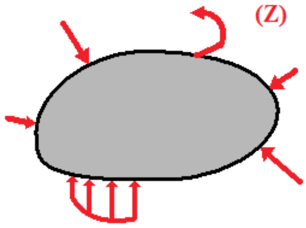
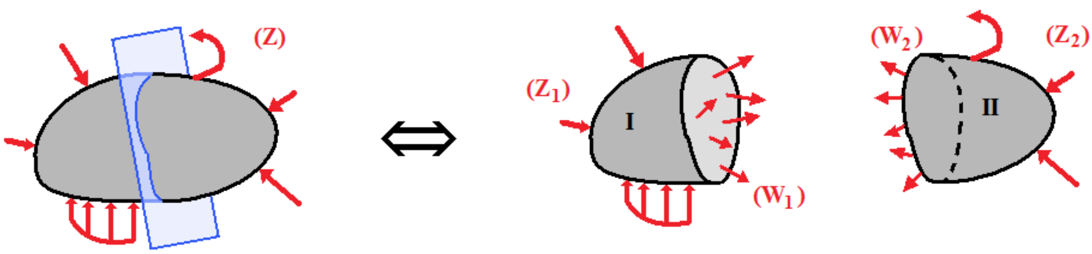
04. Siły przekrojowe w prętach

Załóżmy, że mamy pewne ciało, obciążone pewnym układem sił zewnętrznych (Z), który jest w równowadze.



$$(Z)=0$$

Zgodnie z założeniami teorii sprężystości, wszelkie oddziaływania wewnętrzne między poszczególnymi częściami ciała podlegającego odkształceniu, reprezentowane być mogą przez układ **wewnętrznych sił powierzchniowych**. Ogólnie **siłami wewnętrznymi** nazywać będziemy wypadkowe układu sił, jakimi każda z części ciała dąży do zachowania spójności z każdą inną jego częścią. Dokonajmy myślowego rozcięcia tego ciała na dwie części I i II, a następnie podzielmy układ sił zewnętrznych na dwie części (Z_1) i (Z_2) przyłożone odpowiednio do do I i II części ciała oraz zastąpmy wszelkie oddziaływania między tymi częściami układami sił wewnętrznych (W_1) i (W_2) przyłożonymi odpowiednio do I i II części ciała.



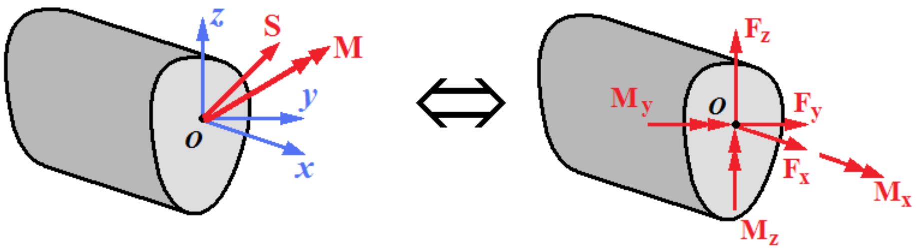
Jeśli ciało jest w równowadze, wtedy każda jego część musi być w równowadze.

$$\begin{cases}(Z_1)+(Z_2)=(Z)=0\\(Z_1)+(W_1)=0\\(Z_2)+(W_2)=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}(W_1)=(Z_2)\\(W_2)=(Z_1)\end{cases}}$$

A zatem:

układ sił wewnętrznych *przyłożonych do* ***jednej części*** *rozpatrywanego ciała jest* ***równy układowi sił zewnętrznych*** *przyłożonych do* ***drugiej, odciętej*** *części tego ciała.*

W przypadku układów prętowych, układ sił wewnętrznych będziemy zawsze **redukować do środka ciężkości przekroju pręta**. Dla pręta możemy wyznaczyć układ trzech wzajemnie prostopadłych kierunków – będą to: kierunek osi pręta oraz kierunki głównych centralnych osi bezwładności przekroju. Kierunki te mogą stanowić pewien lokalny układ współrzędnych, w którym możemy określić **składowe sumy układu sił wewnętrznych** oraz **sumy momentów tego układu względem środka ciężkości przekroju** – składowe te nazywamy **siłami przekrojowymi**[1].



