -\frac{D}{4s^2}(1-\nu)[0-0+0-w_4] = 0,035 \text{ kNm/m}$$

Momenty zginające w węźle 2:

$$m_{xx,2} = -\frac{D}{s^2}[(w_1-2w_2+w_1)+\nu(w_4-2w_2+0)] = -1,176 \text{ kNm/m}$$

$$m_{yy,2} = -\frac{D}{s^2}[(w_4-2w_2+0)+\nu(w_1-2w_2+w_1)] = -0,176 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xy,2} = -\frac{D}{4s^2}(1-\nu)[0-0+w_3-w_3] = 0 \text{ kNm/m}$$

Momenty zginające w węźle 3:

$$m_{xx,3} = -\frac{D}{s^2}[(0-2w_3+w_4)+\nu(w_1-2w_3+w_1)] = -0,208 \text{ kNm/m}$$

$$m_{yy,3} = -\frac{D}{s^2}[(w_1-2w_3+w_1)+\nu(0-2w_3+w_4)] = -1,208 \text{ kNm/m}$$

$$m_{xy,3} = -\frac{D}{4s^2}(1-\nu)[w_2-0+0-w_2] = 0 \text{ kNm/m}$$

Momenty zginające w węźle 4:

$$m_{xx,4} = -\frac{D}{s^2}[(w_3-2w_4+w_3)+\nu(w_2-2w_4+w_2)] = 0,164 \text{ kNm/m}$$

$$m_{yy,4} = -\frac{D}{s^2}[(w_2-2w_4+w_2)+\nu(w_3-2w_4+w_3)] = 0,143 \text{ kNm/m}$$

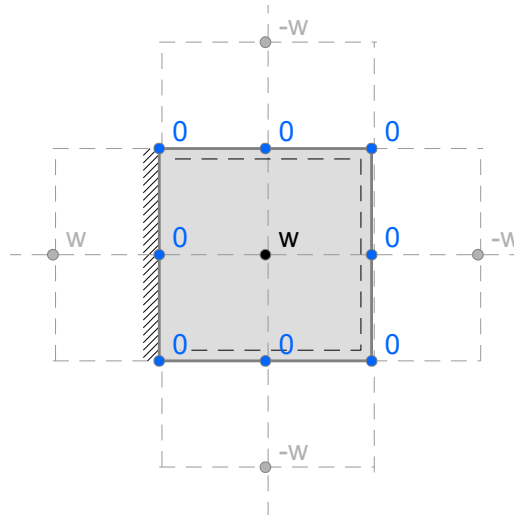
$$m_{xy,4} = -\frac{D}{4s^2}(1-\nu)[w_1-w_1+w_1-w_1] = 0 \text{ kNm/m}$$

ZADANIE 34 (Płyta sprężysta - metoda różnic skończonych)

Dana jest cienka sprężysta płyta kwadratowa o wymiarach $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ i grubości 5 mm , wykonana ze stali o module Younga $E = 210\text{ GPa}$ i współczynnika Poissona $\nu = 0,2$. Płyta utwierdzona na jednej krawędzi podparta przegubowo na pozostałych krawędziach. Obciążona jest równomiernie obciążeniem $q = 5\text{ kN/m}^2$. Wyznacz ugięcie środka płyty oraz momenty zginające m_{xx} , m_{yy} , m_{xy} w środku płyty korzystając z metody różnic skończonych. Przyjmij oczko siatki MRS równe $s = 0,5\text{ m}$.

ROZWIĄZANIE:

- Sztywność giętą płyty: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 2278,65\text{ Nm}$
- Oczko siatki MRS: $s = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,5\text{ m}$
- Siatka MRS z uwzględnieniem warunków brzegowych



Równanie płyty dla węzła wewnętrznego:

$$20w - 8(0+0+0+0) + 2(0+0+0+0) + (-w+w-w-w) = \frac{qs^4}{D}$$

Ugięcie środka płyty:

$$18w = \frac{qs^4}{D} \Rightarrow w = \frac{qs^4}{18D} = 0,007619\text{ m}$$

Momenty zginające:

$$m_{xx} = -\frac{D}{s^2}[(0-2w+0) + \nu(0-2w+0)] = \frac{2D(1+\nu)w}{s^2} = 166,666\text{ Nm/m}$$

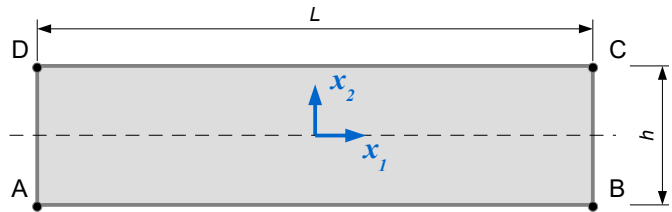
$$m_{yy} = -\frac{D}{s^2}[(0-2w+0) + \nu(0-2w+0)] = \frac{2D(1+\nu)w}{s^2} = 166,666\text{ Nm/m}$$

$$m_{xy} = -\frac{D}{4s^2}(1-\nu)[0+0+0+0] = 0\text{ Nm/m}$$

ZADANIE 35 (Funkcja naprężeń Airy'ego w przy czystym zginaniu)

Dana jest prostokątna, płaska tarcza sprężysta o grubości b , szerokości L i wysokości h . Stan naprężenia w tarczy opisuje funkcja naprężeń Airy'ego postaci:

$$F(x_1; x_2) = \frac{2M}{bh^3} x_2^3$$



określona w prostokątnym układzie współrzędnych jak na rysunku. Wyznacz:

- stan naprężenia w tarczy,
- obciążenie brzegu,
- wypadkową obciążenia na każdej krawędzi tarczy oraz jego sumaryczny moment względem środka tej krawędzi,

ROZWIĄZANIE:

Stan naprężenia wyznaczamy na podstawie następujących zależności

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{12M}{bh^3} x_2 \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0 \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{12M}{bh^3} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obciążenie kolejnych krawędzi:

