02. Charakterystyki geometryczne przekrojów poprzecznych prętów

Zgodnie z założeniami mechaniki układów prętowych rzeczywiste trójwymiarowe ciało odkształcalne modelować będziemy układem jednowymiarowym, w którym informacje dotyczące wymiarów prostopadłych do tego wyróżnionego (osi pręta) zawarte będą w układzie charakterystycznych dla danego przekroju parametrów, zależnych od kształtu tego przekroju. Wielkościami tymi będą: **pole powierzchni, położenie środka ciężkości, momenty statyczne i momenty bezwładności**.

MOMENT STATYCZNY I ŚRODEK CIĘŻKOŚCI FIGURY

$A=\iint_A dx\,dy$ - pole powierzchni [m^2]

$S_x=\iint_A y\,dx\,dy$ - moment statyczny względem płaszczyzny XZ [m^3]

$S_y=\iint_A x\,dx\,dy$ - moment statyczny względem płaszczyzny YZ [m^3]

Ponieważ rozpatrujemy figury płaskie leżące w płaszczyźnie XY, więc moment statyczny względem płaszczyzny XZ lub YZ możemy w pewnym sensie utożsamiać z momentem statycznym względem osi odpowiednio x i y.

Położenie środka ciężkości O: $\boxed{x_O=\frac{S_y}{A} \qquad y_O=\frac{S_x}{A}}$, stąd: $\boxed{S_x=A\,y_O \qquad S_y=A\,x_O}$

- **Jeśli figura ma jedną oś symetrii to środek ciężkości leży na tej osi**
- **Jeśli figura ma więcej niż jedną oś symetrii to środek ciężkości wyznaczony jest przez punkt przecięcia się tych osi**
- **Moment statyczny względem osi przechodzących przez środek ciężkości jest równy 0**

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

$I_x=\iint_A y^2\,dx\,dy$ - moment bezwładności względem osi X [m^4]

$I_y=\iint_A x^2\,dx\,dy$ - moment bezwładności względem osi X [m^4]

$D_{xy}=\iint_A xy\,dx\,dy$ - moment dewiacji (zboczenia) względem płaszczyzn XZ i YZ [m^4]

$I_0=\iint_A r^2\,dA=\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy=I_x+I_y$ - biegunowy moment bezwładności [m^4]

$i_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$ - promienie bezwładności względem osi x i y [m]

- **Moment bezwładności jest zawsze dodatni.**
- **Moment dewiacji może być ujemny.**

ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

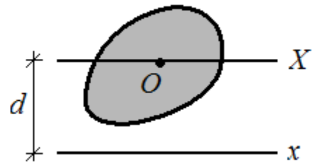
Widzimy, że wszystkie z powyższych wartości są zdefiniowane z wykorzystaniem współrzędnych punktów przekroju w pewnym przyjętym układzie współrzędnych. Zmiana układu współrzędnych pociąga za sobą zmianę wartości charakterystyk geometrycznych. Dowolna zmiana układu w przypadku płaskim może być zapisana jako złożenie dwóch elementarnych przekształceń – **przesunięcia** i **obrotu**.

Charakterystyki geometryczne w układzie równoległych, przesuniętych osi – Twierdzenie Steinera.

Wyznaczaniu wartości momentów bezwładności względem osi **równoległych** do osi układu wyjściowego, jednak **przesuniętych** względem niego służą **twierdzenia Steinera**:

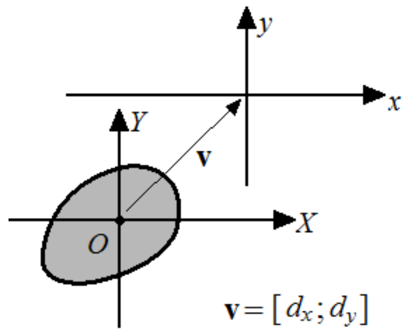
*Moment bezwładności względem dowolnej prostej jest równy momentowi bezwładności względem prostej do niej **równoległej przechodzącej przez środek ciężkości** figury powiększonemu o iloczyn jej pola i odległości między tymi prostymi:*

