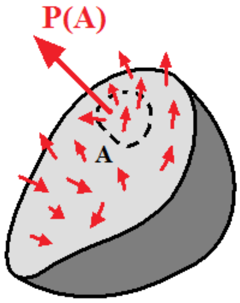
07. Teoria stanu naprężenia i odkształcenia

NAPRĘŻENIE

Naprężeniem nazywamy **gęstość powierzchniowych sił wewnętrznych** obrazujących oddziaływanie jednej części ciała na drugą, po dokonaniu jego myślowego rozcięcia.

Wektor naprężenia jest zdefiniowany jako graniczna wartość wypadkowej układu sił przyłożonych do pewnego obszaru *A* należącego do przekroju poprzecznego ciała, gdy rozpatrywany obszar jest zbieżny do 0:

$$\mathbf{p} = \lim_{A \to 0} \frac{P(A)}{A} \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] = [\mathrm{Pa}]$$



- Układ sił będący sumą naprężeń zebranych z całego przekroju poprzecznego ciała, jest równy układowi sił wewnętrznych, jaki wyznaczony został na drodze obliczeń statycznych

- Nawet w tym samym punkcie naprężenie jest inne w zależności od tego, jaką płaszczyzną dokonano cięcia.

STAN NAPRĘŻENIA

Stan naprężenia w danym punkcie, niezależnie od płaszczyzny cięcia opisany jest przez **tensor naprężenia** $\boldsymbol{\sigma}$ o tej własności, że:

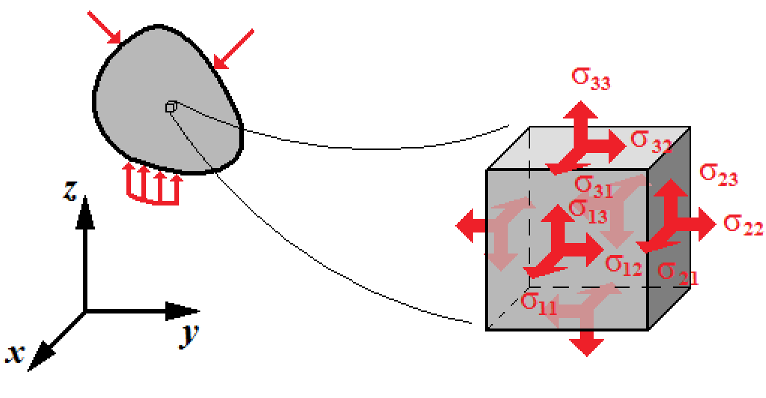
$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}$$

gdzie **n** jest unormowanym wektorem prostopadłym do płaszczyzny cięcia, zaś **p** jest wektorem naprężenia odpowiadającym tej płaszczyźnie. Tensor naprężenia reprezentowany jest przez symetryczną macierz 3×3

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

lub w tzw. „notacji inżynierskiej”

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Naprężenie σ_{ij} oznacza *j*-tą składową wektora naprężenia przy cięciu płaszczyzną o normalnej równoległej do *i*-tej osi przyjętego układu współrzędnych.

Przyjmujemy, że w przypadku, gdy normalna zewnętrzna powierzchni cięcia jest zwrócona zgodnie z osią układu, to naprężenie składowe ma wartość dodatnią jeśli jest zwrócone zgodne z odpowiednią osią i *vice versa*.

Stan naprężenia postaci $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nazywamy **stanem jednoosiowym**

Stan naprężenia postaci $\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nazywamy s**tanem czystego ścinania**

Stan naprężenia postaci $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ nazywamy **stanem hydrostatycznym**

- Składowe tensora naprężenia są funkcjami zależnymi od rozpatrywanego punktu ciała $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$. W przypadku statycznym, funkcje te spełniają układ **równań równowagi Naviera**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \end{cases}$$

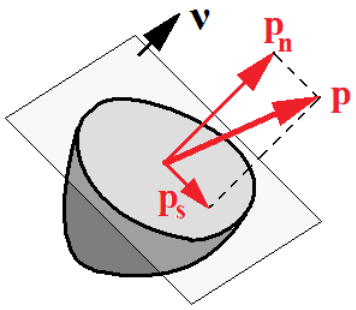
(**b** oznacza wektor sił masowych)

- Składowe tensora naprężenia mają różne wartości w zależności od przyjętego układu współrzędnych

- Składowe na przekątnej głównej tensora naprężenia $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ nazywamy **naprężeniami normalnymi** i są to naprężenia **rozciągające** (dodatnie) lub **ściskające** (ujemne) na kierunkach x_1, x_2, x_3 (x, y, z) przyjętego układu współrzędnych.

