

08.1 Rozciąganie i ściskanie

Podstawą dla opisu rozciągania i ściskania prętów będzie rozwiązanie następującego zagadnienia:

- **ELEMENT I MATERIAŁ:**

- Dany jest nieważki, pryzmatyczny pręt prosty o długości L .
- Pręt wykonany jest z jednorodnego, izotropowego materiału liniowo sprężystego (materiału Hooke'a).

- **OBCIĄŻENIE:**

- Pręt obciążony jest na obydwu ściankach poprzecznych (w przekrojach $x=L$ i $x=0$) równomiernym obciążeniem ciągłym o gęstości q , normalnym (prostopadłym) do tych ścianek, redukującym się do wypadkowych zgodnych z normalną zewnętrzną powierzchnią przyłożenia obciążenia.

$$\text{-ścianka początkowa: } \mathbf{v} = [-1; 0; 0]^T \quad \mathbf{q}(0, y, z) = [-q; 0; 0]^T$$

$$\text{-ścianka końcowa: } \mathbf{v} = [1; 0; 0]^T \quad \mathbf{q}(L, y, z) = [q; 0; 0]^T$$

- Pręt jest nieobciążony na swojej powierzchni bocznej.

$$\mathbf{v} = [0; v_y; v_z]^T \quad \mathbf{q} = [0; 0; 0]^T$$

- **PODPARCIE:**

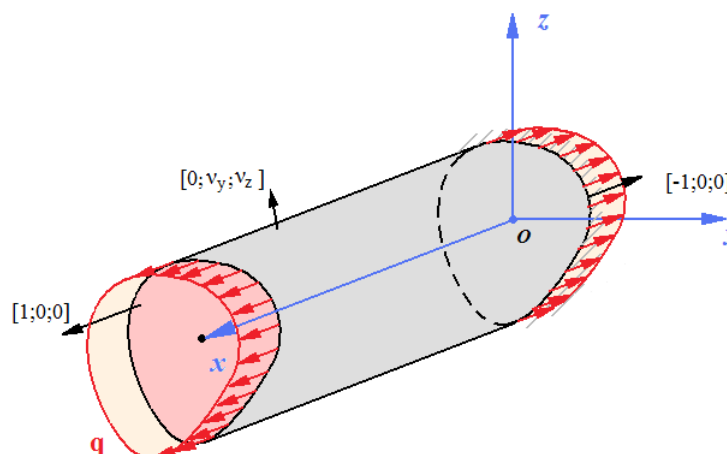
- Środek ciężkości ścianki poprzecznej pręta w przekroju $x=0$, tj. punkt $O(0; 0; 0)$ jest utwierdzony, tj. nie może doznać żadnych przemieszczeń i żadnych obrotów.

$$\text{-brak przemieszczenia: } \mathbf{u}(0, 0, 0) = [u_x; u_y; u_z]^T = [0; 0; 0]^T$$

$$\text{-brak obrotu wokół osi } x, y, z: \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_0 = 0$$

- Pozostałe punkty przekroju $x=0$ podparte są w ten sposób, że nie mogą doznawać przemieszczeń na kierunku osi pręta, ale mogą swobodnie przemieszczać się w płaszczyźnie tego przekroju

$$u_x(0, y, z) = 0$$



Zagadnienie powyższe nazywamy zagadnieniem **czystego rozciągania**. Rozwiązanie tego zagadnienia, na mocy zasady Saint-Venanta, będzie mogło również posłużyć do opisu innych przypadków, w których obciążenie zewnętrzne redukuje się do dwóch wypadkowych przyłożonych do ścianek poprzecznych pręta, zgodnych z ich normalnymi zewnętrznymi.

Zadanie rozwiązuje się tzw. **metodą półdwrotną, podejściem statycznym**. Rozwiązanie to ma następujący schemat:

1. Przyjąć rozkład naprężeń w pręcie, spełniający równania równowagi Naviera, statyczne (obciążeniowe) warunki brzegowe i równoważny w każdym przekroju układowi sił zewnętrznych przyłożonych do myślowo odciętej części ciała.
2. Dla założonych naprężeń wyznaczyć odkształcenia na podstawie równań uogólnionego prawa Hooke'a.
3. Sprawdzić czy wyznaczone odkształcenia spełniają warunki nierozdzielności.
4. Dla obliczonych odkształceń wyznaczyć przemieszczenia na podstawie równań geometrycznych Cauchy'ego.
5. Sprawdzić czy wyznaczone przemieszczenia spełniają kinematyczne (podporowe) warunki brzegowe.

Jeżeli przyopuszczone rozwiązanie spełniać będzie wszystkie równania i warunki, to – ponieważ dowodzi się jednoznaczności rozwiązań zagadnień liniowej teorii sprężystości – będzie ono właśnie tym jedynym, poszukiwanym rozwiązaniem.