$$I_x = I_X + A d^2$$



*Moment dewiacji względem dwóch płaszczyzn jest równy momentowi dewiacji względem **równoległych płaszczyzn przechodzących przez środek ciężkości** figury powiększonemu o iloczyn jej pola oraz miar odległości między odpowiednimi płaszczyznami:*

$$D_{xy} = D_{XY} + A\, d_x\, d_y$$



UWAGA: d_x, d_y mogą być ujemne! Jeśli chcemy chcemy wyznaczać wartości momentów bezwładności w układach, z których osi żadne nie przechodzą przez środek ciężkości figury, wtedy wyznaczamy je w dwóch krokach, sprowadzając te wielkości najpierw do środka ciężkości przekształcając powyższe wzory do postaci

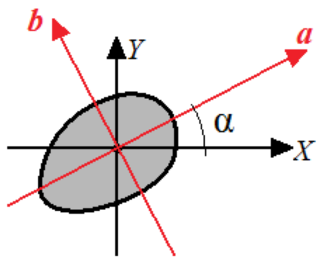
$$I_X = I_x - A d^2 \qquad D_{XY} = D_{xy} + A\, d_x\, d_y$$

a następnie stosujemy ponownie twierdzenia Steinera, aby sprowadzić poszukiwane wielkości do docelowego układu współrzędnych.

Charakterystyki geometryczne w układzie obróconym

Znając charakterystyki geometryczne figury w danym układzie współrzędnych, momenty bezwładności i momenty dewiacji względem układu **obróconego** o kąt α (jednak o **początku w tym samym punkcie**) są równe:

$$\boxed{\begin{aligned} I_a &= I_X \cos^2\alpha + I_Y \sin^2\alpha - 2 D_{XY} \sin\alpha \cos\alpha \\ I_b &= I_X \sin^2\alpha + I_Y \cos^2\alpha + 2 D_{XY} \sin\alpha \cos\alpha \\ D_{ab} &= \frac{I_Y - I_X}{2} \sin 2\alpha - D_{XY} \cos 2\alpha \end{aligned}}$$



TENSOR BEZWAŁDNOŚCI – GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGURY

Wprowadza się wielkość nazywaną tensorem momentu bezwładności: $\mathbf{I}=\begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} \\ -D_{xy} & I_y \end{bmatrix}$

Tensor ten scharakteryzowany może być przez układ liczb, których wartość nie zmienia się wraz ze zmianą orientacji osi układu współrzędnych – są to tzw. **niezmienniki tensora**. Wśród nich wyróżniamy:

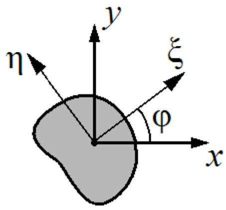
- **ślad tensora** $a = \mathrm{tr}(\mathbf{I}) = I_x + I_y$
- **wyznacznik tensora** $b = \det(\mathbf{I}) = I_x I_y - D_{xy}^2$
- **wartości własne tensora – główne momenty bezwładności**

Główne momenty bezwładności – będące jednocześnie największymi i najmniejszymi możliwymi wartościami momentów bezwładności – są rozwiązaniami **równania wiekowego**:

$$\boxed{I^2 - a\,I + b = 0}$$

$$\boxed{I_{max/min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}}$$

Kąt między kierunkiem osi x a kierunkiem osi maksymalnego momentu bezwładności ξ :



$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{D_{xy}}{I_y - I_{max}} = \frac{I_x - I_{max}}{D_{xy}} = \frac{D_{xy}}{I_{min} - I_x} = \frac{I_{min} - I_y}{D_{xy}}}$$

Osie maksymalnej i minimalnej bezwładności nazywamy **osiami (kierunkami) własnymi** lub **głównymi** tensora.

