

09. Skręcanie

Podstawą dla opisu skręcania prętów będzie rozwiązanie następującego zagadnienia:

- **ELEMENT I MATERIAŁ:**

- Dany jest nieważki, pryzmatyczny pręt prosty o długości L .
- Pręt wykonany jest z jednorodnego, izotropowego materiału liniowo sprężystego (materiału Hooke'a).

- **OBCIĄŻENIE:**

- Pręt obciążony jest na obydwu ściankach poprzecznych (w przekrojach $x=L$ i $x=0$) obciążeniem ciągłym, stycznym do tych ścianek (tj. o zerowej składowej na kierunku osi pręta), redukującym się do par leżących w płaszczyźnie tych ścianek (zerowa suma układu, wektor momentu równoległy do osi x)

$$\text{-ścianka początkowa: } \mathbf{v} = [-1; 0; 0]^T \quad \mathbf{q}(0, y, z) = [0; -q_y; -q_z]^T$$

$$\text{-ścianka końcowa: } \mathbf{v} = [1; 0; 0]^T \quad \mathbf{q}(L, y, z) = [0; q_y; q_z]^T$$

- Pręt jest nieobciążony na swojej powierzchni bocznej.

$$\mathbf{v} = [0; v_y; v_z]^T \quad \mathbf{q} = [0; 0; 0]^T$$

- **PODPARCIE:**

- Środek ciężkości ścianki poprzecznej pręta w przekroju $x=0$, tj. punkt $O(0;0;0)$ jest utwierdzony, tj. nie może doznać żadnych przemieszczeń i żadnych obrotów.

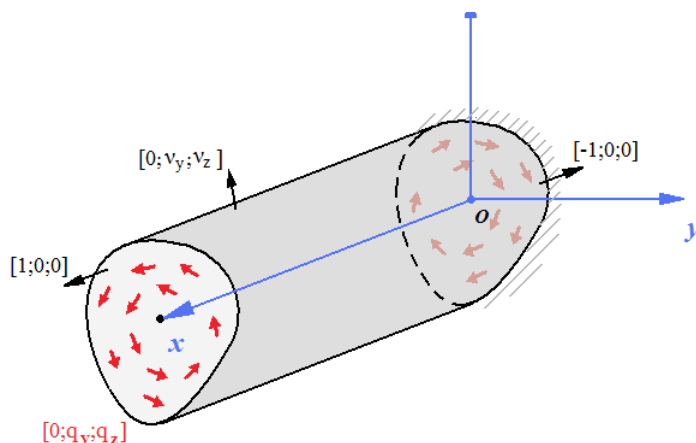
$$\text{-brak przemieszczenia: } \mathbf{u}(0,0,0) = [u_x; u_y; u_z]^T = [0; 0; 0]^T$$

$$\text{-brak obrotu wokół osi } y: \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_0 = 0$$

$$\text{-brak obrotu wokół osi } z: \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_0 = 0$$

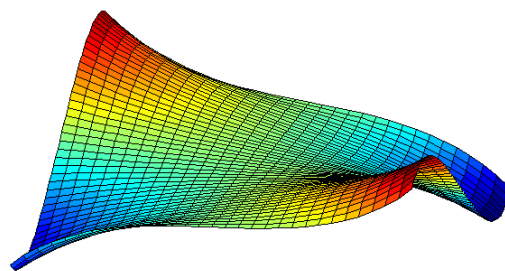
- Pozostałe punkty przekroju $x=0$ podparte są w ten sposób, że nie mogą doznawać przemieszczeń w płaszczyźnie przekroju (w szczególności, przekrój nie może się obrócić), ale mogą swobodnie przemieszczać się w kierunku osi pręta (prostopadle do płaszczyzny przekroju)

$$u_y(0, y, z) = 0, \quad u_z(0, y, z) = 0$$



Zagadnienie powyższe nazywamy zagadnieniem **czystego, swobodnego skręcania**.