1. Przyopuszczenie rozkładu naprężeń

Uzasadnione wydaje się przypuszczenie, że równomiernie rozłożone obciążenie ciągłe, będące w istocie gęstością sił na jednostkę powierzchni (o wymiarze Pa), powodować będzie wewnątrz pręta właśnie równomierny rozkład naprężeń normalnych na kierunku osi pręta. Brak obciążenia poprzecznego i swoboda deformacji w kierunkach poprzecznych do osi pręta sugeruje, że pozostałe składowe tensora naprężenia będą równe 0. Przyjmujemy zatem:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić należy czy taki rozkład naprężeń spełnia statyczne (obciążeniowe) warunki brzegowe $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{q}$.

Dla ścianek poprzecznych - początkowej (wzory ze znakiem „-”) i końcowej („+”):

- wektor obciążenia $\mathbf{q} = [\pm q ; 0 ; 0]^T$
- normalna zewnętrzna $\mathbf{v} = [\pm 1 ; 0 ; 0]^T$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Dla poboczniczy:

- wektor obciążenia $\mathbf{q} = [0 ; 0 ; 0]^T$
- normalna zewnętrzna $\mathbf{v} = [0 ; v_y ; v_z]^T$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Widać zatem, że założony rozkład naprężeń spełnia wszystkie statyczne warunki brzegowe. Łatwo sprawdzić również, że spełnione są równania równowagi Naviera:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ponieważ naprężenia $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ opisane są tymi samymi funkcjami co składowe obciążenia q_x, q_y, q_z , stąd oczywista jest równoważność układu sił przekrojowych w dowolnym przekroju pręta z układem sił zewnętrznych przyłożonych do jego odciętej części.

$$\begin{aligned} F_x(W_I) &= \iint_A \sigma_{xx} dA = \iint_A q_x dA = F_x(Z_{II}) & M_x(W_I) &= \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = \iint_A (q_z y - q_y z) dA = M_x(Z_{II}) \\ F_y(W_I) &= \iint_A \tau_{xy} dA = \iint_A q_y dA = F_y(Z_{II}) & M_y(W_I) &= \iint_A \sigma_{xx} z dA = \iint_A q_x z dA = M_y(Z_{II}) \\ F_z(W_I) &= \iint_A \tau_{xz} dA = \iint_A q_z dA = F_z(Z_{II}) & M_z(W_I) &= \iint_A (-\sigma_{xx} y) dA = \iint_A (-q_x y) dA = M_z(Z_{II}) \end{aligned}$$

Pokażemy, że dane obciążenie redukuje się do wypadkowej na kierunku x :

$$\begin{aligned} F_x &= \iint_A q_x dA = \iint_A q dA = q \underbrace{\iint_A dA}_A = q A \\ F_y &= \iint_A q_y dA = \iint_A 0 dA = 0 \\ F_z &= \iint_A q_z dA = \iint_A 0 dA = 0 \\ M_x &= \iint_A (q_z y - q_y z) dA = \iint_A 0 dA = 0 \\ M_y &= \iint_A q_x z dA = \iint_A q z dA = q \underbrace{\iint_A z dA}_{S_y=0} = 0 \\ M_z &= \iint_A (-q_x y) dA = -\iint_A q y dA = q \underbrace{\iint_A y dA}_{S_y=0} = 0 \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach skorzystaliśmy z faktu, że rozpatrywany układ współrzędnych jest układem głównych centralnych osi bezwładności, w którym zarówno momenty statyczne, jak i moment dewiacji są równe 0.

2. Wyznaczenie odkształceń

Na podstawie równań fizycznych prawa Hooke'a wyznaczamy odkształcenia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{2G} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \cdot q & \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E} \cdot q & \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} \cdot q \\ \varepsilon_{yz} &= 0 & \varepsilon_{zx} &= 0 & \varepsilon_{xy} &= 0\end{aligned}}$$

3. Sprawdzenie warunków nierozdzielności

Warunki nierozdzielności:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} & , & & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} & , & & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & , & & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Ponieważ odkształcenia mają stały rozkład w przestrzeni, a w równaniach powyższych występują jedynie ich pochodne, stąd spełnione są one w sposób tożsamościowy.

4. Wyznaczenie przemieszczeń

Składowe wektora przemieszczenia są rozwiązaniem układu równań geometrycznych Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} & \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} & \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yz} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \varepsilon_{zx} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy} \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego niejednorodnego układu liniowych, cząstkowych równań różniczkowych pierwszego rzędu będzie sumą rozwiązania ogólnego układu jednorodnego (z zerowymi prawymi stronami) oraz dowolnego szczególnego rozwiązania układu niejednorodnego. Wyznamy je kolejno.