Krawędź AB: $x_1 \in \left\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2} \right\rangle$, $x_2 = -\frac{h}{2}$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{AB} = [0; -1]^T$

$$\mathbf{q}_{AB} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{AB} = \begin{bmatrix} \frac{12M}{bh^3} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krawędź BC: $x_1 = \frac{L}{2}$, $x_2 \in \left\langle -\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right\rangle$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{BC} = [1; 0]^T$

$$\mathbf{q}_{BC} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{BC} = \begin{bmatrix} \frac{12M}{bh^3} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12M}{bh^3} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krawędź CD: $x_1 \in \left\langle -\frac{L}{2}; \frac{L}{2} \right\rangle$, $x_2 = \frac{h}{2}$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{CD} = [0; 1]^T$

$$\mathbf{q}_{CD} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{CD} = \begin{bmatrix} \frac{12M}{bh^3} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krawędź DA: $x_1 = -\frac{L}{2}$, $x_2 \in \left\langle -\frac{h}{2}; \frac{h}{2} \right\rangle$ - normalna zewnętrzna: $\mathbf{n}_{DA} = [-1; 0]^T$

$$\mathbf{q}_{DA} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{DA} = \begin{bmatrix} \frac{12M}{bh^3} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12M}{bh^3} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krawędzie AB oraz CD nie są obciążone. Zredukujmy obciążenie krawędzi BC i DA do punktów krawędzi, dla których $x_2 = 0$. Dla krawędzi BC mamy:

Pozioma składowa wypadkowej obciążenia:

$$F_1 = \iint_{BC} q_1 dA = \int_{x_2=-h/2}^{h/2} \int_{x_3=0}^b \frac{12M}{bh^3} x_2 dx_2 dx_3 = \frac{12Mb}{bh^3} \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_{-h/2}^{h/2} = 0$$

Pionowa składowa wypadkowej obciążenia:

$$F_2 = \iint_{BC} q_2 dA = \int_{x_2=-h/2}^{h/2} \int_{x_3=0}^b 0 dx_2 dx_3 = 0$$

Suma momentów:

$$M_3 = \iint_{BC} (-q_1 x_2) dA = \int_{x_2=-h/2}^{h/2} \int_{x_3=0}^b -\frac{12M}{bh^3} x_2^2 dx_2 dx_3 = -\frac{12Mb}{bh^3} \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = -M$$

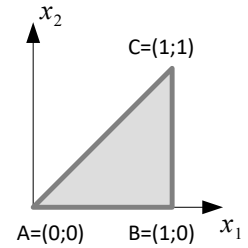
Analogiczne obliczenia wykonujemy dla brzegu DA. Analizowana sytuacja odpowiada zatem przypadkowi czystego zginania belki prostokątnej momentem $-M$.

ZADANIE 36 (Funkcja naprężeń Airy'ego – wyznaczenie obciążenia tarczy)

Dla płaskiej tarczy trójkątnej zadana jest funkcja naprężeń Airy'ego postaci:

$$F(x_1, x_2) = 4x_1^3x_2 - 2x_1x_2^3$$

Wyznacz wektor obciążenia brzegu tarczy.



ROZWIĄZANIE:

Stan naprężenia wyznaczamy na podstawie następujących zależności:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -12x_1x_2 \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 24x_1x_2 \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -12x_1^2 + 6x_2^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -12x_1x_2 & -12x_1^2 + 6x_2^2 \\ -12x_1^2 + 6x_2^2 & 24x_1x_2 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że dla zerowych sił masowych spełnione są równania równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

OBCIĄŻENIE BRZEGU:

BRZEG AB $x_1 \in \langle 0; 1 \rangle, x_2 = 0$ - normalna zewnętrzna $\mathbf{n}_{AB} = [0; -1]^T$

$$\mathbf{q}_{AB} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{AB} = \begin{bmatrix} -12x_1 \cdot 0 & -12x_1^2 + 6 \cdot (0)^2 \\ -12x_1^2 + 6(0)^2 & 24x_1 \cdot 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

BRZEG BC $x_1 = 1, x_2 \in \langle 0; 1 \rangle$ - normalna zewnętrzna $\mathbf{n}_{BC} = [1; 0]^T$

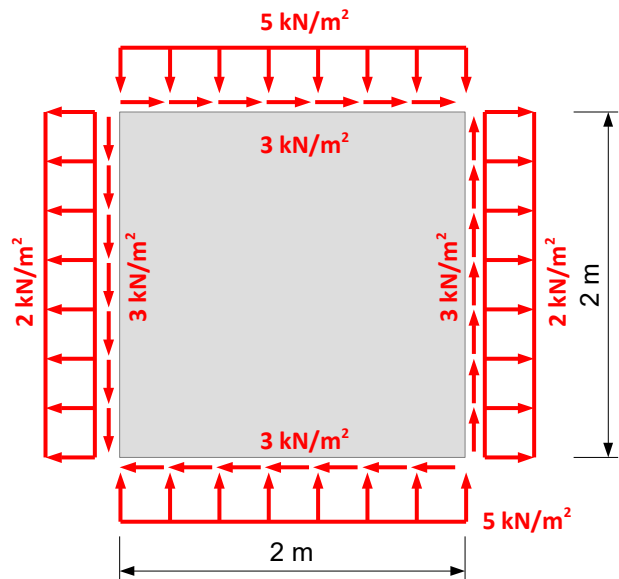
$$\mathbf{q}_{BC} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{BC} = \begin{bmatrix} -12 \cdot 1 \cdot x_2 & -12 \cdot 1^2 + 6 \cdot x_2^2 \\ -12 \cdot 1^2 + 6x_2^2 & 24 \cdot 1 \cdot x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x_2 \\ 6x_2^2 - 12 \end{bmatrix}$$

BRZEG CA $x_1 \in \langle 0; 1 \rangle, x_2 = x_1$ - normalna zewnętrzna $\mathbf{n}_{CA} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$

$$\mathbf{q}_{CA} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{CA} = \begin{bmatrix} -12x_1 \cdot x_1 & -12x_1^2 + 6x_1^2 \\ -12x_1^2 + 6x_1^2 & 24x_1 \cdot x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}}x_1^2 \\ \frac{30}{\sqrt{2}}x_1^2 \end{bmatrix}$$

ZADANIE 37 (Tarcza sprężysta – metoda różnic skończonych)

Dana jest kwadratowa tarcza sprężysta o grubości $h=10$ cm, obciążona jak na rysunku. Wyznacz płaski stan naprężenia w środku tarczy korzystając z metody różnic skończonych przyjmując siatkę o $s = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 1$ m .