- Składowe spoza przekątnej głównej tensora naprężenia $\sigma_{12}=\sigma_{21}, \sigma_{13}=\sigma_{31}, \sigma_{23}=\sigma_{32}$ $(\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ nazywamy **naprężeniami stycznymi**, bądź **ścinającymi** w odpowiednich kierunkach leżących na wyznaczonej przez nie płaszczyźnie

- Przy cięciu płaszczyzną o dowolnej normalnej zewnętrznej danej wersorem **v**:
  - wektor naprężenia jest równy $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{p}$
  - **naprężenie** jest równe $p = |\mathbf{p}|$
  - **składowa normalna** (rozciągająca / ściskająca) wektora naprężenia jest równa $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
  - **składowa styczna** (ścinająca) wektora naprężenia jest równa $\tau_\nu = \sqrt{p^2 - \sigma_\nu^2}$



OBRÓT UKŁADU WSPÓŁRZEDNYCH

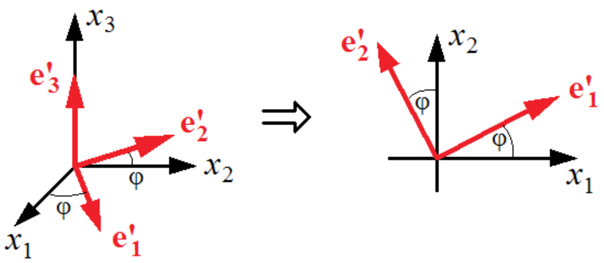
Jeśli układ współrzędnych o osiach x_1, x_2, x_3 , wyznaczonych przez wersory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, zostanie zamieniony na nowy układ współrzędnych x'_1, x'_2, x'_3 którego osie wyznaczone są przez wersory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, to postać tensora naprężenia w nowym układzie współrzędnych jest równa:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma'_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ki} A_{lj} \sigma_{kl}$$

gdzie macierz **A** nazywa się **macierzą przejścia** (**macierzą zmiany bazy**) a jej składowe są równe $A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$.

- Wiersze macierzy A, to wersory nowego układu współrzędnych wyrażone w starym układzie współrzędnych. Kolumny macierzy A to wektory starego układu współrzędnych wyrażone w nowym układzie współrzędnych.
- Suma kwadratów wyrazów leżących w jednym wierszu albo w jednej kolumnie jest równa 1. Iloczyn skalarny dowolnych dwóch wierszy (albo dowolnych dwóch kolumn) jest równy 0. Wyznacznik macierzy przejścia jest równy 1.
- UWAGA: Niekiedy macierz A jest definiowana odwrotnie niż tutaj, tj. $A_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$. Wtedy $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

W przypadku obrotu układu współrzędnych wokół jednej z jego osi (przykładowo trzeciej – analogicznie dla pozostałych) otrzymujemy:



$$\mathbf{e}_1 = [1,0,0] \qquad \mathbf{e}'_1 = [\cos\varphi, \sin\varphi, 0]$$
$$\mathbf{e}_1 = [0,1,0] \qquad \mathbf{e}'_2 = [-\sin\varphi, \cos\varphi, 0]$$
$$\mathbf{e}_1 = [0,0,1] \qquad \mathbf{e}'_3 = [0,0,1]$$

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\varphi \qquad \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \sin\varphi \qquad \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$
$$\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1 = -\sin\varphi \qquad \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\varphi \qquad \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$
$$\mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\varphi \qquad \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \qquad \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W nowym układzie współrzędnych:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma'_{xx} = \sigma_{xx}\cos^2\varphi + \sigma_{yy}\sin^2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \sigma'_{yy} = \sigma_{xx}\sin^2\varphi + \sigma_{yy}\cos^2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \sigma'_{zz} = \sigma_{zz} \\ \tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \dfrac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2}\sin 2\varphi + \cos 2\varphi\, \tau_{xy} \\ \tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \tau_{xz}\cos\varphi + \tau_{yz}\sin\varphi \\ \tau'_{yz} = \tau'_{zy} = -\tau_{xz}\sin\varphi + \tau_{yz}\cos\varphi \end{cases}$$

NAPRĘŻENIE HYDROSTATYCZNE I DEWIATOROWE

Dowolny stan naprężenia rozłożyć można na jego **aksjator** i **dewiator**:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

Naprężeniem średnim σ_m (**naprężeniem hydrostatycznym** *p* lub nie do końca ściśle **ciśnieniem**) nazywamy stan wszechstronnego równomiernego rozciągania lub ściskania. **Aksjatorem** (**częścią kulistą**) **tensora naprężenia** nazywamy tensor:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \qquad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

- Aksjator naprężenia ma postać niezmienniczą, tj. niezależną od układu współrzędnych. W dowolnym układzie współrzędnych jest on złożeniem trzech równych naprężeń normalnych.

Naprężeniem **dewiatorowym** nazywamy dopełnienie naprężenia hydrostatycznego do pełnego stanu naprężenia:

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

- Dewiator naprężenia jest kombinacją pięciu czystych ścinań w różnych płaszczyznach i w różnych kierunkach.