Rozwiązanie ogólne układu jednorodnego:

Poszukujemy ogólnego rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

Interpretacja fizyczna poszukiwanego rozwiązania jest następująca: poszukujemy najogólniejszej funkcji opisującej przemieszczenia wszystkich punktów pewnego ciała, w którym wszystkie odkształcenia są równe 0. Zerowanie się odkształceń oznacza, że ciało nie uległo deformacji a zatem poszukiwane przemieszczenie jest ruchem bryły sztywnej. Z kinematyki ciała sztywnego wiadomo, że przemieszczenie w dowolnej chwili jest złożeniem sztywnego przesunięcia (translacji) i sztywnego obrotu wokół chwilowego środka obrotu. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= [t_x ; t_y ; t_z] \text{ - nieznanany wektor sztywnego przesunięcia} \\ \mathbf{x}_o &= [x_o ; y_o ; z_o] \text{ - wektor wodzący chwilowego środka obrotu} \\ \boldsymbol{\omega} &= [\omega_x ; \omega_y ; \omega_z] \text{ - wektor równoległy do osi obrotu} \end{aligned}$$

Współrzędne wszystkich powyższych wielkości mogą być dowolne – wyznaczymy je później na podstawie warunków podporowych. Najogólniejsza funkcja opisująca przemieszczenie dowolnego punktu bryły sztywnej, opisanego wektorem wodzącym $\mathbf{x} = [x ; y ; z]$ ma zatem postać:

$$\mathbf{u}_{og} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \Rightarrow \begin{cases} u_{x,og} = t_x + \omega_y(z - z_o) - \omega_z(y - y_o) \\ u_{y,og} = t_y + \omega_z(x - x_o) - \omega_x(z - z_o) \\ u_{z,og} = t_z + \omega_x(y - y_o) - \omega_y(x - x_o) \end{cases}$$

Wynik powyższy można przepisać w ogólniejszej matematycznie postaci:

$$\begin{cases} u_{x,og}(x, y, z) = a - d y + e z \\ u_{y,og}(x, y, z) = b - f z + d x \\ u_{z,og}(x, y, z) = c - e x + f y \end{cases}$$

Gdzie

$$\begin{aligned} a &= t_x - \omega_y z_o + \omega_z y_o & d &= \omega_z \\ b &= t_y - \omega_z x_o + \omega_x z_o & e &= \omega_y \\ c &= t_z - \omega_x y_o + \omega_y x_o & f &= \omega_x \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne układu niejednorodnego:

Poszukujemy ogólnego rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot q & \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\nu}{E} \cdot q & \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} \cdot q \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań łatwo znaleźć całkując pierwsze trzy równania i przyjmując, że składnik niezależny od zmiennej względem której przebiega całkowanie jest równy 0:

$$\boxed{u_{x,sz} = \frac{q}{E} x \quad u_{y,sz} = -\frac{\nu q}{E} y \quad u_{z,sz} = -\frac{\nu q}{E} z}$$

Łatwo zauważyć, że tak określone funkcje spełniają również trzy pozostałe równania. Jest to zatem pewne rozwiązanie szczególne. Rozkład przemieszczeń, będący rozwiązaniem

niejednorodnego układu równań Cauchy'ego jest zatem dany funkcjami:

$$\begin{cases} u_x = u_{x,og} + u_{x,sz} = \frac{q}{E}x + a - d y + e z \\ u_y = u_{y,og} + u_{y,sz} = -\frac{\nu q}{E}y + b - f z + d x \\ u_z = u_{z,og} + u_{z,sz} = -\frac{\nu q}{E}z + c - e x + f y \end{cases}$$

5. Sprawdzenie warunków podporowych

Warunek braku przemieszczeń punktu $O(0,0,0)$ daje:

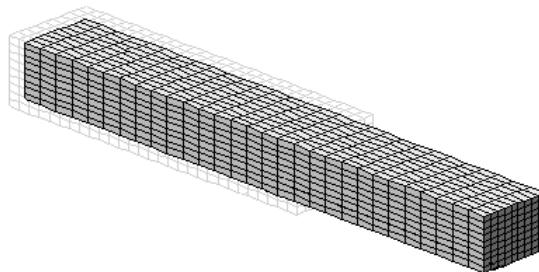
$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = a=0 \\ u_y(0,0,0) = b=0 \\ u_z(0,0,0) = c=0 \end{cases}$$

Warunek braku obrotów wokół osi y i z w punkcie $O(0,0,0)$ daje:

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_{(0,0,0)} = f=0 \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} = d=0 \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} = -e=0$$

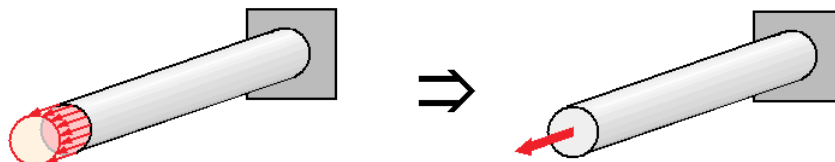
Wobec powyższych zależności, spełniony jest także warunek braku przemieszczeń na kierunku osi x w przekroju $x=0$. Ostatecznie więc rozkład przemieszczeń dany jest funkcjami:

$$u_x = \frac{q}{E}x \quad u_y = -\frac{\nu q}{E}y \quad u_z = -\frac{\nu q}{E}z$$



Przyjęte rozwiązanie spełnia wszystkie równania i warunki brzegowe, jest zatem ścisłym rozwiązaniem zagadnienia czystego rozciągania.