- **Osie główne tensora bezwładności (kierunki maksymalnego i minimalnego momentu bezwładności) są zawsze prostopadłe.**

- **W układzie osi głównych tensor bezwładności ma postać diagonalną z głównymi momentami bezwładności na przekątnej głównej i momenami dewiacji równymi 0.**

- **W układzie osi nachylonym do osi głównych pod kątem 45° momenty dewiacji przyjmują wartości ekstremalne (maksymalne lub minimalne).**

- **Jeśli figura posiada oś symetrii to jest ona kierunkiem głównym bezwładności, drugi kierunek główny zaś jest do niego prostopadły.**

- **Jeśli figura posiada więcej niż dwie osie symetrii (koło, kwadrat, *n*-kąty foremne, *n* > 2, itp.) to dowolne kierunki są kierunkami głownymi bezwładności.**

Charakterystyki geometryczne wybranych figur płaskich

$x\ y$ – osie przyjętego układu współrzędnych
$X\ Y$ – osie centralne, przechodzące przez środek ciężkości osie równoległe do osi przyjętego układu
$\xi\ \eta$ – osie główne bezwładności – jeśli nie zaznaczono inaczej, pokrywają się z $X\ Y$

I_x, I_y, D_z - momenty bezwładności w przyjętym układzie $x\ y$
I_X, I_Y, D_Z - centralne momenty bezwładności
I_{max}, I_{min}, I_0 - centralne główne momenty bezwładności

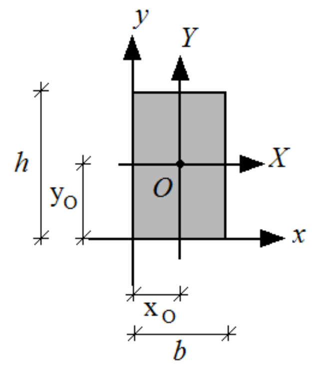
UWAGA: Jeśli figura (prostokąt, trójkąt prostokątny, ćwiartka koła) znajduje się w II lub IV ćwiartce podstawowego układu współrzędnych $x\ y$, którego osie zawierają krawędzie tej figury, to momenty dewiacji względem tych osi mają znaki przeciwne do podanych poniżej.

Prostokąt

$$A=bh \qquad D_z=\frac{b^2h^2}{4} \qquad I_0=\frac{bh}{12}(b^2+h^2)$$

$$x_O=\frac{b}{2} \qquad I_x=\frac{bh^3}{3} \qquad I_{max}=\frac{bh^3}{12}$$

$$y_O=\frac{h}{2} \qquad I_y=\frac{b^3h}{3} \qquad I_{min}=\frac{b^3h}{12}$$



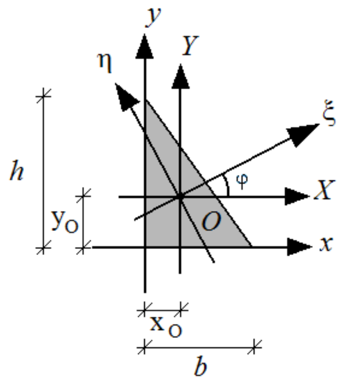
Trójkąt

$$A=\frac{1}{2}bh \qquad D_z=\frac{b^2h^2}{24} \qquad D_Z=\mp\frac{b^2h^2}{72} \qquad I_0=\frac{bh}{36}(b^2+h^2)$$

$$x_O=\frac{b}{3} \qquad I_x=\frac{bh^3}{12} \qquad I_X=\frac{bh^3}{36} \qquad I_{max}=\frac{bh}{72}\left[b^2+h^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right]$$

$$y_O=\frac{h}{3} \qquad I_y=\frac{b^3h}{12} \qquad I_Y=\frac{b^3h}{36} \qquad I_{min}=\frac{bh}{72}\left[b^2+h^2-\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right]$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{\pm bh}{h^2-b^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}\right)=\mathrm{arctg}\left(\mp\frac{h^2-b^2-\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}}{bh}\right)$$



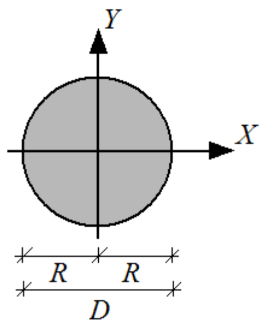
UWAGA: Jeśli trójkąt zorientowany jest w układzie osi centralnych w ten sposób, że trapezy odcięte przez jego osie znajdują się w II i IV ćwiartce układu, wtedy w powyższych wzorach bierzemy górny znak, jeśli w I i III ćwiartce – dolny.