ROZWIĄZANIE:

Rozkład naprężeń w tarczy płaskiej wyznaczamy na podstawie tzw. funkcji naprężeń Airy'ego, która zdefiniowana jest następująco:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \sigma_{22} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \sigma_{11} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -b_1 x_2 - b_2 x_1 - \sigma_{12}$$

W naszym zadaniu nie występują siły masowe, zatem $b_1 = b_2 = 0$. Funkcja Airy'ego spełnia równanie biharmoniczne:

$$\nabla^4 F = 0$$

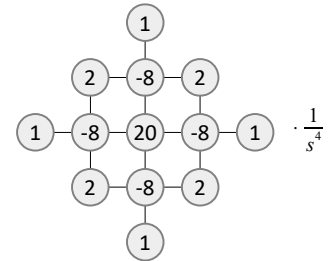
Ogólny schemat rozwiązania jest następujący:

- W pewnym punkcie brzegu tarczy wybieramy ustalony P_0 .
- Wybieramy kolejny punkt P – jego położenie jest zmienne.
- W punkcie P wprowadzamy lokalny układ współrzędnych (n, s) – jego pierwsz oś (n) jest normalna (prostopadła) do brzegu i zwrócona na zewnątrz tarczy. Druga oś (s) jest styczna do brzegu i zorientowana zgodnie z orientacją zorientowanego łuku krzywej zaczynającej się w P_0 i kończącej w P .
- Rozważmy układ obciążeń brzegowych przyłożonych do wycinka brzegu pomiędzy punktami P_0 oraz P :
 - Dla obciążenia tego obliczamy sumę wszystkich sił równoległych do osi n układu lokalnego określonego w punkcie P . Oznaczamy ją przez $Q_n|_P$ (siła normalna).
 - Dla obciążenia tego obliczamy sumę wszystkich sił równoległych do osi s układu lokalnego określonego w punkcie P . Oznaczamy ją przez $Q_s|_P$ (siła styczna).
 - Dla obciążenia tego obliczamy moment względem punktu P . Oznaczamy go $M|_P$.

- Warunki brzegowe można teraz zapisać w postaci:

$$F|_P = \frac{1}{h} M|_P \quad \frac{\partial F}{\partial s} \Big|_P = \frac{1}{h} Q_n|_P \quad \frac{\partial F}{\partial n} \Big|_P = -\frac{1}{h} Q_s|_P$$

- Znak Q_s oraz Q_n określamy zgodnie z orientacją lokalnego układu współrzędnych (n, s) - w przeciwieństwie do metod wyznaczania sił przekrojowych znanych z wytrzymałości materiałów znak ten nie zależy od orientacji „myślowej płaszczyzny cięcia”. Zakładając, że układ (n, s, z) jest prawoskrętny, dodani moment odpowiada dodatniej orientacji osi z .
- Ponieważ wartości brzegowe funkcji Airy'ego są znane (obliczone na podstawie momentów), zatem również pochodna kierunkowa na kierunku stycznym do brzegu jest znana i nie wnosi ona żadnej nowej informacji. Ostatecznie, potrzebować będziemy warunków brzegowych dla pochodnej kierunkowej na kierunku normalnej zewnętrznej (odpowiadającej siłom stycznym).
- Wprowadzamy siatkę węzłów wewnętrznych, brzegowych i fikcyjnych węzłów zewnętrznych. Rozważać będziemy jedynie siatki prostokątne o jednakowym oczku w obydwu kierunkach.



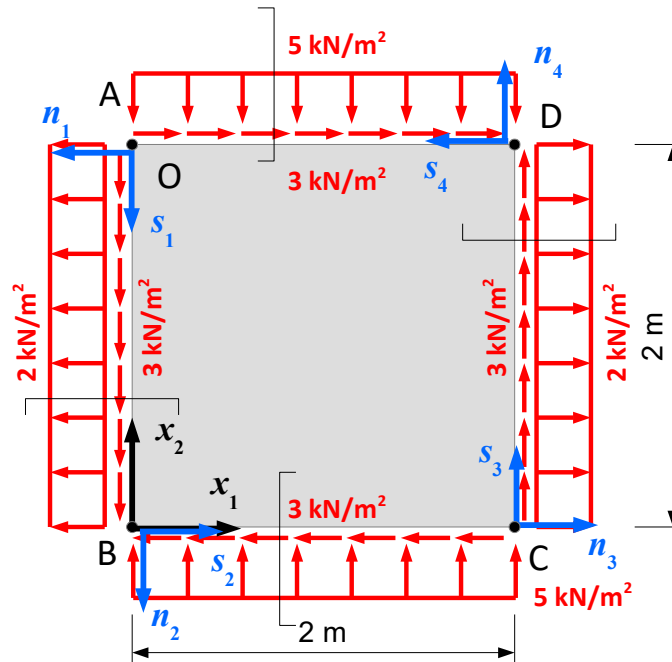
- Zapisujemy równanie biharmoniczne dla węzłów wewnętrznych z wykorzystaniem schematu różnicowego jak na obrazku po prawej.
- Zapisujemy warunki brzegowe na pochodną na kierunku normalnej zewnętrznej z wykorzystaniem schematów różnicowych jak poniżej:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \approx \begin{array}{c} \textcircled{-1} \\ \text{---} \\ \textcircled{1} \end{array} \cdot \frac{1}{2s} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \approx \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \text{---} \\ \textcircled{-1} \end{array} \cdot \frac{1}{2s} \quad \frac{\partial}{\partial n} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

- Zapisane równania stanowią liniowy układ równań algebraicznych na wszystkie nieznanne wartości węzłowe funkcji Airy'ego.
- W celu wyznaczeniu składowych stanu naprężenia korzystamy z definicji funkcji Airy'ego oraz ze schematów różnicowych dla drugich pochodnych:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \approx \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \text{---} \\ \textcircled{-2} \\ \text{---} \\ \textcircled{1} \end{array} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \approx \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \text{---} \\ \textcircled{-2} \\ \text{---} \\ \textcircled{1} \end{array} \cdot \frac{1}{s^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \approx \begin{array}{c} \textcircled{-1} \text{---} \textcircled{1} \\ \text{---} \\ \textcircled{1} \text{---} \textcircled{-1} \end{array} \cdot \frac{1}{4s^2}$$

Punkt początkowy $O=A$ oraz lokalne układy współrzędnych (n, s) przyjmujemy jak na rysunku poniżej:



BRZEG AB: $x_1=0, x_2 \in \langle 0; 2 \rangle$ $s_1 = 2 - x_2, n_1 = -x_1$

Suma sił stycznych do brzegu: $Q_{s1}(s_1) = h[3s_1]$ [kN]
 Suma sił normalnych do brzegu: $Q_{n1}(s_1) = h[2s_1]$ [kN]
 Suma momentów: $M_1(s_1) = h[s_1^2]$ [kNm]

BRZEG BC: $x_1 \in \langle 0; 2 \rangle, x_2 = 0$ $s_2 = x_1, n_2 = -x_2$

Suma sił stycznych do brzegu: $Q_{s2}(s_2) = h[-2 \cdot 2 - 3 \cdot s_2] = h[-4 - 3s_2]$ [kN]
 Suma sił normalnych do brzegu: $Q_{n2}(s_2) = h[3 \cdot 2 - 5 \cdot s_2] = h[6 - 5s_2]$ [kN]
 Suma momentów: $M_2(s_2) = h\left[2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot s_2 - \frac{5}{2}s_2^2\right] =$
 $= h[4 + 6s_2 - 2,5s_2^2]$ [kNm]

BRZEG CD: $x_1=2, x_2 \in \langle 0; 2 \rangle$ $s_3 = x_2, n_3 = 2 + x_1$

Suma sił stycznych do brzegu: $Q_{s3}(s_3) = h[-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot s_3] = h[4 + 3s_3]$ [kN]
 Suma sił normalnych do brzegu: $Q_{n3}(s_3) = h[-2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot s_3] = h[-10 + 2s_3]$ [kN]
 Suma momentów: $M_3(s_3) = h\left[2 \cdot 2 \cdot (1 - s_3) + 3 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot s_3 + s_3^2\right] =$
 $= h[6 - 10s_3 + s_3^2]$ [kNm]

BRZEG BC: $x_1 \in \langle 0 ; 2 \rangle$, $x_2 = 2$ $s_4 = 2 - x_1$, $n_4 = 2 + x_2$

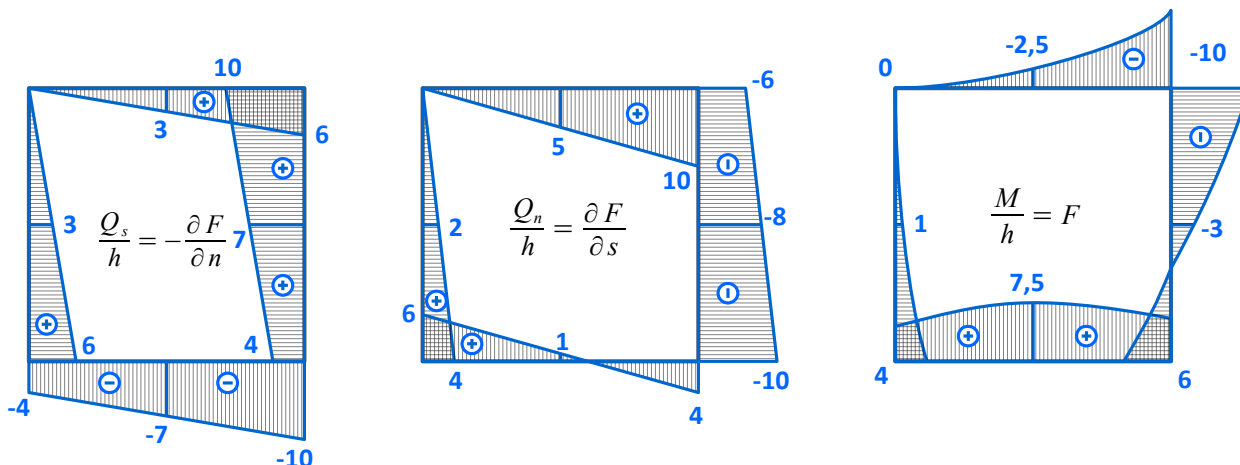
Suma sił stycznych do brzegu: $Q_{s_4}(s_4) = h[2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot s_4] = h[6 - 3s_4]$ [kN]

Suma sił normalnych do brzegu: $Q_{n_3}(s_3) = h[-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot s_4] = h[10 - 5s_4]$ [kN]

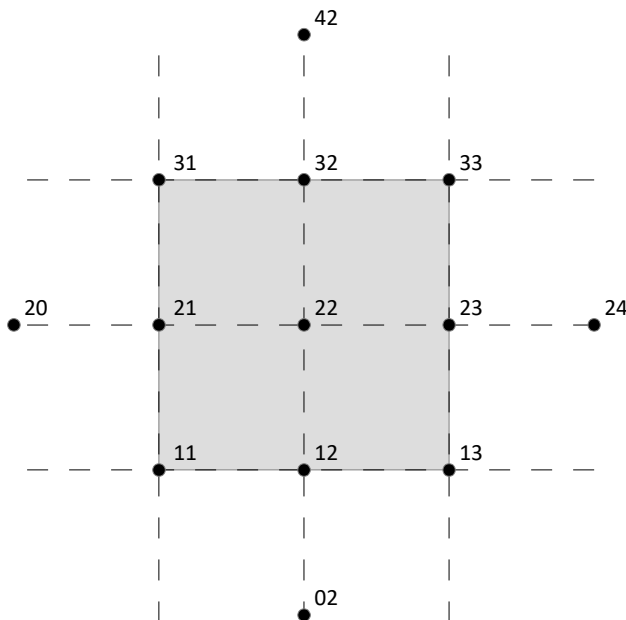
Suma momentów:

$$M_4(s_4) = h \left[-2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (2 - s_4) - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot (1 - s_4) + 3 \cdot 2 \cdot s_4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{5}{2} s_4^2 \right] =$$

$$= h \left[-10 + 10s_4 - \frac{5}{2} s_4^2 \right] \text{ [kNm]}$$



Przyjmujemy siatkę jak na rysunku poniżej:



PUNKTY WEWNĘTRZNE:

$$20 F_{22} - 8 (F_{12} + F_{21} + F_{23} + F_{32}) + 2 (F_{11} + F_{13} + F_{31} + F_{33}) + (F_{02} + F_{20} + F_{24} + F_{42}) = 0$$

PUNKTY BRZEGOWE:

BRZEG AB

$$F_{11} = \frac{1}{h} M_{11} \quad \Rightarrow \quad F_{11} = 0 \quad [\text{kN}]$$

$$F_{12} = \frac{1}{h} M_{12} \quad \Rightarrow \quad F_{33} = 1 \quad [\text{kN}]$$

$$F_{13} = \frac{1}{h} M_{13} \quad \Rightarrow \quad F_{13} = 4 \quad [\text{kN}]$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n_1} \right|_{12} = - \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{12} = - \frac{1}{h} Q_s|_{12} \quad \Rightarrow \quad - \frac{1}{2s} (F_{22} - F_{20}) = -3 \quad [\text{kN/m}]$$

BRZEG BC

$$F_{23} = \frac{1}{h} M_{23} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = 7,5 \quad [\text{kN}]$$

$$F_{33} = \frac{1}{h} M_{33} \quad \Rightarrow \quad F_{33} = 6 \quad [\text{kN}]$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n_2} \right|_{23} = - \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{23} = - \frac{1}{h} Q_s|_{23} \quad \Rightarrow \quad - \frac{1}{2s} (F_{22} - F_{02}) = -(-7) \quad [\text{kN/m}]$$

BRZEG CD

$$F_{32} = \frac{1}{h} M_{32} \quad \Rightarrow \quad F_{32} = -3 \quad [\text{kN}]$$

$$F_{31} = \frac{1}{h} M_{31} \quad \Rightarrow \quad F_{31} = -10 \quad [\text{kN}]$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n_3} \right|_{32} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{32} = - \frac{1}{h} Q_s|_{32} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2s} (F_{24} - F_{22}) = -7 \quad [\text{kN/m}]$$

BRZEG DA

$$F_{21} = \frac{1}{h} M_{21} \quad \Rightarrow \quad F_{21} = -2,5 \quad [\text{kN}]$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n_4} \right|_{21} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_2} \right|_{21} = - \frac{1}{h} Q_s|_{21} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2s} (F_{42} - F_{22}) = -3 \quad [\text{kN/m}]$$

ZNANE WARTOŚCI W WĘZŁACH BRZEGOWYCH

F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{23}	F_{33}	F_{32}	F_{31}	F_{21}
0	1	4	7,5	6	-3	-10	-2,5

Otrzymujemy układ równań liniowych na nieznanne wartości węzłowe funkcji naprężeń Airy'ego:

$$\begin{aligned}
 20F_{22} - 8(7,5+1-3-2,5) + 2(4+6+0-10) + (F_{02}+F_{20}+F_{24}+F_{42}) &= 0 \\
 -\frac{1}{2 \cdot 1}(F_{22}-F_{20}) &= -3 \\
 -\frac{1}{2 \cdot 1}(F_{22}-F_{02}) &= 7 \\
 \frac{1}{2 \cdot 1}(F_{24}-F_{22}) &= -7 \\
 \frac{1}{2 \cdot 1}(F_{42}-F_{22}) &= -3
 \end{aligned}$$

W postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 20 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{02} \\ F_{20} \\ F_{22} \\ F_{24} \\ F_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -6 \\ 14 \\ -14 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_{02} = 15,5 \\ F_{20} = -4,5 \\ F_{22} = 1,5 \\ F_{24} = -12,5 \\ F_{42} = -4,5 \end{cases}$$

Stan naprężenia w środku tarczy:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{1}{s^2}[F_{12}-2F_{22}+F_{32}] = 2 \text{ [kPa]} \\
 \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = \frac{1}{s^2}[F_{21}-2F_{22}+F_{23}] = -5 \text{ [kPa]} \\
 \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{4s^2}[F_{11}-F_{13}-F_{31}+F_{33}] = 3 \text{ [kPa]}
 \end{aligned}$$

Dla powyższego zagadnienia można znaleźć rozwiązanie ścisłe. Ponieważ obciążenie jest symetryczne i jednorodne, stąd można przypuszczać, że rozkład naprężenia w tarczy jest stały. Łatwo przekonać się, że stan naprężenia określony tensorem:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ [kPa]}$$

Spełnia warunki równowagi oraz statyczne warunki brzegowe. Takiemu stanowi naprężenia odpowiada funkcja naprężeń Airy'ego:

$$F(x_1, x_2) = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

Równanie biharmoniczne, które spełniać musi funkcja Airy'ego jest równaniem czwartego rzędu. Tymczasem, powyższe rozwiązanie określone zostało na podstawie statycznych warunków

brzegowych, które są warunkami na drugie pochodne funkcji naprężeń – dla jednoznaczności rozwiązania potrzebne są warunki na wartość samej funkcji lub na wartości jej pierwszej pochodnej. Zauważmy, że jeśli dodamy do powyższej funkcji człony zależne w co najwyżej pierwszej potęgze od zmiennych niezależnych, to odpowiadający tej funkcji stan naprężenia będzie taki sam, a równanie biharmoniczne nadal będzie spełnione. Człony te możemy dobrać w taki sposób, aby wartości funkcji Airy'ego były takie, jakie wyznaczyliśmy, całkując obciążenie od punktu O. Ostatecznie funkcja naprężeń przyjmuje postać:

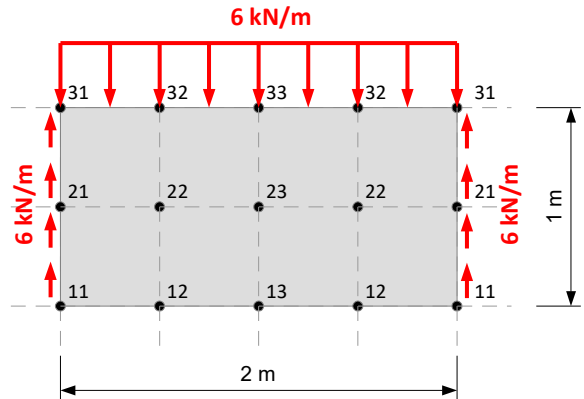
$$F(x_1, x_2) = -\frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6x_1 - 4x_2 + 4$$

Poszukiwane rzeczywiste wartości funkcji Airy'ego pokrywają się z tymi wyznaczonymi MRS:

$$\begin{cases} F_{02} = F(1; -1) = 15,5 \\ F_{20} = F(-1; 1) = -4,5 \\ F_{22} = F(1; 1) = 1,5 \\ F_{24} = F(3, 1) = -12,5 \\ F_{42} = F(1, 3) = -4,5 \end{cases}$$

ZADANIE 38 (Tarcza sprężysta – metoda różnic skończonych)

Dana jest prostokątna płaska tarcza sprężysta o grubości $h = 20\text{ cm}$, obciążona jak na rysunku. Korzystając z metody różnic skończonych i przyjętej siatki MRS ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0,5\text{ m}$) wyznacz naprężenie styczne w węźle 22.