Zgodnie z zasadą Saint-Venanta, rozwiązanie zagadnienia rozciągania czystego można zastosować z dobrym przybliżeniem dla jakiegokolwiek przypadku, w którym pręt obciążony jest na ściankach poprzecznych układem sił redukującym się w ich środku ciężkości do wypadkowej równoległej do osi pręta. Takie zagadnienia nazywamy **rozciąganiem prostym**.



Powyższe rozwiązanie stosuje się również dla prętów o przekroju i obciążeniu rozciągającym zmiennym na długości. Należy przy tym mieć jednak świadomość, że stosowane rozwiązanie ma w takim przypadku jedynie charakter przybliżony – szczególnie dotyczy to obszarów bliskich skokowej zmiany geometrii lub obciążenia, w których z reguły występuje koncentracja naprężeń.

PODSUMOWANIE ROZWIĄZANIA:

Wykorzystując zależność między wypadkową siłą osiową a naprężeniem normalnym, przemieszczenie, odkształcenie i naprężenie można wyrazić w następujący sposób:

Tensor naprężenia:	Tensor odkształcenia:
$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma = \frac{P}{A} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = [\text{MPa}]$	$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \sigma \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ & -\sigma \frac{\nu}{E} & 0 \\ \text{sym} & & -\sigma \frac{\nu}{E} \end{bmatrix}$

gdzie:

E – moduł Younga (moduł sztywności podłużnej) [Pa]

ν – współczynnik Poissona [-]

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta [m^2]

Moduł Younga jest miarą sztywności materiału na obciążenia normalne (rozciągające lub ściskające). Współczynnik Poissona określa, jaki jest stosunek odkształceń poprzecznych do kierunku obciążenia (zwięźnienie próbki przy rozciąganiu) do odkształceń na kierunku obciążenia.

$$E = \frac{\Delta \sigma_{xx}}{\Delta \epsilon_{xx}} \quad \nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}$$

W powyższych wzorach odkształcenia określone są w stanie obciążenia jednoosiowego. W zakresie sprężystym powyższe parametry materiałowe mają niezmienną wartość.

Z podstawowych związków geometrycznych otrzymujemy:

$$\epsilon_{xx}(x) = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \int_0^x \epsilon_{xx}(x) dx + C$$

$u(x)$ – przemieszczenie punku o współrzędnej x wzdłuż osi x

Stałą całkowania C wyznacza się z warunków brzegowych (podporowych). W przypadku, gdy rozkład siły osiowej jest przedziałami stały, oraz gdy sztywność pręta (w szczególności jego pole przekroju) jest przedziałami stała, wtedy całkowite jego wydłużenie (przy znanym rozkładzie siły osiowej) jest równe:

$$u(x) = \int_0^L \epsilon_{xx}(x) dx = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i}{EA_i}$$

gdzie N_i, EA_i, L_i oznaczają odpowiednio siłę osiową i sztywność na rozciąganie na i -tym przedziale oraz długość i -tego spośród n przedziałów.

08.2 Statyczna próba rozciągania

Charakterystykę związków fizycznych (zależności między naprężeniem i odkształceniem) dla danego materiału określa się na podstawie przebiegu doświadczenia np. próby jednoosiowego rozciągania i obrazuje za pomocą stosownego wykresu. Wyróżniamy trzy rodzaje takich wykresów:

- **Wykres maszynowy** ($F-\Delta L$) – będący obrazem wyników zarejestrowanych bezpośrednio przez układ pomiarowy maszyny. Jest to zależność między **przyłożoną siłą** a **przemieszczeniem**. W niektórych wypadkach początkowa część wykresu maszynowego obarczona jest błędem wynikającym ze sprężystej deformacji samej maszyny.
- **Wykres inżynierski** ($\sigma-\varepsilon$) – zależność między **naprężeniem nominalnym** (inżynierskim) a **odkształceniem** (inżynierskim).

- **Naprężenie nominalne** – *aktualna* siła obciążająca odniesiona do *początkowego* pola powierzchni przekroju poprzecznego rozciąganego pręta:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

- **Odkształcenie inżynierskie** – wydłużenie względne próbki $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$.

- **Krzywa rzeczywista** ($\tilde{\sigma}-\tilde{\varepsilon}$) – zależność między **naprężeniem rzeczywistym** a **odkształceniem rzeczywistym**.