Oznaczając oś pręta przez x zaś przez y i z główne centralne osie bezwładności danego przekroju, możemy wyróżnić następujące siły przekrojowe:

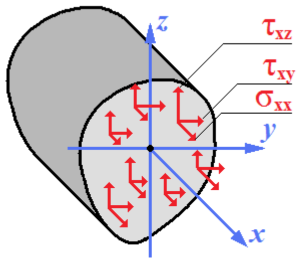
- F_x **siła osiowa** (normalna, podłużna, siła rozciągająca lub ściskająca)
- F_y, F_z **siły poprzeczne** (tnące, ścinające)
- M_x **moment skręcający**
- M_y, M_z **momenty zginające**

Chcąc wyznaczyć siły wewnętrzne i następnie siły przekrojowe w pręcie, należy dokonać jego myślowego przecięcia. Dla pręta, najbardziej uzasadnionym cięciem jest cięcie płaszczyzną prostopadłą do jego osi (płaszczyzną, której normalna jest równoległa do osi x), tj. płaszczyzną jego przekroju poprzecznego. W lokalnym układzie współrzędnych x, y, z, gęstość sił wewnętrznych jest opisana składowymi $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ tensora naprężenia. Siły przekrojowe można wyznaczyć jako odpowiednie całki (sumy) tych naprężeń:

$$F_x = \iint_A \sigma_{xx}\, dA \qquad M_x = \iint_A \left(\tau_{xz}\cdot y - \tau_{xy}\cdot z\right) dA$$

$$F_y = \iint_A \tau_{xy}\, dA \qquad M_y = \iint_A \left(\sigma_{xx}\cdot z\right) dA$$

$$F_z = \iint_A \tau_{xz}\, dA \qquad M_z = -\iint_A \left(\sigma_{xx}\cdot y\right) dA$$



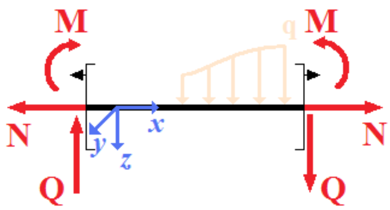
W przypadku zagadnień płaskich, tj. kiedy cała konstrukcja leży w jednej płaszczyźnie i obciążona jest jedynie siłami leżącymi w tej płaszczyźnie lub momentami do niej prostopadłymi, układ 6 sił przekrojowych redukuje się jedynie do 3 sił przekrojowych:

- **siły osiowej** F_x oznaczanej najczęściej przez *N*.
- **siły poprzecznej** F_z oznaczanej zwyczajowo przez *T* lub *Q*.
- **momentu zginającego** M_y oznaczanego zwyczajowo przez *M*.

---

1) W węższym sensie siłami przekrojowymi nazywa się niekiedy jedynie wektor sumy i wektor sumy momentów układu sił wewnętrznych w danym przekroju.

Siły przekrojowe znakujemy w następujący sposób:

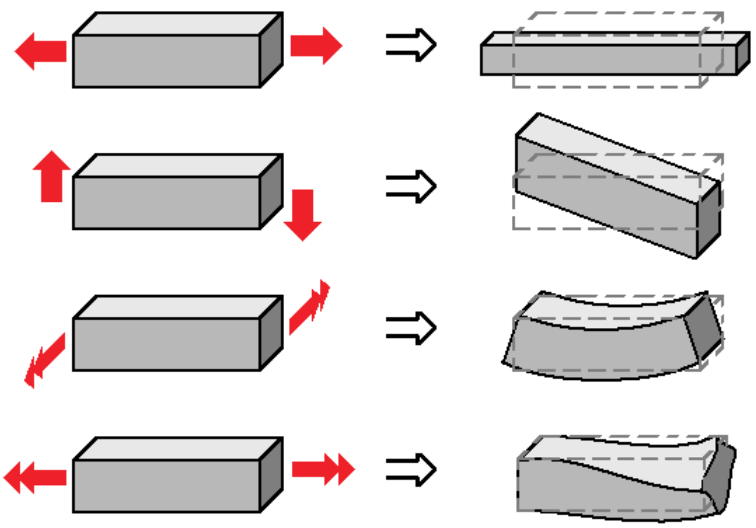
> *Jeśli normalna zewnętrzna powierzchni myślowego cięcia jest zgodna z osią x lokalnego układu współrzędnych, to wektor danej siły przekrojowej jest zgodny z odpowiadającą mu osią lokalnego układu współrzędnych. Jeśli normalna zewnętrzna jest przeciwna do lokalnego x – wtedy znakowanie jest odwrotne.*
>
> Dodatnie zwroty sił przekrojowych N, Q, M:
>
> 
>