- „**Czyste**” oznacza tutaj, że przyłożone obciążenie jest dokładnie takie, jak wymaga tego ściśle analityczne rozwiązanie (dokładna postać tego obciążenia dopiero będzie wyznaczona), w odróżnieniu od skręcania „prostego”, w którym może to być dowolne obciążenie redukujące się do pary skręcającej. Zgodnie z zasadą Saint-Venanta, rozwiązanie zagadnienia skręcania czystego, może służyć opisowi przypadków skręcania prostego.
- „**Swobodne**” oznacza, że każdy przekrój pręta może się dowolnie deformować w kierunku osi pręta, tj. podlegać deplanacji (na rysunku obok: deplanacja przekroju prostokątnego). Oznacza to, że w ogólności każdy płaski przekrój pręta, po skręceniu nie będzie już płaski. Szczególnym wyjątkiem jest tu przekrój kołowy. Jeśli któryś z przekrojów ma zablokowaną możliwość deplanacji, mówimy wtedy o skręcaniu nieswobodnym, które musi być opisane w odmienny sposób.



Zadanie rozwiązuje się tzw. **metodą półdwrotną, podejściem kinematycznym**. Rozwiązanie to ma następujący schemat:

1. Przyjąć rozkład przemieszczeń wszystkich punktów $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, spełniający warunki podparcia, będący dwukrotnie różniczkowalną funkcją wektorową.
2. Dla założonych przemieszczeń wyznaczyć odkształcenia na podstawie równań geometrycznych Cauchy'ego.
3. Dla obliczonych odkształceń wyznaczyć naprężenia na podstawie równań uogólnionego prawa Hooke'a.
4. Sprawdzić czy spełnione są statyczne (obciążeniowe) warunki brzegowe oraz równania równowagi Naviera.

Jeżeli przypuszczone rozwiązanie spełniać będzie wszystkie równania i warunki, to – ponieważ dowodzi się jednoznaczności rozwiązań zagadnień liniowej teorii sprężystości – będzie ono właśnie tym jedynym, poszukiwanym rozwiązaniem.

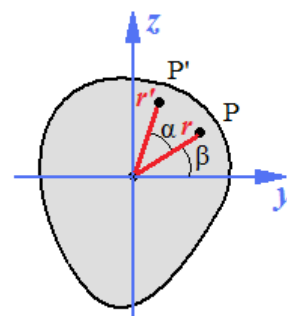
1. Przyjęcie rozkładu przemieszczeń

Najpierw przyjmijmy przemieszczenia punktu przekroju w płaszczyźnie tego przekroju (y, z) . Przed deformacją dowolny punkt przekroju odpowiadający współrzędnej x można opisać w lokalnym biegunowym układzie współrzędnych (r, β) :

$$\begin{cases} y = r \cos \beta \\ z = r \sin \beta \end{cases}$$

Przyjmijmy, że każdy punkt P ustalonego przekroju, wskutek skręcania, doznaje obrotu wokół osi pręta o pewien kąt α (stały dla danego przekroju), zaś jego odległość od środka ciężkości przyjmuje wartość r' . Rzut punktu po deformacji na płaszczyznę jego przekroju przed deformacją oznaczamy przez P' . Współrzędne tego rzutu po deformacji wynoszą:

$$\begin{cases} y' = r' \cos(\beta + \alpha) \\ z' = r' \sin(\beta + \alpha) \end{cases}$$



Współrzędne wektora przemieszczenia na kierunkach leżących w płaszczyźnie przekroju:

$$u_y = y' - y = r' \cos(\beta + \alpha) - r \cos \beta = r' (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - r \cos \beta$$

$$u_z = z' - z = r' \sin(\beta + \alpha) - r \sin \beta = r' (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) - r \sin \beta$$

Zgodnie z założeniami o **małych przemieszczeniach** możemy przyjąć:

$$\left. \begin{array}{l} r' \approx r \\ \cos \theta \approx 1 \\ \sin \theta \approx \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u_y \approx -r \alpha \sin \beta = -\alpha z \\ u_z \approx r \alpha \cos \beta = \alpha y \end{cases}$$