- **Naprężenie rzeczywiste** – *aktualna* siła obciążająca odniesiona do *aktualnego* pola powierzchni przekroju poprzecznego rozciąganego pręta.

- Odkształcenie rzeczywiste można obliczyć jako sumę kolejnych niewielkich wydłużeń względnych przy czym za każdym razem trzeba wziąć aktualną długość porównawczą:

$$\tilde{\varepsilon} = \sum_i \frac{\Delta L_i}{L_i}$$

- Na podstawie założenia o braku zmiany objętości pręta w procesie deformacji:

$$V = const. \Rightarrow A_0 \cdot L_0 = A \cdot L ,$$

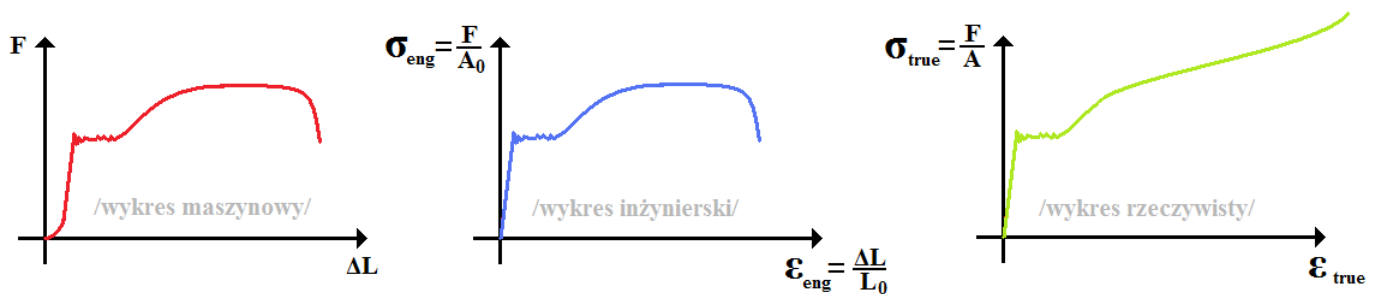
skąd otrzymujemy następujące zależności między rzeczywistymi naprężeniami i odkształceniami a inżynierskimi naprężeniami i odkształceniami:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{A} = \frac{FL}{A_0 L_0} = \frac{F}{A_0} \frac{(L_0 + \Delta L)}{L_0} = \sigma \cdot (1 + \varepsilon)$$
$$\tilde{\varepsilon} = \lim_{\Delta L_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta L_i}{L_i} = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(1 + \varepsilon) = \ln \frac{A_0}{A}$$

Wzory $\tilde{\sigma} = \sigma(1 + \varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon)$ tracą swoją ważność po pojawieniu się szyjki.

Naprężenie i odkształcenia rzeczywiste są większe od inżynierskich. Odkształcenie inżynierskie, zdefiniowane jako względne wydłużenie całej próbki, jest odkształceniem uśrednionym po całej długości próbki. Rzeczywiste odkształcenie w obszarze przewężenia próbki jest dużo większe. Podobnie, naprężenie nominalne odnoszone jest stale do początkowego pola powierzchni, stąd w wykresie inżynierskim obserwuje się pozorny spadek poziomu naprężeń, po osiągnięciu wartości R_m – tak naprawdę maleje tylko siła obciążająca. W obszarze zniszczenia próbka znacząco się zwęża (powstaje tzw. „szyjka”) i rzeczywiste pole jest dużo mniejsze, a co za tym idzie, naprężenie rzeczywiste jest dużo większe od nominalnego.

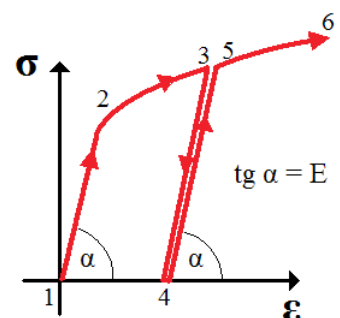
Porównanie różnych wykresów dla tego samego doświadczenia:



Stan mechaniczny

Dla większości materiałów można wyróżnić dwa zakresy, czy też stany mechaniczne ich pracy:

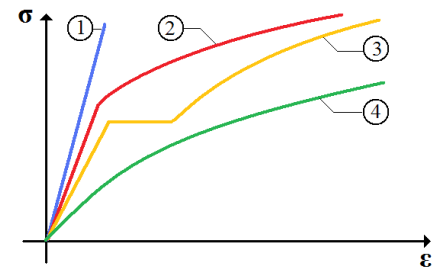
- **zakres sprężysty** – zakres odkształceń odwracalnych. Po odjęciu obciążenia ciało powraca do swojej pierwotnej postaci. W szczególności wyróżnić w nim można zakres, w którym naprężenie jest wprost proporcjonalne do odkształcenia – tj. obowiązuje prawo Hooke'a. Tę część zakresu sprężystego nazywa się **zakresem liniowo-sprężystym**, bądź **zakresem stosowalności prawa Hooke'a**. Tangens kąta nachylenia liniowej części krzywej σ - ϵ do osi poziomej jest równa modułowi Younga E .
- **zakres plastyczny** – zakres odkształceń trwałych, pozostających nawet po odciążeniu materiału, występujący po przekroczeniu pewnego poziomu naprężeń, nazywanego granicą plastyczności. Dla wielu materiałów można przyjąć, że proces odciążenia w zakresie plastycznym jest liniowy, podobnie jak proces ponownego obciążenia aż do poziomu uprzednio osiągniętego naprężenia.