NIEZMIENNIKI TENSORA NAPRĘŻENIA

Niezmienniki tensora naprężenia to wielkości, których wartość nie zależy od przyjętego układu współrzędnych. **UWAGA:** W poniższych wzorach naprężenia oznaczone indeksami *x, y, z* odnoszą się do dowolnego układu współrzędnych. Wzory, w których naprężenia oznaczone są indeksami 1,...,3 odnoszą się do układu osi własnych tensora naprężenia (patrz pkt. następny).

- **Pierwszy niezmiennik tensora** $\boldsymbol{\sigma}$ – ślad (ang. *trace*) $\boldsymbol{\sigma}$, suma wyrazów na przekątnej głównej:

  $$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

  Jeśli $I_1(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ to $\boldsymbol{\sigma}$ jest **dewiatorem**.

- **Drugi niezmiennik tensora** $\boldsymbol{\sigma}$ – suma wyznaczników 2×2, z których każdy powstał przez skreślenie *i*-tej kolumny oraz *i*-tego wiersza macierzy $\boldsymbol{\sigma}$ (*i* = 1, 2, 3)*:*

  $$I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\left[[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})]^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2)\right] = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} =$$
  $$= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

- **Trzeci niezmiennik tensora** $\boldsymbol{\sigma}$ – wyznacznik $\boldsymbol{\sigma}$ (ang. *determinant*):

$$I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\overset{3}{\boldsymbol{\sigma}}) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})\operatorname{tr}(\overset{2}{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{6}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})^3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} =$$
$$= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Jeśli $I_3(\boldsymbol{\sigma})=0$ to $\boldsymbol{\sigma}$ jest **płaskim stanem naprężenia**. Jeśli ponadto $I_1(\boldsymbol{\sigma})=0$, to jest to **czyste ścinanie**.

- **Drugi niezmiennik dewiatora** $\boldsymbol{\sigma}$

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = -I_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\overset{2}{\mathbf{s}}) = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2\right]+\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2\right]$$

- **Trzeci niezmiennik dewiatora** $\boldsymbol{\sigma}$

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = I_3(\mathbf{s}) = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\overset{3}{\mathbf{s}}) = (\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m)$$

Zależności między niezmiennikami tensora i niezmiennikami jego dewiatora:

$$J_2 = -I_2+\frac{1}{3}I_1^2 \qquad J_3 = I_3 - \frac{1}{3}I_1 I_2 + \frac{2}{27}I_1^3 = I_3 + \frac{1}{3}I_1 J_2 - \frac{1}{27}I_1^3$$

- **norma tensora** – jego "długość":

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\operatorname{tr}(\overset{2}{\boldsymbol{\sigma}})} = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+2(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2} = \sqrt{|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}|^2+|\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}|^2}$$

- **naprężenie hydrostatyczne** $p = \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}}|\mathbf{A}_{\boldsymbol{\sigma}}| = \frac{1}{3}I_1$

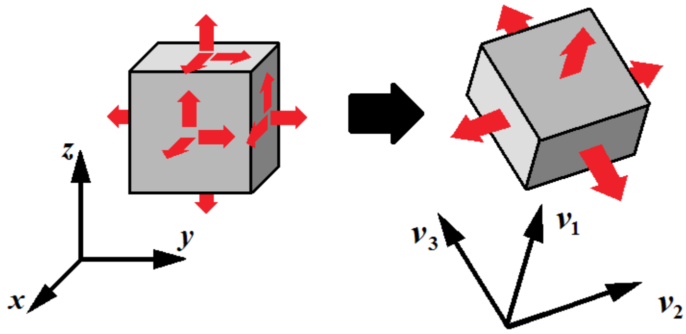
- **naprężenie dewiatorowe** $q = |\mathbf{D}_{\boldsymbol{\sigma}}| = \sqrt{2J_2}$

- **kąt Lodego** $\theta = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right]$

NAPRĘŻENIA GŁÓWNE I NAPRĘŻENIA OKTAEDRYCZNE

Dowolny stan naprężenia poprzez odpowiedni obrót układu współrzędnych można sprowadzić do postaci diagonalnej:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



tj. można znaleźć takie trzy kierunki, że dany stan naprężenia jest złożeniem jedynie trzech naprężeń normalnych w tych kierunkach, tzw. **kierunkach naprężeń głównych** (**kierunkach własnych, głównych**). Naprężenia $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tj. **wartości własne tensora** $\boldsymbol{\sigma}$ nazywamy **naprężeniami głównymi**. Oblicza się je jako rozwiązania tzw. **równania wiekowego** (**wielomianu charakterystycznego**):