Warunki podparcia pręta wymagają, aby dla $x=0$ kąt obrotu $\alpha=0$. Zakładamy ponadto, że **kąt obrotu dowolnego przekroju α , zmienia się proporcjonalnie do odległości od przekroju podparcia**, tj. im dalej dany przekrój znajduje się od niego, tym większy jest jego kąt obrotu, przy czym rośnie on proporcjonalnie do x :

$$\alpha(x) = \Theta \cdot x$$

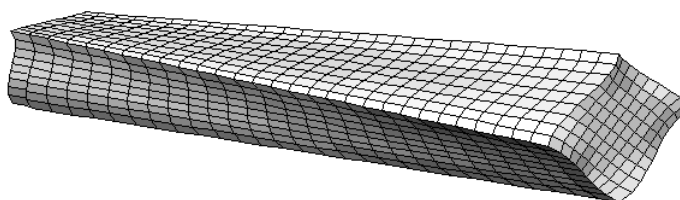
Współczynnik proporcjonalności Θ nazywamy **jednostkowym kątem skręcenia**.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia przemieszczeń podłużnych. Trzeba zauważyć, że każdy rodzaj przekroju deplanuje się odmiennie, w zależności od swojego kształtu. Na potrzeby rozwiązania zakładamy, że każdy przekrój na długości pręta deplanuje się jednakowo (co jest możliwe tylko przy skręcaniu swobodnym). Rozkład przemieszczeń wzdłuż osi pręta x w dowolnym przekroju opiszemy więc pewną **funkcją deplanacji** $\phi(y, z)$, którą wyznaczymy później:

$$u_x = \Theta \cdot \phi(y, z)$$

Ostatecznie składowe wektora przemieszczenia przypuszczamy w postaci:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = \Theta \phi(y, z) \\ u_y(x, y, z) = -\Theta x z \\ u_z(x, y, z) = \Theta x y \end{cases}$$



Należy sprawdzić czy spełnione są kinematyczne warunki brzegowe (warunki podparcia):

- Pełne utwierdzenie środka ciężkości przekroju początkowego $O(0; 0; 0)$

brak obrotów: $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_z}{\partial x} \Big|_0 = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_0 = 0 \end{array} \right\}$

brak przemieszczeń: $u_x(0, 0, 0) = \phi(0, 0) = 0 \quad u_y(0, 0, 0) = 0 \quad u_z(0, 0, 0) = 0$

- Brak przemieszczeń poprzecznych punktów przekroju początkowego ($x=0$)

$$u_y(0, y, z) = 0, \quad u_z(0, y, z) = 0$$

Przypuszczony rozkład przemieszczeń spełnia zatem kinematyczne warunki brzegowe, o ile tylko funkcja deplanacji $\phi(y=0, z=0) = 0$.

2. Wyznaczenie odkształceń i naprężeń

Na podstawie równań geometrycznych Cauchy'ego wyznaczamy odkształcenia:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 0 & \varepsilon_{yy} &= 0 & \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \varepsilon_{yz} &= 0 & \varepsilon_{zx} &= \frac{\Theta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) & \varepsilon_{xy} &= \frac{\Theta}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \end{aligned}$$

Na podstawie równań fizycznych prawa Hooke'a wyznaczamy naprężenia:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) & \tau_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \\ \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) & \tau_{zx} &= 2G\varepsilon_{zx} \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) & \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0 & \sigma_{yy} &= 0 & \sigma_{zz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 & \tau_{zx} &= \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) & \tau_{xy} &= \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \end{aligned}$$

3. Sprawdzenie równań równowagi oraz warunków statycznych

Równania równowagi Naviera:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Widać zatem, że funkcja deplacji nie może być dowolną funkcją – warunki równowagi wymagają aby była ona funkcją **harmoniczną**, tj. spełniającą **równanie Laplace'a**:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Równanie to ma jednoznaczne rozwiązanie, o ile tylko poda się dodatkowe warunki brzegowe. Warunków tych dostarczają nam warunki statyczne, związane z obciążeniem ścianek bocznych pręta. Zgodnie z zależnością $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{q}$, gdzie \mathbf{v} jest normalną zewnętrzną powierzchni ciała a \mathbf{q} jest wektorem obciążenia, dla ścianek bocznych możemy napisać:

- wektor obciążenia $\mathbf{q} = [0 ; 0 ; 0]^T$
- normalna zewnętrzna $\mathbf{v} = [0 ; v_y ; v_z]^T$

Statyczne warunki brzegowe:

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) v_y + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) v_z = 0$$

Równanie Laplace'a z powyższym warunkiem brzegowym nazywane jest zagadnieniem Neumanna. Razem z warunkiem pełnego utwierdzenia środka ciężkości przekroju utwierdzenia $\phi(0; 0) = 0$, zagadnienie to posiada jednoznaczne rozwiązanie zależne jedynie od kształtu przekroju poprzecznego.

Pozostają jeszcze do sprawdzenia jedynie statyczne warunki brzegowe na ściankach poprzecznych – początkowej (wzory ze znakiem „-”) i końcowej („+”):

- wektor obciążenia $\mathbf{q} = [0; \pm q_y; \pm q_z]^T$
- normalna zewnętrzna $\mathbf{v} = [\pm 1; 0; 0]^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm q_y \\ \pm q_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) = q_y \\ \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) = q_z \end{cases}$$

Ponieważ funkcji deplanacji jest już jednoznacznie określona przez równania równowagi i statyczne warunki brzegowe na pobocznicy, więc jedyną sytuacją, w której warunki powyższe są spełnione jest ta, gdy obciążenie zewnętrzne, tj. składowe wektora obciążenia ciągłego na ściankach poprzecznych są dane właśnie wymaganymi wzorami.

$$q_y = \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \quad q_z = \Theta G \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right)$$

Jeśli obciążenie przyłożone do ścianek pręta jest właśnie takie, to spełnione są wszystkie równania i warunki brzegowe postawionego zagadnienia – ponieważ w liniowej teorii sprężystości rozwiązania są jednoznaczne, zatem przypuszczone funkcje w istocie są rzeczywistym rozwiązaniem problemu.

Pozostaje jeszcze tylko jedna rzecz do sprawdzenia, mianowicie – czy obciążenie zewnętrzne określone powyższymi wzorami rzeczywiście redukuje się do pary w płaszczyźnie ścianki poprzecznej. Układ taki ma zerową sumę, a jego wektor momenty względem dowolnego punktu ma niezerową składową jedynie na kierunku x (tj. opisujemy go wektorem **momentu skręcającego** M_x).

Suma układu:

$$F_x = \iint_A q_x dA = \iint_A 0 dA = 0 \quad \text{- warunek spełniony}$$

$$F_y = \iint_A q_y dA = \Theta G \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) dA \quad F_z = \iint_A q_z dA = \Theta G \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) dA$$

Funkcje podcałkowe dla składowych poprzecznych zapiszemy w innej, równoważnej postaci:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - z + y \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)}_{=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - z$$

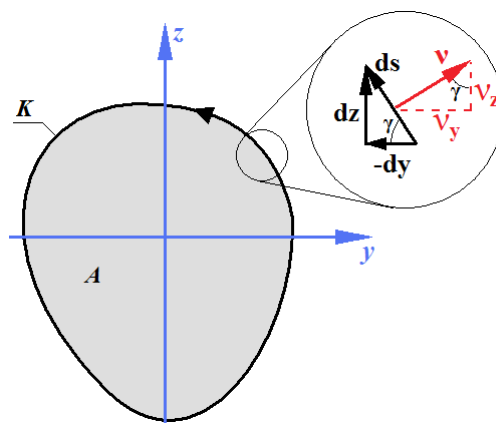
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y + z \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)}_{=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + y$$

gdzie:

$$f_1 = y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \quad g_1 = -y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \quad f_2 = z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \quad g_2 = -z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right),$$

przy czym skorzystaliśmy z faktu, że funkcja deplanacji jest funkcją harmoniczną spełniającą równanie Laplace'a. Dla tak zapisanych funkcji podcałkowych można skorzystać z twierdzenia Greena o zamianie całki powierzchniowej na całkę krzywoliniową po konturze obszaru całkowania:

$$\iint_A \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dA = \oint_K g dy + f dz$$