Typowe przebiegi σ - ϵ dla różnych rodzajów materiałów

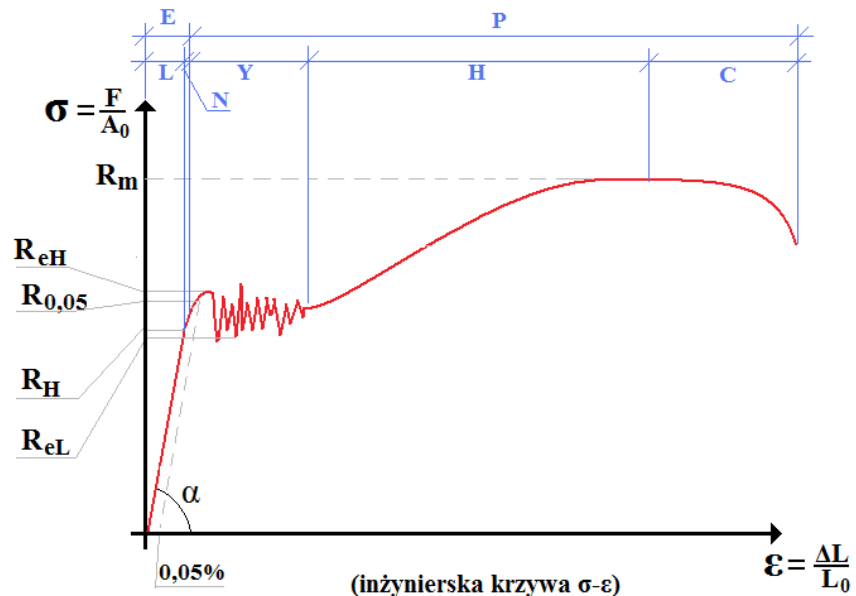
1 – **materiały kruche** – charakterystyka liniowa, brak odkształceń plastycznych (trwałych). /np.: skały, ceramika, żeliwo/

2, 3 – **materiały ciągliwe, sprężysto-plastyczne** – wyróżnia się zakres liniowo-sprężysty (odkształceń odwracalnych) i zakres plastyczny (odkształceń trwałych), nieliniowy. W zakresie plastycznym może występować obszar płynięcia plastycznego (gwałtowny przyrost odkształcenia, bez istotnego przyrostu naprężenia). /np.: stal/



4 – **materiały nieliniowe** – brak obszaru liniowej zależności σ - ϵ , brak wyraźnie zarysowanego zakresu sprężystego i plastycznego. /np.: polimery, guma/

Charakterystyka materiałów ciągliwych



E – **zakres sprężysty** - zakres odkształceń odwracalnych.

L – **zakres liniowo-sprężysty** - zakres stosowalności prawa Hooke'a, proporcjonalności między naprężeniem i odkształceniem, $\tan \alpha = E$.

N – **zakres nieliniowo-sprężysty** - brak proporcjonalności między naprężeniem i odkształceniem, odkształcenia trwałe pomijalnie małe.

P – **zakres plastyczny** - zakres występowania odkształceń trwałych.

Y – **płynięcie plastyczne** - gwałtowny przyrost trwałych odkształceń bez istotnego wzrostu naprężeń.

H – **wzmocnienie** - zwiększanie poziomu naprężenia przy wzrastającym odkształceniu trwałym

C – **przewężenie** - silna redukcja przekroju poprzecznego próbki, przyrost odkształcenia trwałego przy coraz mniejszej sile (coraz mniejszym naprężeniu nominalnym - naprężenia rzeczywiste w ogólności nadal mogą rosnąć)

Graniczne wartości naprężeń

Granica proporcjonalności R_H

- Po jej przekroczeniu przestaje obowiązywać prawo Hooke'a i kończy się zakres liniowo-sprężysty. Po przekroczeniu tej wartości naprężenia występuje nieliniowy związek między naprężeniem i odkształceniem, jednak w dalszym ciągu odkształcenia trwale mogą być na tyle małe, iż traktuje się materiał jako pracujący w zakresie sprężystym.