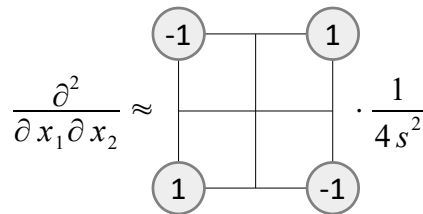


ROZWIĄZANIE:

Naprężenie styczne wyznaczamy z funkcji naprężeń Airy'ego na podstawie zależności:

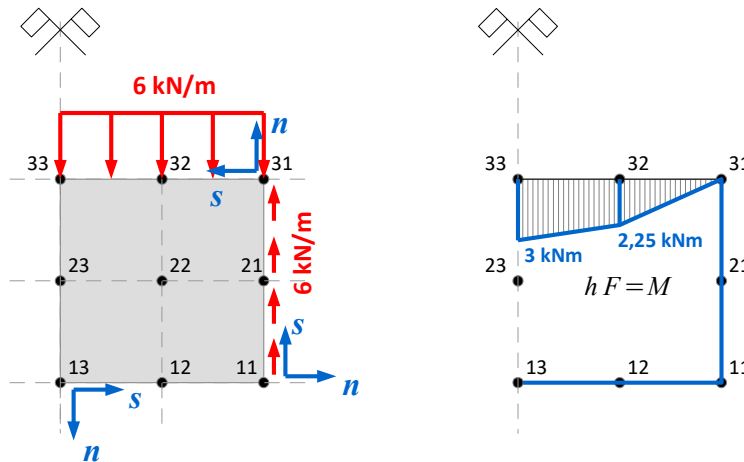
$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Pochodną mieszaną z powyższego wzoru wyznaczamy w MRS schematem:



$$[\sigma_{12}]_{22} \approx -\frac{1}{4s^2} [F_{13} + F_{31} - F_{11} - F_{33}]$$

Z przyjętej siatki MRS wynika, że możemy wyznaczyć tę wielkość w węźle 22 na podstawie samych tylko brzegowych wartości funkcji Airy'ego, te zaś wyznaczamy jako wartość momentu obciążenia zewnętrznego względem danego węzła brzegowego. Uwzględniając symetrię układu, otrzymujemy:



Wartości brzegowe funkcji Airy'ego:

$$F_{11} = \frac{M_{11}}{h} = 0 \text{ [kN]}$$

$$F_{13} = \frac{M_{13}}{h} = 0 \text{ [kN]}$$

$$F_{31} = \frac{M_{31}}{h} = 0 \text{ [kN]}$$

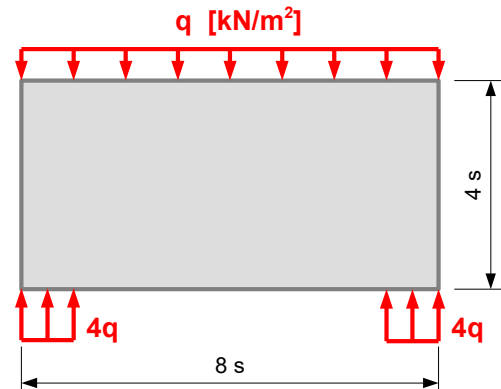
$$F_{33} = \frac{M_{33}}{h} = 15 \text{ [kN]}$$

Naprężenie styczne w węźle 22:

$$[\sigma_{12}]_{22} \approx -\frac{1}{4s^2} [F_{13} + F_{31} - F_{11} - F_{33}] = 15 \text{ kPa}$$

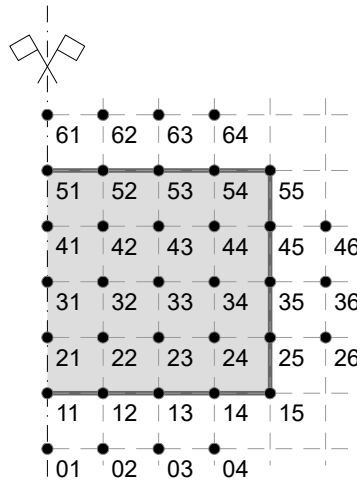
ZADANIE 39 (Tarcza sprężysta – metoda różnic skończonych)

Dana jest prostokątna płaska tarcza sprężysta o grubości h , obciążona jak na rysunku. Wyznaczyć rozkład poziomych naprężeń normalnych w środkowym przekroju tarczy korzystając z metody różnic skończonych, przyjmując $s = \Delta x_1 = \Delta x_2$.

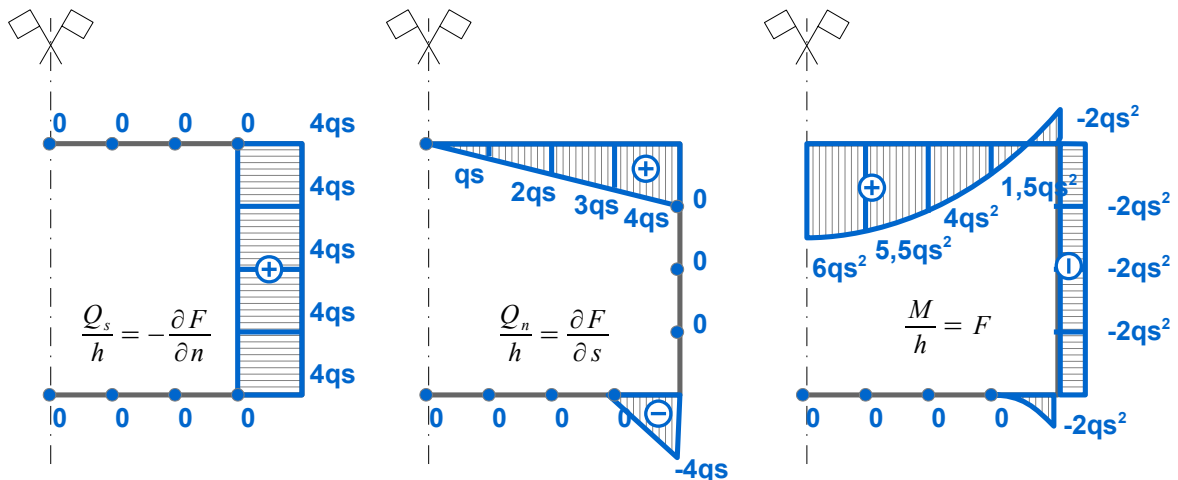


ROZWIĄZANIE:

Uwzględniając symetrię układu wyznaczamy węzły siatki MRS.



