

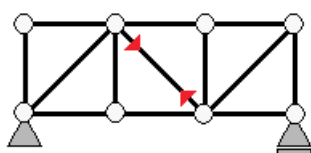
## 05. Kratownice

**Kratownicą** nazywamy układ prętowy, w którym:

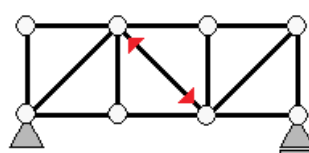
- występują tylko **pręty proste**
- wszystkie pręty połączone są ze sobą **przegubami**
- obciążenie stanowią tylko **siły skupione przyłożone w węzłach**

W prętach kratowych **jedyną niezerową siłą przekrojową jest siła osiowa**.

Siły osiowe w prętach oznaczamy grotami strzałek na obydwu końcach pręta, przy czym ich **zwroty wskazują, w jaki sposób siła wewnątrz pręta działa na węzeł** (co w efekcie sprawia wrażenie, jakby siła ta działała przeciwnie na sam pręt) – siła dodatnia (rozciągająca) jest oznaczona grotami od węzłów do środka pręta, siła ściskająca od środka pręta do węzłów:



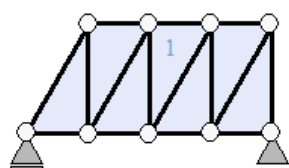
siła dodatnia (rozciągająca) w pręcie



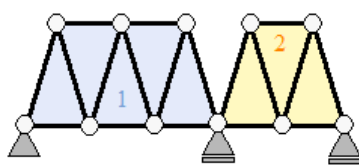
siła ujemna (ściskająca) w pręcie

W celu wyznaczenia reakcji w podparciu kratownic, należy określić ilość sztywnych tarcz, które stanowią kratownicę – nie każdy bowiem przegub obecny w kratownicy dopuszcza obrót względem siebie łączonych w nim sztywnych elementów, a tylko takie przeguby dostarczają wymagającego dodatkowego podparcia stopnia swobody (i równania równowagi z jednej strony przegubu). Każdy pręt z osobna jest traktowany jako sztywna tarcza. Ponadto dowolne **trzy sztywne tarcze połączone trzema przegubami, które nie leżą w jednej linii, stanowią w rzeczywistości jedną tarczę**. I tak dowolna konstrukcja kratowa, złożona wyłącznie z trójkątnych pól stanowi jedną tarczę. Pola czworokątne są geometrycznie zmienne. Przykładowo:

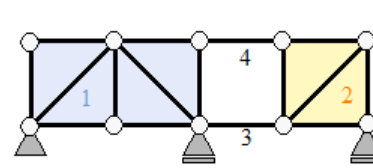
1 tarcza



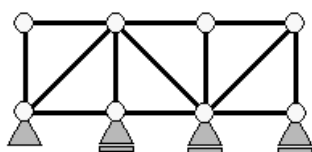
2 tarcze



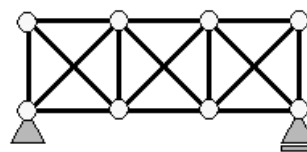
4 tarcze



Kratownice mogą być **zewnątrznie statycznie niewyznaczalne**, gdy ilość niewiadomych reakcji podpór jest większa niż ilość niezależnych stopni swobody dla konstrukcji traktowanej jako układ tarcz, lub mogą też być **wewnętrznie statycznie niewyznaczalne**, gdy w pojedynczej tarczy jest więcej niż minimalna wymagana ilość prętów.



układ zewnętrze  
statycznie niewyznaczalny



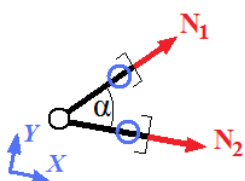
układ wewnętrznie  
statycznie niewyznaczalny.

## TWIERDZENIA O PRĘTACH ZEROWYCH

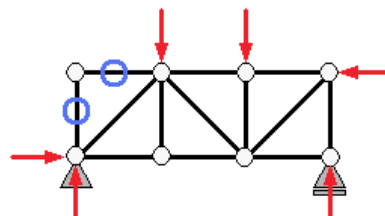
Pierwszą czynnością, jaką powinno się wykonać po wyznaczeniu reakcji podporowych, jest oznaczenie tzw. **prętów zerowych**, tj. takich prętów, o których bez wykonywania obliczeń wiadomo, że występuje w nich zerowa siła przekrojowa. Lokalizacji takich prętów służą następujące twierdzenia, które w prosty sposób udowadnia się zapisując równania równowagi sił działających na rozpatrywany węzeł:

### Twierdzenie 1

Jeśli w węźle schodzą się dwa pręty i węzeł ten jest nieobciążony, to obydwa te pręty są prętami zerowymi

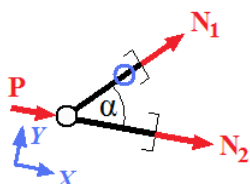


$$\begin{aligned}\Sigma Y = 0: N_1 \sin \alpha = 0 &\Rightarrow N_1 = 0 \\ \Sigma X = 0: N_1 \cos \alpha + N_2 = 0 &\Rightarrow N_2 = 0\end{aligned}$$