Oznacza to, że o znaku siły przekrojowej decyduje nie tylko jej zwrot, ale także jej orientacja względem rozpatrywanego przekroju. Najprościej zilustrować to na przykładzie siły osiowej – siłę osiową oznaczać będziemy jako dodatnią wtedy, gdy będzie ona siłą rozciągającą. Jeśli odmierzamy lokalną zmienną x na pręcie np. w prawo, to redukując układ sił po prawej stronie, siła osiowa będzie siłą rozciągającą, jeśli działać będzie w prawo. Gdybyśmy redukowali układ po lewej stronie, to siła rozciągająca musiałaby działać w lewo.

Najważniejsze jest jednak to, że

> *wartości sił przekrojowych nie zależą od tego, którą z dwóch części układu sił zewnętrznych (po dokonaniu myślowego rozcięcia układu) będziemy redukować do środka rozpatrywanego przekroju – za każdym razem uzyskamy ten sam wynik.*

Gdy część z sił przekrojowych jest równa zero, wtedy mamy do czynienia z **prostymi przypadkami obciążenia pręta**. Wyróżnić możemy cztery takie podstawowe przypadki:



$N \neq 0 \quad \Rightarrow$ rozciąganie

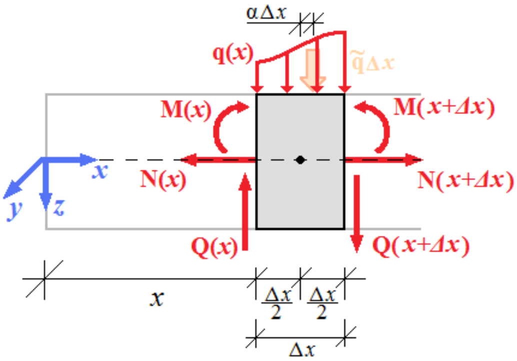
$Q \neq 0 \quad \Rightarrow$ ścinanie

$M_y \neq 0 \quad \Rightarrow$ zginanie

$M_x \neq 0 \quad \Rightarrow$ skręcanie

Zależności różniczkowe między siłami przekrojowymi

Rozkłady sił przekrojowych po długości pręta są zależne od gęstości obciążenia do niego przyłożonego. Ponadto okazuje się, że rozkłady sił poprzecznych oraz momentów zginających również związane są pewną zależnością. W obydwu przypadkach są to zależności różniczkowe, które nietrudno wyprowadzić rozważając równowagę niewielkiego elementu pręta o długości Δx :



Wypadkową obciążenia ciągłego przyjmujemy za równą $\tilde{q}\cdot\Delta x$ (gdzie $\tilde{q}$ jest wartością średnią funkcji *q*, zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej dla całki) i znajduje się w odległości $\alpha\cdot\Delta x$ $(0<\alpha<1)$ od środka wyciętego elementu materialnego. Wartości sił przekrojowych w dalszym przekroju, można rozwinąć w szereg Taylora, wg wzoru:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\cdot\frac{d\,f}{d\,x}\bigg|_x\cdot\Delta x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2 f}{d\,x^2}\bigg|_x\cdot(\Delta x)^2 + \ldots$$

Przyjmując, że Δx jest bardzo małe, wszystkie te składniki, w których wyrażenie to występuje w potędze wyższej niż 1, można przyjąć za bliskie zeru. Stąd otrzymujemy:

$$Q(x+\Delta x) = Q+\frac{dQ}{dx}\Delta x, \qquad M(x+\Delta x) = M+\frac{dM}{dx}\Delta x \quad ,$$

gdzie zamiast $Q(x)$ napisaliśmy Q itd. Zapiszmy warunek równowagi dla sumy układu sił na kierunku osi z oraz warunek równowagi dla sumy momentów względem osi y liczony względem środka wyciętego elementu materialnego:

$$\Sigma F_z = -Q + \tilde{q}\cdot\Delta x+\left(Q+\frac{dQ}{dx}\cdot\Delta x\right) = 0$$
$$\Sigma M_y = -M+\left(M+\frac{dM}{dx}\cdot\Delta x\right)-Q\cdot\frac{\Delta x}{2}-\left(Q+\frac{dQ}{dx}\Delta x\right)\cdot\frac{\Delta x}{2} + \tilde{q}\cdot\Delta x\cdot(\alpha\Delta x) = 0$$

