WZORY CARDANO ZASTOSOWANE W RÓWNANIU CHARAKTERYSTYCZNYM SYMETRYCZNEGO TROJWYMIAROWEGO TENSORA DRUGIEGO RZĘDU

Dla danego tensora opisanego w ustalonym układzie współrzędnych składowymi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad T_{ij} = T_{ji}, \quad i, j = 1,2,3$$

wyznaczamy następujące **niezmienniki**:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}(T_{11}+T_{22}+T_{33}) \\ J_2 &= \frac{1}{6}\left[(T_{11}-T_{22})^2+(T_{11}-T_{33})^2+(T_{22}-T_{33})^2\right]+\left(T_{12}^2+T_{13}^2+T_{23}^2\right) \\ J_3 &= (T_{11}-p)(T_{22}-p)(T_{33}-p) + 2T_{12}T_{13}T_{23} - \\ &\quad -(T_{11}-p)T_{23}^2 - (T_{22}-p)T_{13}^2 - (T_{33}-p)T_{12}^2 \end{aligned}$$

Obliczamy **wyróżnik** równania:

$$\Delta = \frac{1}{4}J_3^2 - \frac{1}{27}J_2^3$$

WARTOŚCI WŁASNE WYZNACZAMY W NASTĘPUJĄCY SPOSÓB:

- $\Delta < 0$ - równanie ma **trzy różne pierwiastki**:

$$\lambda_{k+1} = p + \sqrt{\frac{2}{3}}\, q \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right) ,$$

gdzie $q = \sqrt{2J_2}$, $\quad \theta = \frac{1}{3}\arccos \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}$, $\quad k = 0,1,2$

- $\Delta = 0 \quad J_3 \neq 0$ - równanie ma **jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedynczy**:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} + p \qquad \lambda_3 = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} + p$$

- $\Delta = 0 \quad J_3 = 0$ - równanie ma **jeden pierwiastek potrójny**:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = p$$

- Sytuacja $\Delta > 0$ nie może zajść z uwagi na symetrię tensora.