Z zależności geometrycznych, możemy napisać:

$$\frac{-dy}{ds} = \cos \gamma = v_z \quad \frac{dz}{ds} = \sin \gamma = v_y$$

Kierunek całkowania po krzywej jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Zatem składowe sumy można zapisać w postaci całek krzywoliniowych po konturze przekroju:

$$F_y = \oint_K \left[-y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dy + \left[y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] dz = \oint_K \left\{ \left[-y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] \frac{dy}{ds} + \left[y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] \frac{dz}{ds} \right\} ds =$$

$$= \oint_K y \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) v_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) v_y \right]}_{=0} ds = 0$$

$$F_z = \oint_K \left[-z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] dy + \left[z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dz = \oint_K \left\{ \left[-z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] \frac{dy}{ds} + \left[z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] \frac{dz}{ds} \right\} ds =$$

$$= \oint_K z \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) v_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) v_y \right]}_{=0} ds = 0$$

W powyższych całkach skorzystaliśmy z zerowego warunku brzegowego dla zagadnienia Neumanna. A zatem wszystkie składowe wektora sumy obciążenia ciągłego są równe 0, zatem układ ten może redukować się do pary lub jest układem zerowym. Należy sprawdzić jeszcze składowe wektora momentu względem środka ciężkości przekroju:

Moment układu:

$$M_y = \iint_A q_x \cdot z dA = \iint_A 0 \cdot z dA = 0$$

$$M_z = \iint_A -q_x \cdot y dA = \iint_A -0 \cdot y dA = 0$$

Ostatnią składową jest poszukiwana składowa wektora momentu, równoległa do osi pręta – moment skręcający:

$$M_x = \iint_A (q_z \cdot y - q_y \cdot z) dA = \Theta G \underbrace{\iint_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) \cdot y - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \cdot z \right] dA}_{I_x} = \Theta G I_x$$

Całka powyższa jest różna od 0. Stały parametr

$$I_x = \iint_A \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} y - \frac{\partial \phi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right] dA$$

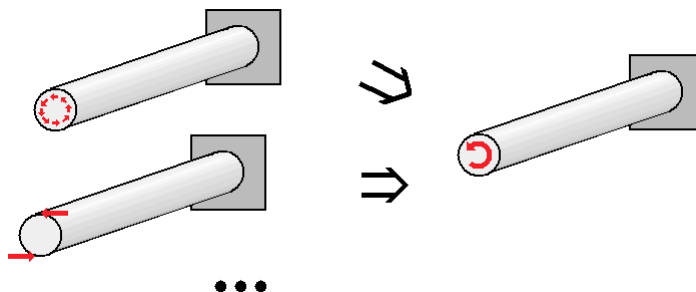
zależny tylko od kształtu przekroju poprzecznego pręta, tj. będący jednym z elementów charakterystyki jego geometrycznej, nazywamy **stałą skręcania**. Stała ta, wraz z modułem sztywności poprzecznej (modułem Kirchhoffa) G , wiąże ze sobą obciążenie zewnętrzne (moment skręcający) i przemieszczenie (jednostkowy kąt skręcania).

$$\Theta = \frac{M_x}{G I_x}$$

Te same rozważania dotyczące równoważności układów sił, można przeprowadzić dla układu naprężeń w dowolnym przekroju pręta oraz dla układu sił zewnętrznych przyłożonych do odciętej części pręta. Ponieważ naprężenia $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ opisane są tymi samymi funkcjami co składowe obciążenia q_x, q_y, q_z , stąd równość tych układów jest oczywista.