Po rozpisaniu i podzieleniu przez $\Delta x>0$, otrzymujemy:

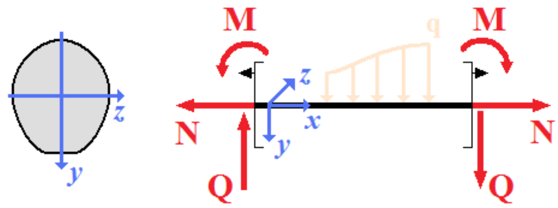
$$\tilde{q} + \frac{dQ}{dx} = 0 \qquad\qquad \frac{dM}{dx}-Q+\frac{dQ}{dx}\frac{\Delta x}{2}+\tilde{q}\,\alpha\Delta x = 0$$

Dokonując następnie przejścia granicznego $\Delta x\rightarrow 0$,otrzymujemy $\tilde{q}\rightarrow q(x)$ i wreszcie:

$$\boxed{\frac{dQ}{dx}=-q(x) \qquad \frac{dM}{dx}=Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dF_z}{dx}=-q_z(x) \qquad \frac{dM_y}{dx}=F_z(x)}$$

Zagadnienia płaskie, stanowią ogromną większość typowych problemów wytrzymałościowych, stąd i uproszczony układ 3 zamiast ogólnego przypadku 6 sił przekrojowych jest powszechnie używany. Niektórzy przyjmują jednak inną orientacją lokalnego układu współrzędnych względem płaszczyzny obciążenia niż ta, którą założyliśmy powyżej, tj. przyjmują, że obciążenie leży w płaszczyźnie (x,y) lokalnego układu współrzędnych. Wtedy mamy:

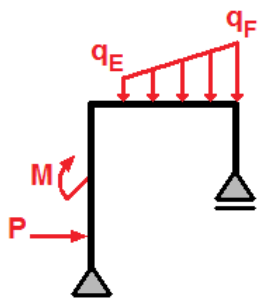
- **siła osiowa** $N=F_x$
- **siła poprzeczna** $Q=F_y$
- **moment zginający** $M=M_z$



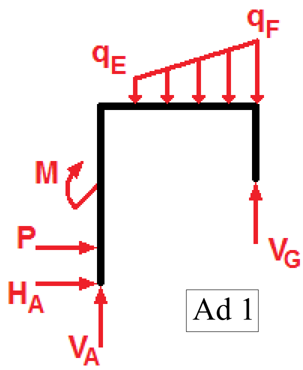
Ogólna zasada znakowania sił przekrojowych jest jednak zawsze taka sama, co – z powodu innej orientacji osi lokalnego układu współrzędnych – skutkuje innymi orientacjami dodatnich sił przekrojowych. Ponadto i wyprowadzone powyżej zależności różniczkowe przyjmują inną postać:

$$\frac{dF_y}{dx}=-q_y(x) \qquad \frac{dM_z}{dx}=-F_y(x)$$

Schemat wyznaczania sił przekrojowych w konstrukcji

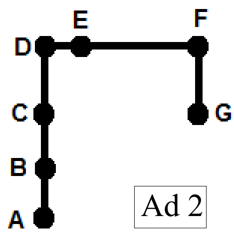


1. **Wyznaczenie reakcji** podporowych.



Ad 1

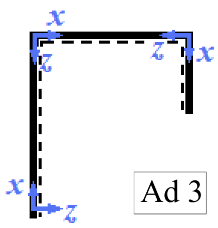
2. Podzielenie konstrukcji na fragmenty ograniczone **punktami charakterystycznymi**. Punktami charakterystycznymi są:



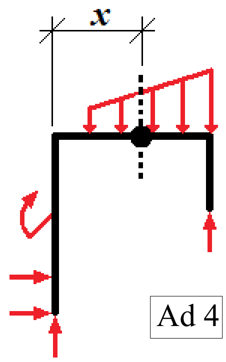
Ad 2

   - punkty **zmiany geometrii** układu (punkty schodzenia się prętów, zagięcia, przeguby, punkty początkowe i końcowe łuków)
   - punkty **podparcia**
   - punkty **przyłożenia obciążeń skupionych** (momentów skupionych, sił skupionych)
   - początkowe i końcowe punkty **przyłożenia obciążenia ciągłego**.