Koło

$$A=\pi R^2 \qquad I_0=\frac{\pi R^4}{2}=\frac{\pi D^4}{32}$$

$$x_O=0 \qquad I_{max}=\frac{\pi R^4}{4}=\frac{\pi D^4}{64}$$

$$y_O=0 \qquad I_{min}=\frac{\pi R^4}{4}=\frac{\pi D^4}{64}$$

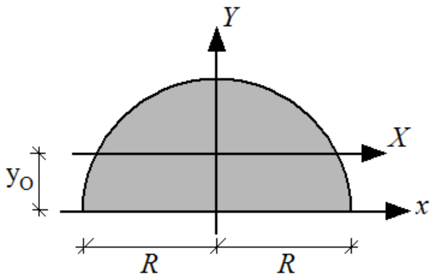


Półkole

$$A=\frac{\pi R^2}{2} \qquad D_z=0 \qquad I_0=R^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{8}{9\pi}\right)$$

$$x_O=0 \qquad I_x=\frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{max}=I_Y=\frac{\pi R^4}{8}$$

$$y_O=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_y=\frac{\pi R^4}{8} \qquad I_{min}=I_X=R^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$$



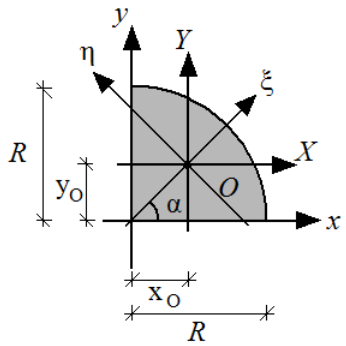
Ćwiartka koła

$$A=\frac{\pi R^2}{4} \qquad D_z=\frac{R^4}{8} \qquad D_Z=R^4\left(\frac{1}{8}-\frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_0=R^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$$

$$x_O=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_x=\frac{\pi R^4}{16} \qquad I_X=R^4\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_{max}=R^4\frac{(\pi-2)}{16}$$

$$y_O=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi} \qquad I_y=\frac{\pi R^4}{16} \qquad I_Y=R^4\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right) \qquad I_{min}=R^4\frac{(9\pi^2+18\pi-128)}{144\pi}$$

$$\varphi=45^\circ$$



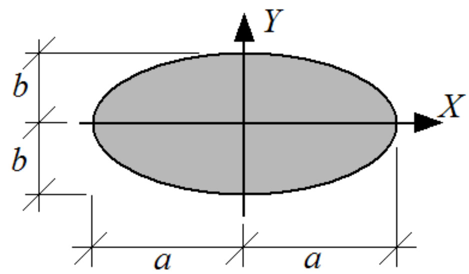
UWAGA: D_Z oraz D_z obliczone dla orientacji figury jak na rysunku.

Elipsa

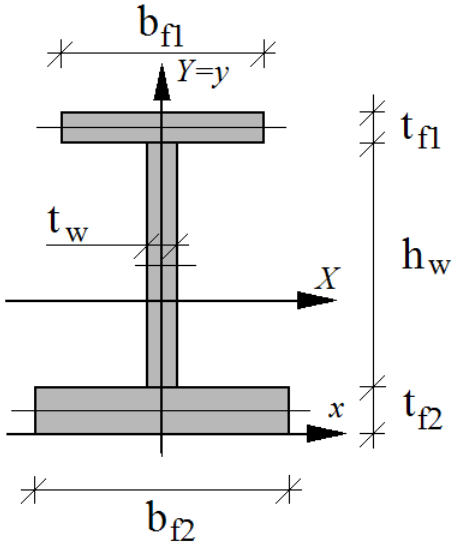
$$A=\pi a b \qquad I_0=\frac{\pi a b}{4}(a^2+b^2)$$

$$x_O=0 \qquad I_{max}=\frac{\pi a b^3}{4}$$

$$y_O=0 \qquad I_{min}=\frac{\pi a^3 b}{4}$$



Przekrój złożony – na podstawie belki dwuteowej



Półka górna:

$$A_{f1}=t_{f1}\cdot b_{f1} \qquad I_{x,f1}=\frac{b_{f1}t_{f1}^3}{12} \qquad I_{y,f1}=\frac{b_{f1}^3 t_{f1}}{12}$$