Wyznaczamy wartości brzegowe funkcji naprężeń Airy'ego oraz jej pochodnych przyjmując punkt początkowy O w środku dolnej krawędzi tarczy.



Możemy zredukować liczbę niewiadomych przez uwzględnienie warunku zerowania się pochodnej funkcji Airy'ego w miejscach, gdzie suma obciążeń stycznych do brzegu jest równa 0.

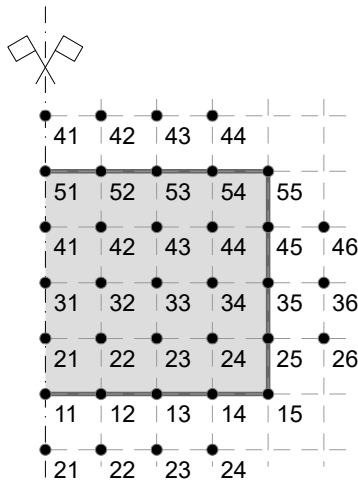
$$\frac{Q_s}{h} = -\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{11} = \frac{1}{2s}(F_{01} - F_{21}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{01} = F_{21}$$

$$\frac{Q_s}{h} = -\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{12} = \frac{1}{2s}(F_{02} - F_{22}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{02} = F_{22}$$

...

$$\frac{Q_s}{h} = -\frac{\partial F}{\partial n} \Big|_{51} = \frac{1}{2s}(F_{61} - F_{41}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{61} = F_{41}$$

Uproszczona siatka MRS przyjmuje postać:



PUNKTY WEWNĘTRZNE:

$$20 F_{21} - 8(F_{11} + F_{22} + F_{22} + F_{31}) + 2(F_{12} + F_{12} + F_{32} + F_{32}) + (F_{21} + F_{23} + F_{23} + F_{41}) = 0$$

$$20 F_{22} - 8(F_{12} + F_{21} + F_{23} + F_{32}) + 2(F_{11} + F_{13} + F_{31} + F_{33}) + (F_{22} + F_{22} + F_{24} + F_{42}) = 0$$

$$20 F_{23} - 8(F_{13} + F_{22} + F_{24} + F_{33}) + 2(F_{12} + F_{14} + F_{32} + F_{34}) + (F_{23} + F_{21} + F_{25} + F_{43}) = 0$$

$$20 F_{24} - 8(F_{14} + F_{23} + F_{25} + F_{34}) + 2(F_{13} + F_{15} + F_{33} + F_{35}) + (F_{24} + F_{22} + F_{26} + F_{44}) = 0$$

$$20 F_{31} - 8(F_{21} + F_{32} + F_{32} + F_{41}) + 2(F_{22} + F_{22} + F_{42} + F_{42}) + (F_{11} + F_{33} + F_{33} + F_{51}) = 0$$

$$20 F_{32} - 8(F_{22} + F_{31} + F_{33} + F_{42}) + 2(F_{21} + F_{23} + F_{41} + F_{43}) + (F_{12} + F_{32} + F_{34} + F_{52}) = 0$$

$$20 F_{33} - 8(F_{23} + F_{32} + F_{34} + F_{43}) + 2(F_{22} + F_{24} + F_{42} + F_{44}) + (F_{13} + F_{31} + F_{35} + F_{53}) = 0$$

$$20 F_{34} - 8(F_{24} + F_{33} + F_{35} + F_{44}) + 2(F_{23} + F_{25} + F_{43} + F_{45}) + (F_{14} + F_{32} + F_{36} + F_{54}) = 0$$

$$20 F_{41} - 8(F_{31} + F_{42} + F_{42} + F_{51}) + 2(F_{32} + F_{32} + F_{52} + F_{52}) + (F_{21} + F_{43} + F_{43} + F_{41}) = 0$$

$$20 F_{42} - 8(F_{32} + F_{41} + F_{43} + F_{52}) + 2(F_{31} + F_{33} + F_{51} + F_{53}) + (F_{22} + F_{42} + F_{44} + F_{42}) = 0$$

$$20 F_{43} - 8(F_{33} + F_{42} + F_{44} + F_{53}) + 2(F_{32} + F_{34} + F_{52} + F_{54}) + (F_{23} + F_{41} + F_{45} + F_{43}) = 0$$

$$20 F_{44} - 8(F_{34} + F_{43} + F_{45} + F_{54}) + 2(F_{33} + F_{35} + F_{53} + F_{55}) + (F_{24} + F_{42} + F_{46} + F_{44}) = 0$$

PUNKTY BRZEGOWE:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{25} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{25} = -\frac{Q_s|_{25}}{h} \Rightarrow \frac{1}{2s}(F_{26} - F_{24}) = -4qs$$