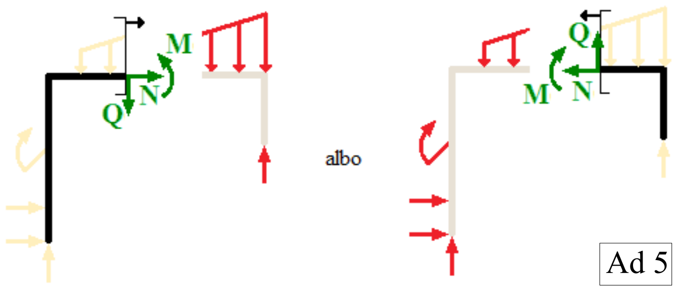
3. Wyznaczenie w obrębie każdego przedziału **lokalnego układu współrzędnych** xz. Jeśli kolejne przedziały należą do tego samego pręta wtedy wystarczy przyjąć jeden układ lokalny na początku pręta. Te strony prętów, które odpowiadają dodatnim wartościom z można oznaczyć przerywaną linią – tzw. „spody".



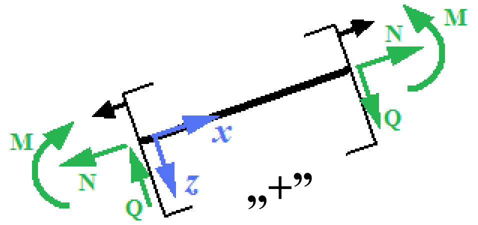
4. Dokonanie **myślowego przecięcia** w dowolnym punkcie rozpatrywanego przedziału określonym współrzędną x lokalnego układu współrzędnych w celu wyznaczenia sił przekrojowych w danym punkcie.



5. **Redukcja w danym punkcie całego układu** sił z jednej albo z drugiej strony cięcia i zapisanie funkcji rozkładu sił osiowych N(x) , sił poprzecznych Q(x) i momentów zginających M(x).



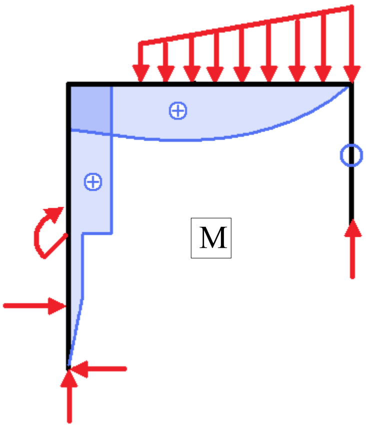
- **Dodatnie znaki wartości sił przekrojowych** zależą od wzajemnej orientacji osi x lokalnego układu współrzędnych i normalnej zewnętrznej płaszczyzny cięcia:



*Jeśli **normalna zewnętrzna** powierzchni cięcia jest **zwrócona zgodnie z osią x** lokalnego układu współrzędnych (redukujemy układ sił po stronie większych wartości x) to **dodatnie zwroty sił przekrojowych są takie same jak zwroty odpowiednich osi lokalnego układu współrzędnych**. W przeciwnym wypadku są do nich przeciwne.*

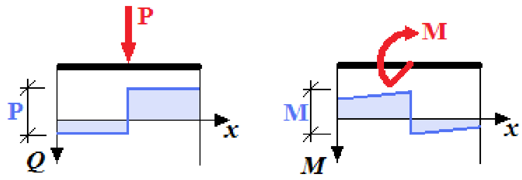
Rysowanie wykresów sił przekrojowych

- Lokalny układ współrzędnych wyznacza układ, w którym rysowany jest wykres – oś pręta (lokalna oś x) jest osią rzędnych zaś oś odciętych jest do niej prostopadła i skierowana zgodnie z osią z – **dodatnie wartości sił przekrojowych rysujemy po stronie dodatnich wartości lokalnej zmiennej z** (po stronie „spodów").