Umowna granica plastyczności $R_{0,05}$

- W sytuacji, gdy przejście z zakresu sprężystego w zakres plastyczny nie jest wyraźnie określa się tzw. umowną granicę plastyczności, która odpowiada pewnemu bardzo małemu odkształceniu trwałemu, np. równemu 0,05%. Odkształcenia trwale mniejsze od tego umownego przyjmuje się za pomijalnie małe. W przypadku materiałów, w których nie występuje zakres liniowo-sprężysty (dla których nie obowiązuje prawo Hooke'a) umowna granica plastyczności odpowiada trwałemu odkształceniu równemu 0,2%.

Po przekroczeniu granicy plastyczności może występować obszar **płynięcia plastycznego** – w obszarze tym występuje **gwałtowny przyrost odkształceń, przy braku przyrostu wartości naprężenia**. W istocie wartość naprężenia oscyluje.

Górna granica plastyczności R_{eH}

- Odpowiada **pierwшему maksimum** w zakresie plastycznym.

Dolna granica plastyczności R_{eL}

- Odpowiada minimalnej wartości naprężenia w obszarze płynięcia plastycznego, jednak przy poszukiwaniu tego minimum **należy pominąć minimum występujące bezpośrednio po górnej granicy plastyczności**.

Wytrzymałość na rozciąganie $R_m = \frac{F_{max}}{A_0}$

- Maksymalne naprężenie **nominalne** – naprężenie odpowiadające **maksymalnej sile rozciągającej** odniesionej do **początkowego pola powierzchni przekroju** poprzecznego.

Naprężenie zrywające $R_u = \frac{F_u}{A_u}$

- Naprężenie **rzeczywiste** odpowiadające **sile zrywającej** próbkę odniesionej od **aktualnego pola powierzchni przekroju** poprzecznego pręta w miejscu jego zniszczenia.

Naprężenia graniczne oznacza się różnymi symbolami w zależności o rodzaju zagadnienia, stosowanych norm, oznaczeń stosowanych tradycyjnie w obliczeniach i literaturze. Oprócz litery „R” stosuje się także „k”, „f” lub „σ”, uzupełniając je stosownymi indeksami. W przypadku określania naprężeń granicznych dla innych stanów naprężenia stosuje się ponadto indeksy wskazujące na jego charakter – jednak i tutaj nie ma jednoznaczności (np. rozciąganie „t”, „r”; ściskanie „c”; ścinanie (skręcanie) „s”, „t”; naprężenia normalne przy zginaniu „g”).

Wybrane dane doświadczalne:

Materiał	Moduł Younga [GPa]	Granica plastyczności [MPa]	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]
Aluminium	70	15-20	40-50
Stopy aluminium	70	400	450
Beton *	30	-	1,5-5 (10-50)
Dąb **	11	-	60-90/1-2 (30-40/3-4)
Granit *	10-70	-	7-25 (100-300)
Jodła **	10	-	70-120/5 (40-60/4-10)
Miedź	117	70	220
Mosiądz	100-125	200	550
Stal	200-210	200-250	400
Stale wysokich wytrzymałości	200-210	700	750
Tytan	110	100-225	240-370
Żelazo	210	80-100	350
Żeliwo	90	-	170

* W nawiasie podano wytrzymałość na ściskanie.

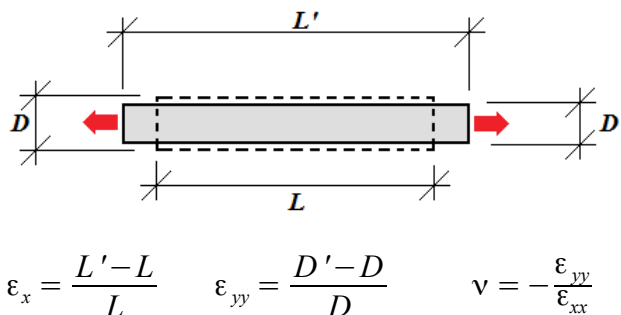
** Moduł Younga wzdłuż włókien. Z dwóch podanych zakresów wytrzymałości pierwszy odnosi się do obciążenia wzdłuż włókien, drugi zaś do obciążenia poprzecznie do włókien. W nawiasie podano odpowiednie wytrzymałości na ściskanie.

Zasady termodynamiki narzucają warunek aby tensor sztywności był dodatnio określony, tj. aby jego wartości własne (uogólnione moduły sztywności, tzw. moduły Kelvina) były dodatnie. Modułami Kelvina dla materiału izotropowego są moduł sztywności poprzecznej Kirchhoffa oraz moduł sztywności objętościowej Helmholtza. Warunki ich dodatniości określają zakres dopuszczalnych wartości współczynnika Poissona:

$$\left. \begin{aligned} G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 &\Rightarrow \nu > -1 \\ K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 &\Rightarrow \nu < 0,5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\nu \in (-1 ; 0,5)}$$

Wartości współczynnika Poissona dla wybranych materiałów:

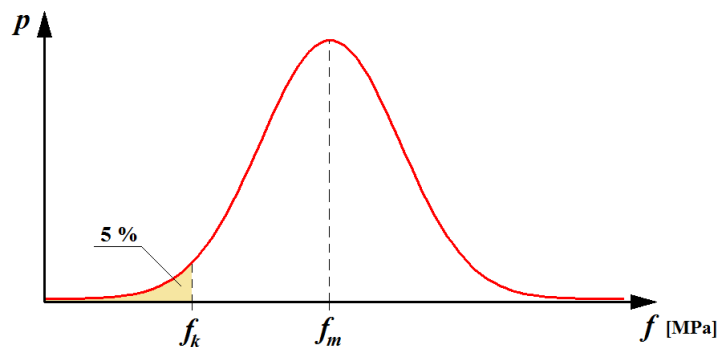
Materiał	ν [-]
Beton	0,2
Guma	~ 0,5
Korek	~ 0,00
Miedź	0,33
Stal	0,27-0,31
Stopy aluminium	0,33
Szkło	0,18-0,3
Żeliwo	0,21-0,26



Istnieją materiały o $\nu < 0$. Materiały o ujemnym ν (pęczniące poprzecznie przy rozciąganiu i zwężające się przy ściskaniu) nazywamy materiałami **auksetycznymi**.

08.3 Charakterystyczne i obliczeniowe wartości obciążenia i wytrzymałości – koncepcja projektowania metodą stanów granicznych.

Wartości naprężeń granicznych są stałymi charakterystycznymi dla danego materiału. Ich statystyczny rozrzut może być jednak znaczny. Aby ustrzec się przed niebezpiecznymi konsekwencjami przyjęcia zawyżonej wytrzymałości materiału względem rzeczywistości, prowadzi się badania określające rozkład prawdopodobieństwa uzyskania danej wartości wytrzymałości (wybranego naprężenia granicznego). Przykładowy rozkład gęstości prawdopodobieństwa, określony na podstawie dostatecznie dużej ilości prób wytrzymałościowych, może mieć następującą postać:



- Wartość wytrzymałości, której odpowiada największe prawdopodobieństwo wystąpienia nazywa się **wytrzymałością średnią** i oznacza przez f_m .
- Wartość wytrzymałości odpowiadająca dolnemu kwantylowi 5% nazywa się **wytrzymałością charakterystyczną** i oznacza przez f_k . Oznacza to, że w rzeczywistości wytrzymałość materiału jest na 95% właśnie taka lub wyższa.

Wartość charakterystyczna wytrzymałości może być wartością miarodajną dla obliczeń w stanach granicznych **użytkowości** (sztywności), tj. ograniczających np. deformację układu z uwagi na wymagania jego funkcjonalności, estetyki, komfortu użytkowania itp. W takich przypadkach wytrzymałość charakterystyczną porównuje się z naprężeniami wyznaczonymi dla **obciążenia charakterystycznego** q_k , określonego w sposób analogiczny, tj. dla takiej wartości obciążenia zewnętrznego, które na 95% będzie właśnie takie lub mniejsze. W stanach granicznych **nośności** (wytrzymałości) konieczne jest dalsze zniżenie wytrzymałości, celem minimalizacji prawdopodobieństwa wystąpienia stanu niebezpiecznego. W tym celu określa się tzw. **wytrzymałość obliczeniową** f_d , zdefiniowaną jako iloraz wytrzymałości charakterystycznej i **cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa** γ_M :

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_M}$$

Wartości cząstkowego współczynnika bezpieczeństwa przyjmuje się na podstawie stosownych norm – z reguły zawiera się ona w przedziale $1,1 \div 1,5$, choć w uzasadnionych przypadkach może być inna. W obliczeniach dotyczących sprawdzenia stanu granicznego nośności wytrzymałość obliczeniową porównuje się z naprężeniami wyznaczonymi na podstawie **obciążenia obliczeniowego** q_d , określonego jako iloczyn charakterystycznej wartości tego obciążenia oraz większego od jedności cząstkowego

współczynnika bezpieczeństwa $\gamma_L > 1$:

$$q_d = q_k \cdot \gamma_L.$$

Proces projektowania elementów rozciąganych sprowadza się w najprostszym ujęciu do takiego doboru wielkości obciążenia oraz materiału i przekroju pręta, aby maksymalne naprężenia normalne nie przekroczyły wartości dopuszczalnych $\sigma_{max} < k_r$ (warunek nośności), oraz aby wydłużenie nie przekroczyło wartości dopuszczalnej $\Delta L < \Delta L_{dop}$ (warunek użyteczności).

Analogicznie projektuje się pręty ściskane z uwagi na ich nośność sprężystą. Istnieje jednak kluczowa różnica między rozciąganiem a ściskaniem – pręty ściskane, gdy obciążenie osiowe przekroczy pewną krytyczną wartość – mogą ulec wyboczeniu. Efekt ten omówiony będzie osobno w późniejszym czasie.