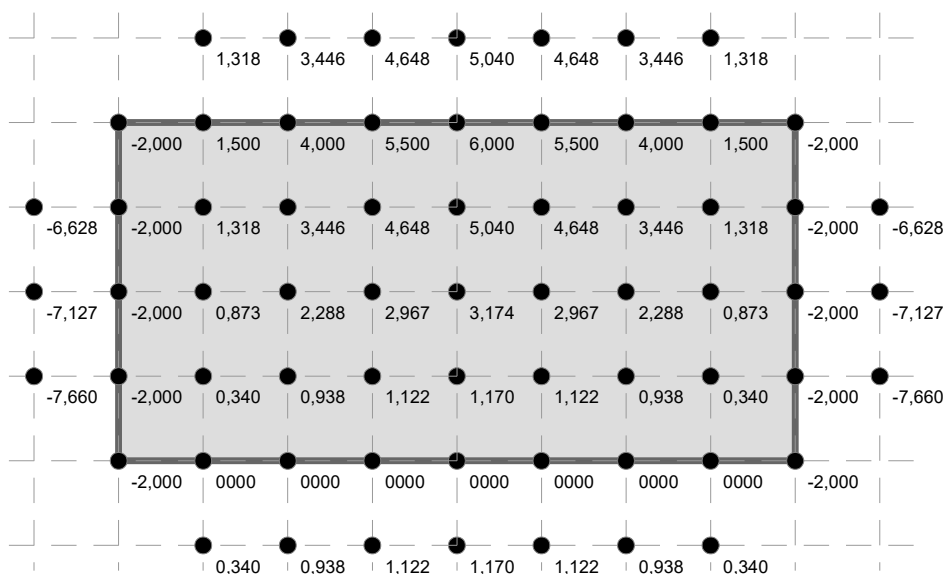
$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{35} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{35} = -\frac{Q_s|_{35}}{h} \Rightarrow \frac{1}{2s}(F_{36} - F_{34}) = -4qs$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{45} = \left. \frac{\partial F}{\partial x_1} \right|_{45} = -\frac{Q_s|_{45}}{h} \Rightarrow \frac{1}{2s}(F_{46} - F_{44}) = -4qs$$

Układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 21 & -16 & 2 & 0 & 0 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 22 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 21 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & 1 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 20 & -16 & 2 & 0 & 0 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & -8 & 21 & -8 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & -8 & 20 & 1 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 21 & -16 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & -8 & 22 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & -8 & 21 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 & -8 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{24} \\ F_{26} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \\ F_{34} \\ F_{36} \\ F_{41} \\ F_{42} \\ F_{43} \\ F_{44} \\ F_{46} \end{bmatrix} = qs^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -8 \\ -6 \\ -5,5 \\ -2 \\ -9,5 \\ 26 \\ 24 \\ 20 \\ -4 \\ -8 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Rezultaty obrazuje poniższy rysunek (wartości funkcji Airy'ego podzielone przez qs^2):



Naprężenia w przekroju środkowym tarczy:

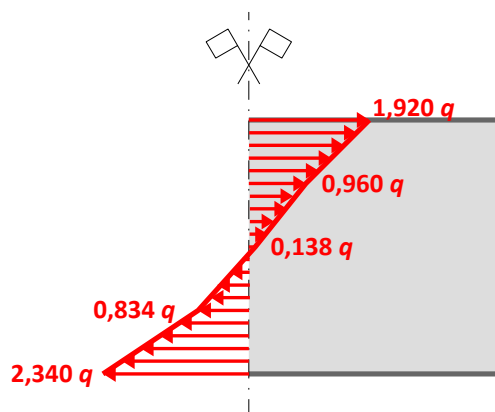
$$[\sigma_{11}]_{11} = \frac{1}{s^2}(F_{21} - 2F_{11} - F_{21}) = 2,340 q$$

$$[\sigma_{11}]_{21} = \frac{1}{s^2}(F_{11} - 2F_{21} - F_{31}) = 0,834 q$$

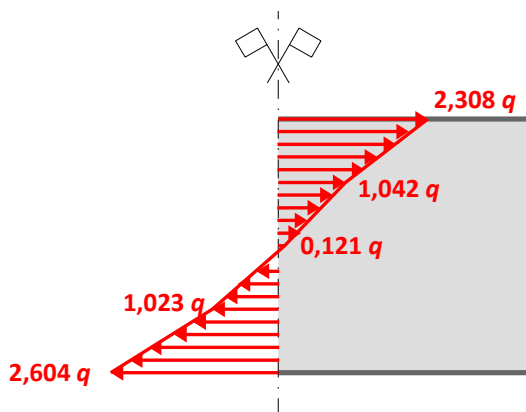
$$[\sigma_{11}]_{31} = \frac{1}{s^2}(F_{21} - 2F_{31} - F_{41}) = -0,138 q$$

$$[\sigma_{11}]_{41} = \frac{1}{s^2}(F_{31} - 2F_{41} - F_{51}) = -0,906 q$$

$$[\sigma_{11}]_{51} = \frac{1}{s^2}(F_{41} - 2F_{51} - F_{41}) = -1,92 q$$



Wyniki można porównać z rozwiązaniem MES – tarczę o wymiarach 8 x 4 m, zamodelowano 3200 kwadratowymi elementami tarczowymi o maksymalnym wymiarze 10cm (6639 równań). Uzyskany rozkład naprężeń normalnych w przekroju środkowym jest następujący:

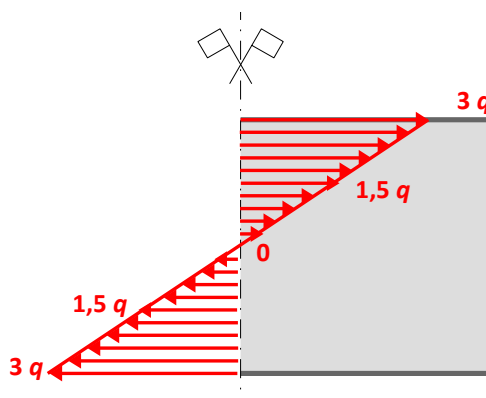


Dla porównania można także przytoczyć oszacowanie wynikające z przyjęcia modelu swobodnie podpartej belki Bernoulliego-Eulera. Przyjmując belkę o długości L i przekroju $b \times h$, gdzie $h = L/2$, otrzymujemy symetryczny, liniowy rozkład naprężeń:

$$M_{max} = \frac{q b L^2}{8}$$

$$W = \frac{b(L/2)^2}{6}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = 3 q$$



Dokładniejsze oszacowanie przy użyciu wzorów wytrzymałości materiałów można uzyskać przyjmując inną rozpiętość belki do określania momentu zginającego (np. odległość między środkami obciążeń na dolnej krawędzi).

$$M_{max} = \frac{qb(7/8L)^2}{8} \quad W = \frac{b(L/2)^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = 2,297q$$

Ogólnie rzecz biorąc, stosowanie modelu belki Bernoulliego-Eulera nie jest zalecane dla belek o stosunku $L:h < 10$. Dla belek bardziej krępych $4 < L:h < 10$ można stosować model belki Timoszenki. Dla belek jeszcze wyższych (tzw. „belki-ściany”) powinno się stosować modele tarczowe. Widać jednak, że i dla nich w niektórych przypadkach oszacowanie przy użyciu modelu belkowego jest wystarczająco dokładne.