Półka dolna:

$$A_{f2}=t_{f2}\cdot b_{f2} \qquad I_{x,f2}=\frac{b_{f2}t_{f2}^3}{12} \qquad I_{y,f2}=\frac{b_{f2}^3 t_{f2}}{12}$$

Środnik:

$$A_w=t_w\cdot h_w \qquad I_{x,w}=\frac{t_w h_w^3}{12} \qquad I_{y,w}=\frac{b_w^3 h_w}{12}$$

Jedna z osi głównych pokrywa się z osią symetrii przekroju y. Druga jest prostopadła do niej.

Pole powierzchni przekroju: $A=[A_{f1}]+[A_{f2}]+[A_w]$

Moment statyczny względem osi x: $S_x=\left[\frac{A_{f2}\cdot t_{f2}}{2}\right]+\left[A_w\cdot\left(t_{f2}+\frac{h_w}{2}\right)\right]+\left[A_{f2}\cdot\left(t_{f2}+h_w+\frac{t_{f1}}{2}\right)\right]$

Moment statyczny względem osi y: $S_y=0$

Położenie środka ciężkości: $x_O=\frac{S_y}{A}=0 \qquad y_O=\frac{S_x}{A}$

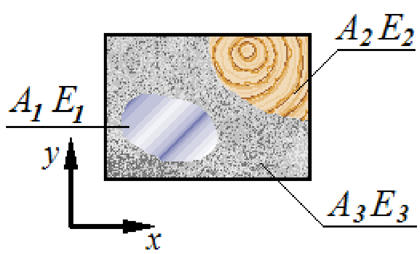
Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_x=\left[I_{x,f1}+A_{f1}\cdot\left(y_O-\frac{t_{f2}}{2}\right)^2\right]+\left[I_{x,w}+A_w\cdot\left(y_O-t_{f2}-\frac{h_w}{2}\right)^2\right]+\left[I_{x,f2}+A_{f2}\cdot\left(y_O-t_{f2}-h_w-\frac{t_{f1}}{2}\right)^2\right]$$

$$I_y=[I_{y,f1}]+[I_{y,f2}]+[I_{y,w}]$$

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE PRZEKROJÓW ZESPOLONYCH

W przypadku, gdy jakiś przekrój zbudowany jest z kilku różnych materiałów, które posiadają odmienne właściwości mechaniczne (np. stal, drewno, beton), wyznacza się tzw. **ważone charakterystyki geometryczne**.



W przypadku zagadnień zginania, wyznacza się porównawczy moduł Younga E_0 , którym jest najczęściej najmniejszy z modułów Younga wszystkich materiałów składowych $E_0=\min(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, a następnie dla każdego z materiałów oblicza się stosunek odpowiedniego dla niego modułu Younga oraz modułu porównawczego:

$$\alpha_i=\frac{E_i}{E_0} \quad [-]$$

Ważone charakterystyki geometryczne:

$A=\sum_{i}^{n}\alpha_i\iint_{A_i}dx\,dy$ - ważone pole powierzchni [m^2]

$S_x=\sum_{i}^{n}\alpha_i\iint_{A_i}y\,dx\,dy$ - ważony moment statyczny względem płaszczyzny XZ [m^3]

$S_y=\sum_{i}^{n}\alpha_i\iint_{A_i}x\,dx\,dy$ - ważony moment statyczny względem płaszczyzny YZ [m^3]

Położenie ważonego środka ciężkości wyznaczamy tak jak zwykle: $x_O=\frac{S_y}{A}$ $y_O=\frac{S_x}{A}$

$I_x=\sum_{i}^{n}\alpha_i\iint_{A_i}y^2\,dx\,dy$ - ważony moment bezwładności względem osi X [m^4]

$I_y=\sum_{i}^{n}\alpha_i\iint_{A_i}x^2\,dx\,dy$ - ważony moment bezwładności względem osi X [m^4]

$D_{xy}=\sum_{i}^{n}\alpha_i\iint_{A_i}xy\,dx\,dy$ - ważony moment dewiacji względem płaszczyzn XZ i YZ [m^4]