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

ALGORYTM WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH

Stosując wzory Cardano na pierwiastki równania trzeciego stopnia, można wyznaczyć następujący algorytm obliczania naprężeń głównych (pierwiastków równania charakterystycznego):

Dla danego tensora naprężenia opisanego w ustalonym układzie współrzędnych wyznaczamy następujące niezmienniki:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$

$$J_3 = (\sigma_x - p)(\sigma_y - p)(\sigma_z - p) + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x - p)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - p)\tau_{xz}^2 - (\sigma_z - p)\tau_{xy}^2$$

$$\Delta = \frac{1}{4}J_3^2 - \frac{1}{27}J_2^3$$

- $\Delta < 0$ - równanie ma trzy różne pierwiastki:

  $$\sigma_{k+1} = p + \sqrt{\frac{2}{3}}\, q \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad q = \sqrt{2J_2}, \qquad \theta = \frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}, \qquad k = 0,1,2$$

- $\Delta = 0 \quad J_3 \neq 0$ - równanie ma jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedynczy:

  $$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} + p \qquad \sigma_3 = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} + p$$

- $\Delta = 0 \quad J_3 = 0$ - równanie ma jeden pierwiastek potrójny:

  $$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$$

- Sytuacja $\Delta > 0$ nie może zajść z uwagi na symetrię tensora naprężenia.

Wektor naprężenia odpowiadający *k*-temu kierunkowi własnemu jest równoległy do tego kierunku (tylko składowa normalna) i ma długość (miarę) równą odpowiedniemu naprężeniu głównemu:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v}_k = \sigma_k \mathbf{v}_k \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{\sigma}-\sigma_k \mathbf{I})\,\mathbf{v}_k=\mathbf{0} \qquad k=1,2,3$$

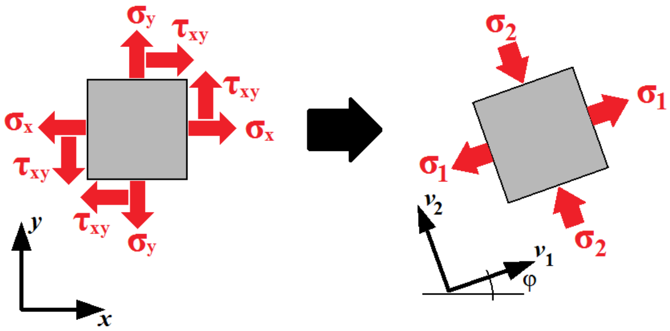
Znając wartości własne, kierunek własny odpowiadający naprężeniu głównemu σ_k można wyznaczyć:

- rozwiązując powyższy nieoznaczony układ równań liniowych. W tym celu, dla każdego σ_k, należy określić rząd *r* macierzy współczynników $(\boldsymbol{\sigma}-\sigma_k \mathbf{I})$. Następnie należy przyjąć 3-*r* niewiadomych składowych wektora $\mathbf{v}_k$ za wolne parametry i na podstawie równań układu wyznaczyć pozostałe w zależności od nich. Uzyskany wektor należy unormować.
- obliczając iloczyn wektorowy dowolnych dwóch wierszy jego macierzy współczynników. Uzyskany wektor należy unormować.

CECHY CHARAKTERYSTYCZNE WARTOŚCI I WEKTORÓW WŁASNYCH TENSORA NAPRĘŻENIA

- Wartości i wektory własne tensora symetrycznego są zawsze **rzeczywiste**
- Kierunki własne tensora symetrycznego są zawsze **wzajemnie prostopadłe**
- **Wartości własne są ekstremalnymi** (największymi lub najmniejszymi możliwymi) wartościami składowych tensora
- **Ekstremalne wartości składowych tensora spoza przekątnej głównej** $|\tau_1|=\left|\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)\right|,\ |\tau_2|=\left|\frac{1}{2}(\sigma_3-\sigma_1)\right|,\ |\tau_3|=\left|\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\right|$ występują w układach współrzędnych powstałych przez **obrócenie układu osi głównych o kąt 45° wokół jednej z osi głównych**.
- Jeśli wartość własna jest
  - **pojedynczym** pierwiastkiem równania wiekowego, to odpowiada jej tylko **jeden** kierunek własny
  - **podwójnym** pierwiastkiem równania wiekowego, to odpowiada jej n**ieskończenie wiele kierunków własnych leżących w jednej płaszczyźnie**, prostopadłej do trzeciego kierunku własnego
  - **potrójnym** pierwiastkiem równania wiekowego, to **dowolny kierunek** jest odpowiadającym jej kierunkiem własnym
- Wektor naprężenia odpowiadający płaszczyźnie cięcia, której normalna jest jednakowo nachylona do wszystkich kierunków głównych (tzw. **naprężenie oktaedryczne**)
  - ma **składową normalną** równą: $\sigma_{oct} = p$
  - ma **składową styczną** równą: $\tau_{oct} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, q$

PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA



Płaskim stanem naprężenia to stan postaci:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Naprężenia główne w płaskim stanie naprężenia są równe:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maksymalne naprężenia styczne: $$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Kąt φ między kierunkiem naprężenia maksymalnego a kierunkiem *x* pierwotnego układu współrzędnych jest równy

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1-\sigma_y} = \operatorname{arctg}\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}} \quad {}^*$$

Orientację osi głównych można wyznaczyć nawet bez wyznaczania naprężeń głównych – dana jest ona kątem zawartym między jedną z osi głównych (bez określenia czy odpowiada ona naprężeniu maksymalnemu czy minimalnemu) a osią *x*, równym:

$$\psi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

Obracając przyjęty układ współrzędnych o dowolny kąt ϕ otrzymujemy:

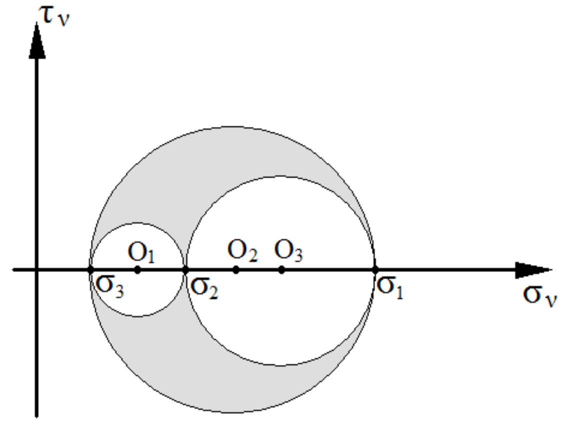
$$\begin{cases} \sigma'_{xx} = \sigma_{xx}\cos^2\phi + \sigma_{yy}\sin^2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi \\ \sigma'_{yy} = \sigma_{xx}\sin^2\phi + \sigma_{yy}\cos^2\phi - \tau_{xy}\sin 2\phi \\ \tau'_{xy} = \dfrac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2}\sin 2\phi + \cos 2\phi\,\tau_{xy} \end{cases}$$

W przypadku płaskim układ równań równowagi Naviera redukuje się do poniższej postaci:

* Używając funkcji arctg(x) należy pamiętać, iż z reguły jej wartość zwracana jest w radianach, a nie w stopniach. Trzeba też pamiętać, ze funkcja ta może przyjmować wartości jedynie z przedziału (-90° ; 90°) wskazując kierunek, ale nie wskazując zwrotu – w sytuacji, kiedy zwrot jest istotny (np. wyznaczanie orientacji wielkości wektorowej) do zwróconego wyniku należy dodać lub odjąć 180°, w zależności od wymagań rozwiązania.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_2 = 0 \end{cases}$$

KOŁA MOHRA



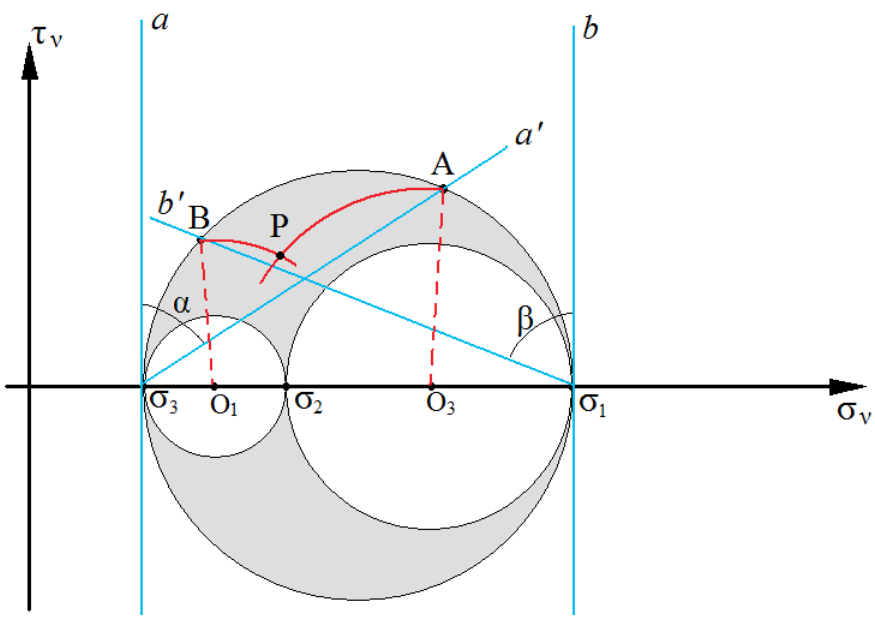
Rysunek obok przedstawia tzw. **koła Mohra**, gdzie $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ to naprężenia główne zaś

$$O_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \quad O_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad O_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