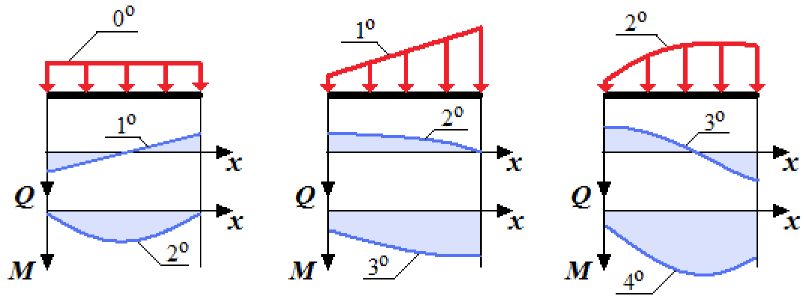
Cechy charakterystyczne wykresów sił przekrojowych

1. **Jeśli w jakimś punkcie przyłożone jest obciążenie skupione, to w wykresie odpowiedniej siły przekrojowej występuje skok o wartość tego obciążenia.** Jeśli do pręta przyłożony jest **moment skupiony** to w wykresie **momentów** występuje w tym miejscu **skok o wartość równą przyłożonemu obciążeniu.** Analogiczne skoki występują w wykresach sił poprzecznych i sił podłużnych w punktach przyłożenia skupionych sił odpowiednio poprzecznych lub podłużnych.



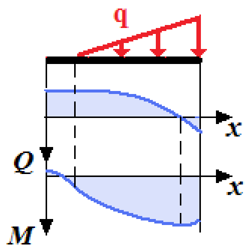
2. Jeśli na długości pręta między punktami charakterystycznymi **nie występuje żadne obciążenie**, to wartości sił między tymi punktami łączymy **linią prostą** (ponadto N i Q są wtedy stałe).

3. Jeśli na długości pręta między punktami charakterystycznymi **występuje obciążenie ciągłe** równomierne (prostokątne) to **wartości momentów** między tymi punktami łączymy **krzywą drugiego stopnia (parabolą)** zaś wartości sił poprzecznych i podłużnych linią prostą. Jeśli obciążenie jest trójkątne, to wartości momentów łączymy krzywą 3-go stopnia zaś sił – krzywą 2-go stopnia. Jeśli jest paraboliczne – momenty łączymy krzywą 4-go stopnia zaś siły krzywą 3-go stopnia itd.

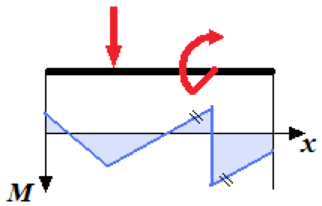


4. **Wykres funkcji rozkładu sił poprzecznych jest wykresem pochodnej funkcji rozkładu momentów zginających! Wykres funkcji rozkładu obciążenia ciągłego jest wykresem pochodnej funkcji rozkładu sił poprzecznych!** Stąd:

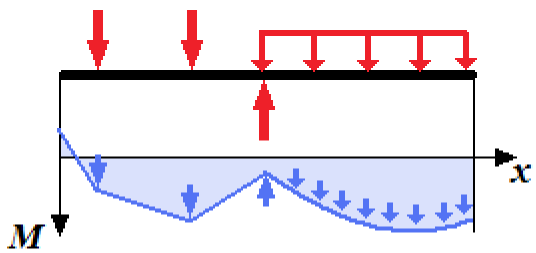
   - Stopień funkcji $M(x)$ jest o jeden wyższy niż funkcji $Q(x)$ i o dwa stopnie wyższy niż stopień funkcji $q(x)$.
   - Gdzie $q(x)=0$, tam $Q(x)$ jest stałe lub osiąga ekstremum lokalne a M(x) ma punkt przegięcia
   - Gdzie $Q(x)=0$, tam $M(x)$ jest stałe lub osiąga ekstremum lokalne.



5. Wykres **momentów** ma ostre **załamania** (zmienia nachylenia wykresu lub stycznej do wykresu) tylko i wyłącznie **w punktach przyłożenia sił skupionych** – w innych punktach wykres momentu (nawet jeśli występuje skok) jest nachylony pod tym samym kątem co na końcu przedziału poprzedniego.