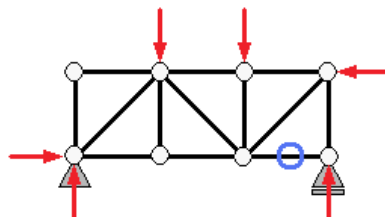


### Twierdzenie 2

Jeśli w węźle schodzą się dwa pręty i węzeł ten jest obciążony siłą równoległą do jednego z nich, to ten drugi jest prętem zerowym

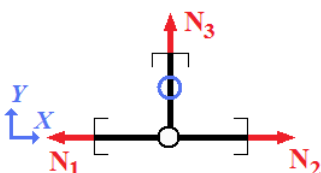


$$\begin{aligned}\Sigma Y = 0: N_1 \sin \alpha = 0 &\Rightarrow N_1 = 0 \\ \Sigma X = 0: N_1 \cos \alpha + N_2 + P = 0 &\Rightarrow N_2 = -P\end{aligned}$$

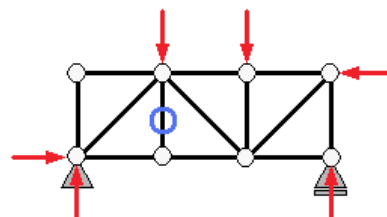


### Twierdzenie 3

Jeśli w nieobciążonym węźle schodzą się trzy pręty, przy czym jeden jest prostopadły do dwóch pozostałych, to pręt ten jest prętem zerowym



$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow N_3 = 0$$

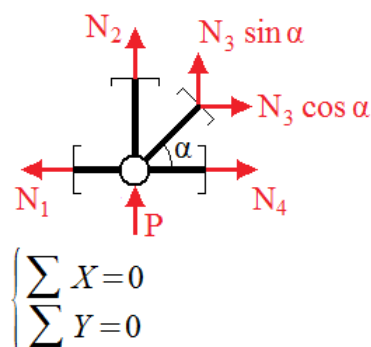


## METODY ROZWIĄZYWANIA KRATOWNIC

Po wyznaczeniu reakcji oraz znalezieniu prętów zerowych można przystąpić do wyznaczenia sił przekrojowych w pozostałych prętach. Najczęściej stosuje się następujące metody:

### Metoda równoważenia węzłów:

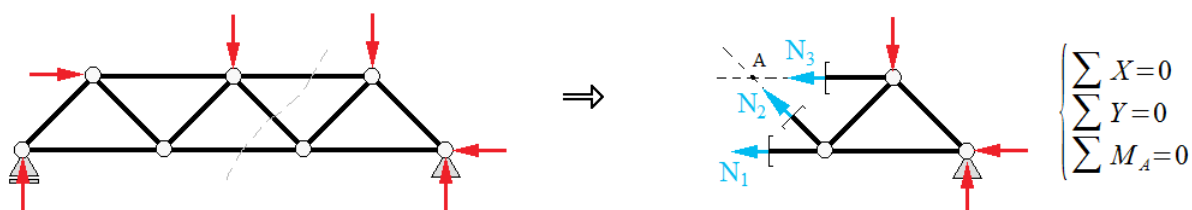
- poszukujemy węzła, w którym występują maksymalnie dwie niewiadome siły
- oznaczamy niewiadome siły w prętach schodzących się w tym węźle i wszystkie obciążenia zewnętrzne przyłożone do tego węzła. Siły wewnętrzne zawsze rysujemy jako rozciągające węzeł – gdyby okazała się ona siłą ścisnącą, wtedy w równaniu równowagi pod odpowiedni symbol podstawimy wartość ujemną<sup>1</sup>.



- rozkładamy wszystkie siły działające na węzeł na składowe poziome i pionowe
- zapisujemy równania sumy sił poziomych i pionowych przyrównanych do 0
- z otrzymanego układu równań wyznaczamy niewiadome siły
- po wyznaczeniu niewiadomych poszukujemy kolejnego węzła z dwoma niewiadomymi i powtarzamy proces

### Metoda cięć (metoda Rittera):

- dokonujemy myślowego cięcia przez konstrukcję, przez maksymalnie 3 pręty
- w miejscu przecięcia każdego pręta zaznaczamy obecną w nim nieznaną siłę wewnętrzną
- z trzech równań równowagi dla odciętej części konstrukcji (dowolnej z dwóch) wyznaczamy trzy poszukiwane niewiadome – w szczególności może to być równanie sumy momentów względem punktu przecięcia się prostych działania dwójki z tych sił



1) To oznacza, że ta sama siła może być na naszych szkicach raz zwrócona w jedną raz w drugą stronę, w zależności od tego, który koniec pręta jest rozpatrywany. Kij ma ostatecznie zawsze dwa końce i aby go rozciągnąć lub ścisnąć, do każdego końca przykładamy siłę zwróconą przeciwnie do tej na drugim końcu. Uwaga ta ma na celu uniknięcie błędu polegającego na mechanicznym przerysowywaniu zwrótoń wyznaczonych wcześniej sił bez zwrócenia uwagi na ich znak.

**Metoda wieloboku sił (wyznaczanie planu Cremony):**