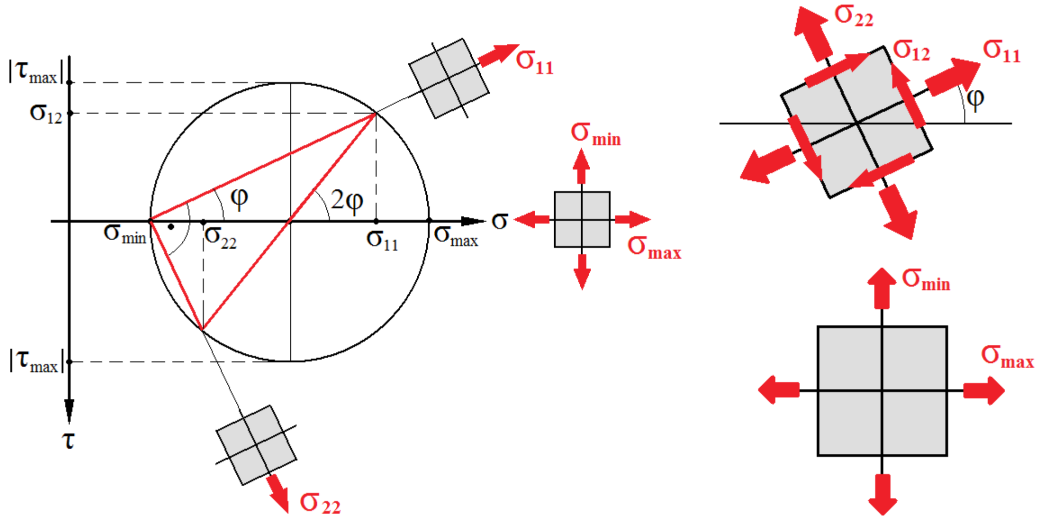
Zacieniowany obszar oznacza zbiór możliwych kombinacji składowej normalnej σ_ν i składowej stycznej τ_ν przy cięciu płaszczyzną o normalnej zewnętrznej danej wersorem $\boldsymbol{\nu}$.

Aby wyznaczyć składową normalną i styczną przy cięciu płaszczyzną o normalnej $\boldsymbol{\nu}$, która jest nachylona do kierunku minimalnego naprężenia głównego σ_3 pod kątem α zaś do kierunku maksymalnego naprężenia głównego σ_1 pod kątem β należy:

- Narysować proste a i b prostopadłe do osi σ_ν przechodzące odpowiednio przez punkty σ_3 i σ_1
- Narysować prostą *a'* pod kątem α (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) do prostej *a* i znaleźć punkt A jej przecięcia z największym z kół
- Narysować prostą *b'* pod kątem β (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) do prostej *b* i znaleźć punkt B jej przecięcia z największym z kół
- Zakreślamy łuk z pkt. O_1 o promieniu $O_1 B$ oraz łuk z pkt. O_3 o promieniu $O_1 A$ - współrzędne (σ_ν, τ_ν) punktu *P* przecięcia się tych łuków są rozwiązaniem zadania



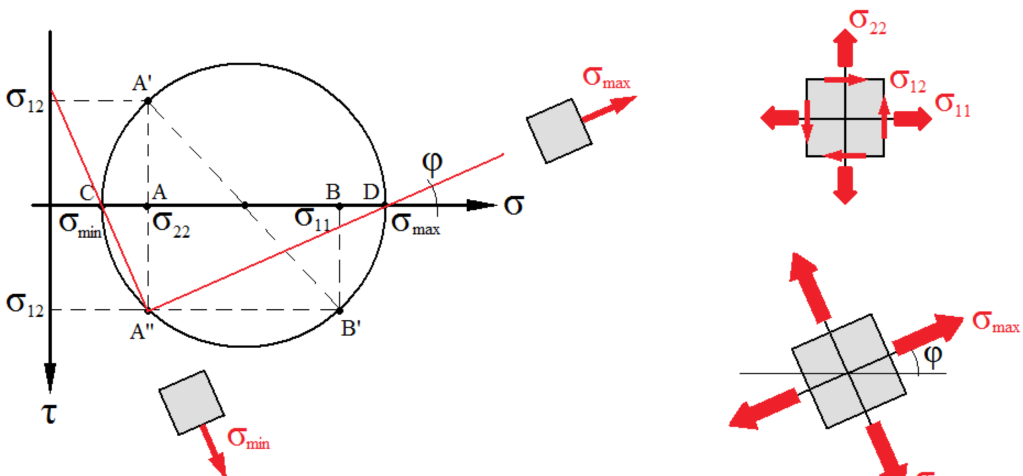
W przypadku zagadnienia płaskiego, gdy $\sigma_2=0$ wystarczy nakreślić tylko największe z kół Mohra. Naprężenie normalne i styczne przy obrocie układu współrzędnych o kąt ϕ względem układu osi głównych można wyznaczyć kreśląc prostą pod kątem 2ϕ do osi poziomej ze środka koła (względnie pod kątem ϕ z lewego punktu skrajnego odpowiadającego minimalnemu naprężeniu głównemu:



Na podstawie powyższej konstrukcji (względnie na drodze przekształceń trygonometrycznych w ogólnych wzorach transformacyjnych), składowe naprężenia w układzie obróconym o dany kąt φ względem osi głównych płaskiego tensora naprężenia wyrażają się przez naprężenia główne w następujący sposób:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{max}+\sigma_{min}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)\cdot\cos 2\varphi \\ \sigma_{22} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{max}+\sigma_{min}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)\cdot\cos 2\varphi \\ \sigma_{12} = -\dfrac{1}{2}\left(\sigma_{max}-\sigma_{min}\right)\cdot\sin 2\varphi \end{cases}$$

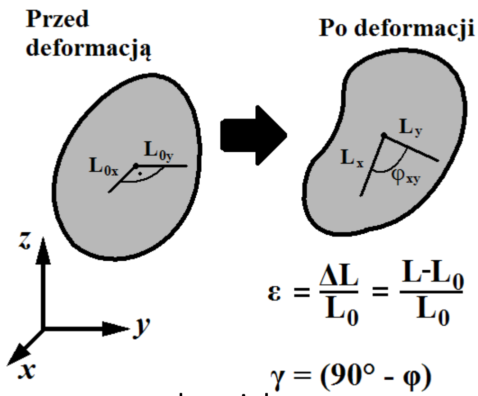
Dla zadanych składowych tensora naprężenia w pewnym układzie współrzędnych $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, można przy pomocy koła Mohra wyznaczyć naprężenia główne i ich kierunki - na osi poziomej zaznaczamy miary naprężeń normalnych (punkty A, B) a następnie na prostych pionowych przechodzących przez te punkty odznaczamy miary naprężeń stycznych (A', B'). Z punktu S w środku odcinka AB kreślimy okrąg przechodzący przez A' i B' - jego punkty przecięcia C, D z osią poziomą to wartości naprężeń głównych, zaś proste CA'' i A''D wyznaczają kierunki naprężeń głównych.



STAN ODKSZTAŁCENIA

Wielkością opisującą miarę deformacji ciała jest **tensor odkształcenia**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$



lub w tzw. „notacji inżynierskiej”

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \text{sym} & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

- Składowe tensora naprężenia są funkcjami rozpatrywanego punktu ciała.
- Składowe na przekątnej głównej tensora odkształcenia nazywamy **odkształceniami liniowymi** i są one miarą **wydłużenia względnego** nieskończenie małego włókna materialnego. Wydłużenie na dowolnym kierunku danym wersorem **n** jest równe: $\varepsilon_n = (\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}$
- Składowe spoza przekątnej głównej tensora odkształcenia nazywamy o**dkształceniami postaciowymi** (**kątowymi**) i są one miarą **zmiany kąta** między dwoma pierwotnie prostopadłymi włóknami. Zmiana ta, dla dwóch dowolnych kierunków danych wersorami **n** i **m** jest równa $\gamma_{mn} = 2(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{m} = 2(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{m})\cdot\mathbf{n}$

ODKSZTAŁCENIA GŁÓWNE , AKSJATOR I DEWIATOR ODKSZTAŁCENIA

Wszystkie zasady i twierdzenia dotyczące wyznaczania wektorów i wartości własnych dla tensora naprężenia dotyczą także tensora odkształcenia. Dowolny stan odkształcenia rozłożyć można na jego **aksjator** i **dewiator**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}_{\varepsilon} + \mathbf{D}_{\varepsilon}$$

Dylatancją $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ (**odkształceniem objętościowym**) nazywamy stan wszechstronnej, równomiernej zmiany wszystkich wymiarów. **Odkształceniem średnim** nazywamy $\varepsilon_m = 1/3\ \theta$. **Aksjatorem** (**częścią kulistą**) **tensora odkształcenia** nazywamy tensor:

$$\mathbf{A}_{\varepsilon} = \varepsilon_m \mathbf{I} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

- <u>Aksjator odkształcenia ma postać niezmienniczą, niezależną od układu współrzędnych.</u>

Dewiator odkształcenia:

$$\mathbf{D}_{\varepsilon} = \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_m & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_m & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

- <u>Dewiator odkształcenia jest kombinacją pięciu odkształceń postaciowych w różnych płaszczyznach.</u>

MIARA ODKSZTAŁCENIA

Powyższą definicję odkształcenia liniowego (względny przyrost długości) można uogólnić:

$$\varepsilon = \frac{1}{2n}\left(\lambda^{2n}-1\right) \qquad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{L}{L_0} = \frac{L_0+\Delta L}{L_0}$$