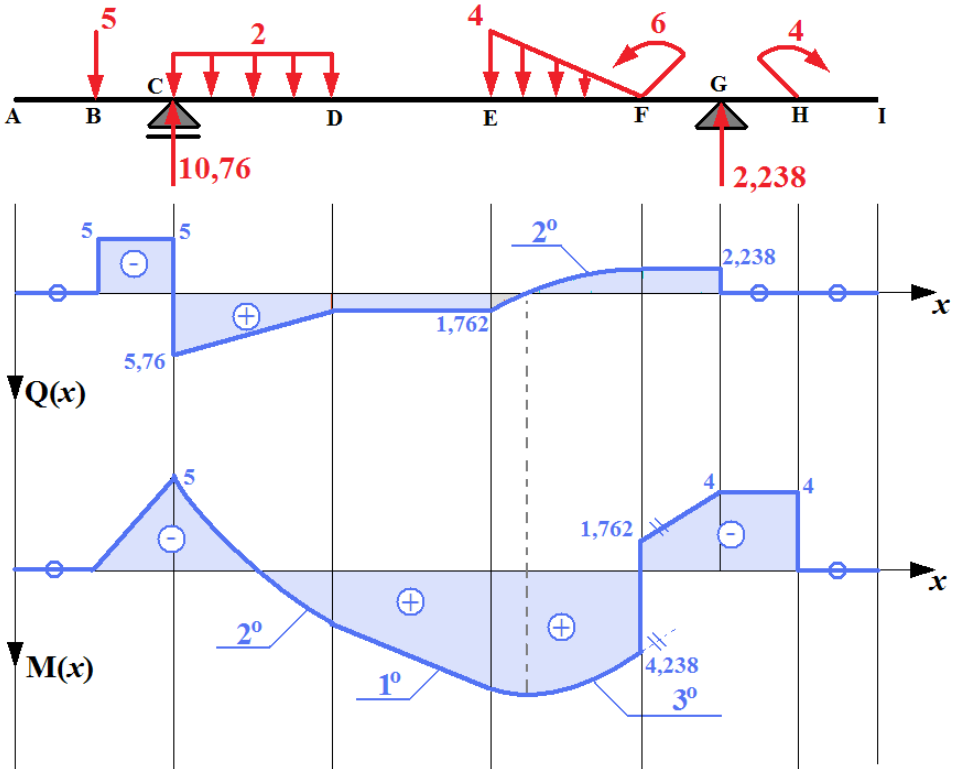


6. Jeśli przyjmie się układy lokalne j/w i kreśli się wykresy według podanego schematu, to każda **siła skupiona „wygina”** (uwypukla) **wykres momentów**, tak jakby siła te deformowała wykres (zmienia jego nachylenie w kierunku przeciwnym do kierunku swojego działania). **Obciążenie ciągłe uwypukla wykres momentów** w kierunku swojego działania.



7. Na **nieobciążonych momentem** (również podporowym) **końcach** pręta wykres **momentów** przyjmuje wartość równą **0**.

Przykładowy wykres sił poprzecznych i momentów zginających:



Punkt B – obciążenie siłą skupioną 5 → skok w wykresie Q o 5, załamanie w wykresie M

Przedział BC – brak obciążenia ciągłego → liniowe wykresy sił przekrojowych

Punkt C – początek obciążenia ciągłego, obciążenie siłą skupioną 10,76 → skok w wykresie Q o 10,76, załamanie w wykresie M

Przedział CD – stałe obciążenie ciągłe → wykres Q jest liniowy, wykres M jest parabolą

Punkt D – koniec obciążenia ciągłego, brak obciążenia skupionego → ciągłość w wykresie Q, brak załamania w wykresie M

Przedział DE – brak obciążenia ciągłego → liniowe wykresy sił przekrojowych

Punkt E – początek obciążenia ciągłego, brak obciążenia skupionego → ciągłość w wykresie Q, brak załamania w wykresie M

Przedział EF – obciążenie ciągłe liniowo zmienne → wykres Q jest parabolą, wykres M jest krzywą 3-go stopnia. Miejsce zerowe Q jest punktem występowania ekstremum M.

Punkt F – koniec obciążenia ciągłego i brak siły skupionej → ciągłość w wykresie Q, brak zmiany nachylenia wykresu M, obciążenie momentem skupionym 6 → skok w wykresie M o 6

Przedział FG – brak obciążenia ciągłego → liniowe wykresy sił przekrojowych

Punkt G – obciążenie siłą skupioną 2,238 → skok w wykresie Q o 2,238, załamanie w wykresie M

Przedział GH – brak obciążenia ciągłego → liniowe wykresy sił przekrojowych

Punkt H – obciążenie momentem skupionym 4 → skok w wykresie M o 4.