DEFORMATION EQUATIONS

$$x_1 := 1,2 \cdot X_1 + 0,8 \cdot X_2$$

$$x_2 := 0,6 \cdot X_2 + 1,5 \cdot X_3$$

$$x_3 := 1,4 \cdot X_1 + 1 \cdot X_3$$

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFORMATION GRADIENT

$$F := \begin{bmatrix} \frac{d}{d X_1} x_1 & \frac{d}{d X_2} x_1 & \frac{d}{d X_3} x_1 \\ \frac{d}{d X_1} x_2 & \frac{d}{d X_2} x_2 & \frac{d}{d X_3} x_2 \\ \frac{d}{d X_1} x_3 & \frac{d}{d X_2} x_3 & \frac{d}{d X_3} x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1,5 \\ 1,4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J := |F| = 2,4$$

DEFORMATION TENSOR

$$C := F^{T} \cdot F = \begin{bmatrix} 3,4 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & 1 & 0,9 \\ 1,4 & 0,9 & 3,25 \end{bmatrix}$$

EIGENPROBLEM FOR DEFORMATION TENSOR

TENSOR INVARIANTS

$$I_1 := C_{1\,1} + C_{2\,2} + C_{3\,3} = 7,65$$

$$I_2 := \left\| \begin{bmatrix} C_{1\,1} & C_{1\,2} \\ C_{2\,1} & C_{2\,2} \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} C_{2\,2} & C_{2\,3} \\ C_{3\,2} & C_{3\,3} \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} C_{1\,1} & C_{1\,3} \\ C_{3\,1} & C_{3\,3} \end{bmatrix} \right\| = 14,0084$$

$$I_3 := |C| = 5,76$$

CHARACTERISTIC EQUATIONS $c := \text{solve}\left(x^3 - I_1 \cdot x^2 + I_2 \cdot x - I_3 ; x \right) = \begin{bmatrix} 0,5822 \\ 1,923 \\ 5,1448 \end{bmatrix}$

EIGENVECTOR CORRESPONDING WITH $c_1 = 0,5822$

$$T1 := C - c_1 \cdot I = \begin{bmatrix} 2,8178 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & 0,4178 & 0,9 \\ 1,4 & 0,9 & 2,6678 \end{bmatrix}$$

vector 1 — vector 2 — eigenvector — normalized eigenvector

$$a_1 := \begin{bmatrix} T1_{1\,1} \\ T1_{1\,2} \\ T1_{1\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,8178 \\ 0,96 \\ 1,4 \end{bmatrix} \quad b_1 := \begin{bmatrix} T1_{2\,1} \\ T1_{2\,2} \\ T1_{2\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ 0,4178 \\ 0,9 \end{bmatrix} \quad v_1 := a_1 \times b_1 = \begin{bmatrix} 0,2791 \\ -1,192 \\ 0,2556 \end{bmatrix} \quad t_1 := \frac{v_1}{\sqrt{v_1 \cdot v_1}} = \begin{bmatrix} 0,2232 \\ -0,9531 \\ 0,2044 \end{bmatrix}$$

EIGENVECTOR CORRESPONDING WITH $c_2 = 1,923$

$$T2 := C - c_2 \cdot I = \begin{bmatrix} 1,477 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & -0,923 & 0,9 \\ 1,4 & 0,9 & 1,327 \end{bmatrix}$$

vector 1 — vector 2 — eigenvector — normalized eigenvector

$$a_2 := \begin{bmatrix} T2_{1\,1} \\ T2_{1\,2} \\ T2_{1\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,477 \\ 0,96 \\ 1,4 \end{bmatrix} \quad b_2 := \begin{bmatrix} T2_{2\,1} \\ T2_{2\,2} \\ T2_{2\,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -0,923 \\ 0,9 \end{bmatrix} \quad v_2 := a_2 \times b_2 = \begin{bmatrix} 2,1562 \\ 0,0147 \\ -2,2849 \end{bmatrix} \quad t_2 := \frac{v_2}{\sqrt{v_2 \cdot v_2}} = \begin{bmatrix} 0,6863 \\ 0,0047 \\ -0,7273 \end{bmatrix}$$

EIGENVECTOR CORRESPONDING WITH $c_3 = 5{,}1448$

$$t_3 := t_1 \times t_2 = \begin{bmatrix} 0{,}6922 \\ 0{,}3026 \\ 0{,}6552 \end{bmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA $$A := \begin{bmatrix} {t_1}_1 & {t_1}_2 & {t_1}_3 \\ {t_2}_1 & {t_2}_2 & {t_2}_3 \\ {t_3}_1 & {t_3}_2 & {t_3}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2232 & -0{,}9531 & 0{,}2044 \\ 0{,}6863 & 0{,}0047 & -0{,}7273 \\ 0{,}6922 & 0{,}3026 & 0{,}6552 \end{bmatrix}$$

STRETCH TENSOR IN EIGENAXES

$$U := \begin{bmatrix} \sqrt{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}763 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}3867 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}2682 \end{bmatrix}$$

INVERSE OF STRETCH TENSOR IN EIGENAXES

$$iU := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{c_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{c_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3105 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7211 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4409 \end{bmatrix}$$

STRETCH TENSOR IN ORIGINAL COORDINATE SYSTEM

$$U := A^{\mathrm{T}} \cdot U \cdot A = \begin{bmatrix} 1{,}7781 & 0{,}3172 & 0{,}3713 \\ 0{,}3172 & 0{,}9009 & 0{,}2963 \\ 0{,}3713 & 0{,}2963 & 1{,}739 \end{bmatrix}$$

INVERSE OF STRETCH TENSOR IN ORIGINAL COORDINATE SYSTEM

$$iU := A^{\mathrm{T}} \cdot iU \cdot A = \begin{bmatrix} 0{,}6162 & -0{,}1841 & -0{,}1002 \\ -0{,}1841 & 1{,}2309 & -0{,}1703 \\ -0{,}1002 & -0{,}1703 & 0{,}6254 \end{bmatrix}$$

ROTATION TENSOR IN ORIGINAL COORDINATE SYSTEM $R = F \cdot U^{-1}$

$$R := F \cdot iU = \begin{bmatrix} 0{,}5922 & 0{,}7638 & -0{,}2565 \\ -0{,}2608 & 0{,}4831 & 0{,}8359 \\ 0{,}7625 & -0{,}4281 & 0{,}4851 \end{bmatrix}$$

CHECK

$$U - U^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1{,}6174 \cdot 10^{-15} & -9{,}2875 \cdot 10^{-16} & -7{,}5804 \cdot 10^{-16} \\ 6{,}2193 \cdot 10^{-16} & 3{,}1001 \cdot 10^{-16} & 1{,}0159 \cdot 10^{-15} \\ 1{,}1196 \cdot 10^{-15} & -2{,}422 \cdot 10^{-15} & -2{,}841 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

U is symmetric

$$|R| = 1$$

R is orthogonal

$$F - R \cdot U = \begin{bmatrix} 6{,}3179 \cdot 10^{-5} & 0{,}0001 & -0{,}0001 \\ 8{,}3836 \cdot 10^{-5} & -0{,}0002 & -1{,}8731 \cdot 10^{-5} \\ -0{,}0001 & 3{,}1886 \cdot 10^{-5} & 9{,}2839 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Rozkład biegunowy jest poprawny