Dla różnych *n* otrzymujemy wtedy odmienne definicje odkształcenia:

- $n=-1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \dfrac{L^2-L_0^2}{2L^2}$ - miara Almansiego (Lagrange'a)
- $n=0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \ln\dfrac{L}{L_0}$ - miara logarytmiczna
- $n=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \dfrac{L-L_0}{L_0} = \dfrac{\Delta L}{L_0}$ - miara Cauchy'ego
- $n=1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \dfrac{L^2-L_0^2}{2L_0^2}$ - miara Greena (Eulera)

ZWIĄZKI GEOMTRYCZNE

Odkształcenia są miarą względnych przemieszczeń punktów materialnych ciała względem siebie. W ogólnym przypadku dowolna składowa tensora dokształcenia może być wyrażona poprzez pochodne wektora przemieszczenia w następujący sposób:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]$$

Przy założeniu że **odkształcenia są małe**, można pominąć nieliniowy człon w powyższym wyrażeniu, dzięki czemu uzyskujemy następujące związki (tzw. r**ównania geometryczne Cauchy'ego**):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{31} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} & \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

Powyższy układ równań różniczkowych jest układem sześciu równań na trzy niewiadome składowe wektora przemieszczenia – jest to układ równań niejednorodnych, tj. z wyrazami wolnymi (funkcjami opisującymi składowe tensora odkształcenia) różnymi od zera. Taki układ nie dla każdych odkształceń może mieć rozwiązanie – składowe tensora odkształcenia muszą spełniać tzw. **warunki nierozdzielności**:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad , \quad && \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \quad , \quad && \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad , \quad && \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned}
$$

<u>UOGÓLNIONE PRAWO HOOKE'A</u>

Uogólnione prawo Hooke'a zakłada liniowy związek między składowymi tensora naprężenia i odkształcenia – dowolna składowa jednego jest liniową kombinacją składowych drugiego. Można to zapisać w następującej formie:

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1131} & S_{1112}\\
S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2231} & S_{2212}\\
S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3331} & S_{3312}\\
S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2331} & S_{2312}\\
S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3123} & S_{3131} & S_{3112}\\
S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1231} & S_{1212}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}
$$

Macierz S_{ijkl} jest reprezentacją symetrycznego tensora czwartego rzędu **S** zwanego **tensorem sztywności**. Jego odwrotność to **tensor podatności C**. Charakteryzują się symetriami:

$$S_{ijkl}=S_{jikl}=S_{ijlk}=S_{klij} \qquad i,j,k,l=1,2,3$$

W przypadku izotropii prawo Hooke'a można zapisać w postaci:

$$
\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\
\lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\
\lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}
$$

gdzie λ to **pierwszy parametr Lamego**, zaś μ to **drugi parametr Lamego.** Odpowiada to układowi równań:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_{11}=(2\mu+\lambda)\varepsilon_{11}+\lambda(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) \qquad && \tau_{23}=2\mu\varepsilon_{23}\\
&\sigma_{22}=(2\mu+\lambda)\varepsilon_{22}+\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{33}) \qquad && \tau_{13}=2\mu\varepsilon_{13}\\
&\sigma_{33}=(2\mu+\lambda)\varepsilon_{33}+\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \qquad && \tau_{12}=2\mu\varepsilon_{12}
\end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad i,j=1,2,3
$$

ykorzystując tensor podatności, można napisać:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}$$

gdzie E to **moduł sztywności podłużnej Younga**, G to **moduł sztywności poprzecznej Kirchhoffa**, zaś ν to **współczynnik Poissona**. Odpowiada to układowi równań:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{1}{E}\left[\sigma_{11}-\nu\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)\right] & \tau_{23}&=\frac{1}{2G}\varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{22}&=\frac{1}{E}\left[\sigma_{22}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{33}\right)\right] & \tau_{13}&=\frac{1}{2G}\varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{33}&=\frac{1}{E}\left[\sigma_{33}-\nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\right] & \tau_{12}&=\frac{1}{2G}\varepsilon_{12}\end{aligned}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left[\left(1+\nu\right)\sigma_{ij}-\nu\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]\quad i,j=1,2,3$$

Obydwa powyższe sformułowania są równoważne układowi dwóch praw:

- **prawo zmiany objętości** $\mathbf{A}_{\sigma}=3K\,\mathbf{A}_{\varepsilon}\quad\Leftrightarrow\quad p=K\theta$
- **prawo zmiany postaci** $\mathbf{D}_{\sigma}=2G\,\mathbf{D}_{\varepsilon}$

gdzie K to **moduł sztywności objętościowej Helmholtza**.

Zależności między stałymi sprężystymi – tylko dwie spośród poniższych wielkości są niezależne:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}\qquad \lambda=\nu\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\qquad \mu=G\qquad K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$