$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RÓWNANIA DEFORMACJI

$x_1 := 1,2 \cdot X_1 + 0,8 \cdot X_2$

$x_2 := 0,6 \cdot X_2 + 1,5 \cdot X_3$

$x_3 := 1,4 \cdot X_1 + X_3$

GRADIENT DEFORMACJI

$$F := \begin{pmatrix} \frac{d}{dX_1} x_1 & \frac{d}{dX_2} x_1 & \frac{d}{dX_3} x_1 \\ \frac{d}{dX_1} x_2 & \frac{d}{dX_2} x_2 & \frac{d}{dX_3} x_2 \\ \frac{d}{dX_1} x_3 & \frac{d}{dX_2} x_3 & \frac{d}{dX_3} x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,6 & 1,5 \\ 1,4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J := |F| = 2,4$

TENSOR DEFORMACJI

$$C := F^T \cdot F = \begin{pmatrix} 3,4 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & 1 & 0,9 \\ 1,4 & 0,9 & 3,25 \end{pmatrix}$$

ZAGADNIENIE WŁASNE DLA TENSORA DEFORMACJI

NIEZMIENNIKI TENSORA

$I_1 := C_{1\,1} + C_{2\,2} + C_{3\,3} = 7,65$

$$I_2 := \left|\begin{pmatrix} C_{1\,1} & C_{1\,2} \\ C_{2\,1} & C_{2\,2} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} C_{2\,2} & C_{2\,3} \\ C_{3\,2} & C_{3\,3} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} C_{1\,1} & C_{1\,3} \\ C_{3\,1} & C_{3\,3} \end{pmatrix}\right| = 14,0084$$

$I_3 := |C| = 5,76$

RÓWNANIE CHARAKTERYTYCZNE $c := \text{solve}\left(\lambda^3 - I_1 \cdot \lambda^2 + I_2 \cdot \lambda - I_3 ; \lambda\right) = \begin{pmatrix} 0,5822 \\ 1,923 \\ 5,1448 \end{pmatrix}$

WEKTOR WŁASNY ODPOWIADAJĄCY WARTOŚCI WŁASNEJ $c_1 = 0,5822$

$$T1 := C - c_1 \cdot I = \begin{pmatrix} 2,8178 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & 0,4178 & 0,9 \\ 1,4 & 0,9 & 2,6678 \end{pmatrix}$$

wektor 1

$$a_1 := \begin{pmatrix} T1_{1\,1} \\ T1_{1\,2} \\ T1_{1\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8178 \\ 0,96 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

wektor 2

$$b_1 := \begin{pmatrix} T1_{2\,1} \\ T1_{2\,2} \\ T1_{2\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,96 \\ 0,4178 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

wektor własny

$$v_1 := a_1 \times b_1 = \begin{pmatrix} 0,2791 \\ -1,192 \\ 0,2557 \end{pmatrix}$$

unormowany wektor własny

$$t_1 := \frac{v_1}{\sqrt{v_1 \cdot v_1}} = \begin{pmatrix} 0,2231 \\ -0,9531 \\ 0,2044 \end{pmatrix}$$

WEKTOR WŁASNY ODPOWIADAJĄCY WARTOŚCI WŁASNEJ $c_2 = 1,923$

$$T2 := C - c_2 \cdot I = \begin{pmatrix} 1,477 & 0,96 & 1,4 \\ 0,96 & -0,923 & 0,9 \\ 1,4 & 0,9 & 1,327 \end{pmatrix}$$

wektor 1

$$a_2 := \begin{pmatrix} T2_{1\,1} \\ T2_{1\,2} \\ T2_{1\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,477 \\ 0,96 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

wektor 2

$$b_2 := \begin{pmatrix} T2_{2\,1} \\ T2_{2\,2} \\ T2_{2\,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,96 \\ -0,923 \\ 0,9 \end{pmatrix}$$

wektor własny

$$v_2 := a_2 \times b_2 = \begin{pmatrix} 2,1562 \\ 0,0147 \\ -2,2849 \end{pmatrix}$$

unormowany wektor własny

$$t_2 := \frac{v_2}{\sqrt{v_2 \cdot v_2}} = \begin{pmatrix} 0,6863 \\ 0,0047 \\ -0,7273 \end{pmatrix}$$

WEKTOR WŁASNY ODPOWIADAJĄCY WARTOŚCI WŁASNEJ $c_3 = 5,1448$

$$t_3 := t_1 \times t_2 = \begin{pmatrix} 0,6922 \\ 0,3026 \\ 0,6552 \end{pmatrix}$$

MACIERZ PRZEJŚCIA

$$A := \begin{pmatrix} {t_1}_1 & {t_1}_2 & {t_1}_3 \\ {t_2}_1 & {t_2}_2 & {t_2}_3 \\ {t_3}_1 & {t_3}_2 & {t_3}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2231 & -0,9531 & 0,2044 \\ 0,6863 & 0,0047 & -0,7273 \\ 0,6922 & 0,3026 & 0,6552 \end{pmatrix}$$

TENSOR ROZCIĄGNIĘCIA W UKŁADZIE OSI WŁASNYCH

$$U := \begin{pmatrix} \sqrt{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,763 & 0 & 0 \\ 0 & 1,3867 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2682 \end{pmatrix}$$

ODWROTNOŚĆ TENSORA ROZCIĄGNIECIA W UKŁADZIE OSI WŁASNYCH

$$iU := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{c_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{c_3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3106 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7211 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4409 \end{pmatrix}$$

TENSOR ROZCIĄGNIĘCIA W PODSTAWOWYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

$$U := A^T \cdot U \cdot A = \begin{pmatrix} 1,778 & 0,3173 & 0,3713 \\ 0,3173 & 0,9009 & 0,2963 \\ 0,3713 & 0,2963 & 1,7391 \end{pmatrix}$$

ODWROTNOŚĆ TENSORA ROZCIĄGNIĘCIA W PODSTAWOWYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

$$iU := A^T \cdot iU \cdot A = \begin{pmatrix} 0,6162 & -0,1841 & -0,1002 \\ -0,1841 & 1,2309 & -0,1704 \\ -0,1002 & -0,1704 & 0,6255 \end{pmatrix}$$

TENSOR OBROTU W PODSTAWOWYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH $R = F \cdot U^{-1}$

$$R := F \cdot iU = \begin{pmatrix} 0,5922 & 0,7639 & -0,2566 \\ -0,2608 & 0,4829 & 0,8359 \\ 0,7625 & -0,4281 & 0,4852 \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie

$$U - U^T = \begin{pmatrix} 0 & 1,8703 \cdot 10^{-16} & -4,9293 \cdot 10^{-16} \\ -1,8703 \cdot 10^{-16} & 0 & -9,1753 \cdot 10^{-16} \\ 4,9293 \cdot 10^{-16} & 9,1753 \cdot 10^{-16} & 0 \end{pmatrix}$$

U jest symetryczny

$|R| = 1$ **R jest ortogonalny**

$$F - R \cdot U = \begin{pmatrix} 1,5149 \cdot 10^{-6} & 2,7771 \cdot 10^{-6} & -2,8831 \cdot 10^{-6} \\ 2,0094 \cdot 10^{-6} & -3,625 \cdot 10^{-6} & -4,4874 \cdot 10^{-7} \\ -2,4409 \cdot 10^{-6} & 7,6446 \cdot 10^{-7} & 2,2258 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Rozkład biegunowy jest poprawny