$$\begin{aligned} F_x(W_I) &= \iint_A \sigma_{xx} dA = \iint_A q_x dA = F_x(Z_{II}) & M_x(W_I) &= \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = \iint_A (q_z y - q_y z) dA = M_x(Z_{II}) \\ F_y(W_I) &= \iint_A \tau_{xy} dA = \iint_A q_y dA = F_y(Z_{II}) & M_y(W_I) &= \iint_A \sigma_{xx} z dA = \iint_A q_x z dA = M_y(Z_{II}) \\ F_z(W_I) &= \iint_A \tau_{xz} dA = \iint_A q_z dA = F_z(Z_{II}) & M_z(W_I) &= \iint_A (-\sigma_{xx} y) dA = \iint_A (-q_x y) dA = M_z(Z_{II}) \end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą Saint-Venanta, rozwiązanie zagadnienia skręcania czystego można zastosować z dobrym przybliżeniem dla jakiegokolwiek przypadku, w którym pręt obciążony jest na ściankach poprzecznych układem sił redukującym się do pary skręcającej (momentu skręcającego). Takie zagadnienia nazywamy **skręcaniem prostym**. Oznacza to, że obciążenie zewnętrzne nie musi mieć takiej postaci, jaka wymagana jest przez założone rozwiązanie, aby zastosować je do opisu (przybliżonego, jednak dość precyzyjnego) pręta skręcanego.



Ponadto, powszechnie, z dobrą dokładnością, stosuje się powyższe rozwiązanie również dla prętów o przekroju i obciążeniu skręcającym zmiennym na długości. Należy przy tym mieć jednak świadomość, że stosowane rozwiązanie ma w takim przypadku jedynie charakter przybliżony – szczególnie dotyczy to obszarów bliskich skokowej zmiany geometrii lub obciążenia, w których z reguły występuje koncentracja naprężeń.

PODSUMOWANIE ROZWIĄZANIA:

Wykorzystując zależność między momentem skręcającym a jednostkowym kątem skręcenia, przemieszczenie, odkształcenie i naprężenie można wyrazić w następujący sposób:

<p>Tensor naprężenia:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$	$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{M_x}{I_x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \\ \tau_{xz} &= \frac{M_x}{I_x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) \end{aligned} \right\}$	<p>Tensor odkształcenia:</p> $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau_{xy}}{2G} & \frac{\tau_{xz}}{2G} \\ \text{sym} & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}$
--	--	--

gdzie:

G – moduł Kirchhoffa (moduł sztywności poprzecznej)

$\phi(y, z)$ – funkcja deplanacji określająca spaczenie przekroju, zależna od jego kształtu, będąca rozwiązaniem zagadnienia Neumanna:

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{i} \quad \phi(0,0) = 0 \quad (\text{wewnątrz obszaru przekroju})$
$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z \right) \nu_y + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y \right) \nu_z = 0 \quad (\text{na konturze przekroju})$

$I_x = \iint_A \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} y - \frac{\partial \phi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right] dA \quad \text{stała skręcania}$
--

Definiuje się wielkość Θ nazywaną **jednostkowym kątem skręcenia**, będącą nieskończenie małym przyrostem całkowitego kąta skręcenia pręta:

$\Theta = \frac{d\psi}{dx}, \quad \text{przy czym} \quad \Theta = \frac{M_x}{GI_x}$

Całkowity kąt skręcenia pręta w punkcie x oblicza się jako:

$\psi = \int_0^x \Theta dx + C = \int_0^x \frac{M_x}{GI_x} dx + C$
--

gdzie stałą całkowania C określa się z warunków brzegowych (podporowych). Jeśli mamy do czynienia z prętem, w którym rozkład momentu skręcającego jest przedziałami stały i w którym sztywność skrętna GI_x jest również przedziałami stała, to kąt skręcenia zmienia się liniowo w każdym przedziale i przyrasta proporcjonalnie do jednostkowego kąta skręcenia wyznaczonego dla danego przedziału i proporcjonalnie do długości tego przedziału

$\Delta \psi_i = \Theta_i L_i = \frac{M_{xi} L_i}{GI_{xi}},$
--

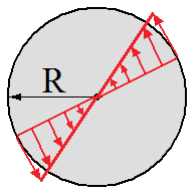
gdzie M_{xi}, I_{xi} to moment skręcający i stała skręcania w danym przedziale, zaś L_i to długość tego przedziału. Całkowity kąt skręcenia takiego pręta, gdy jest on utwierdzony z jednej strony, jest równy:

$\psi_c = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} L_i}{GI_{xi}}$
--

Proces projektowania elementów skręcanych sprowadza się w najprostszym ujęciu do takiego doboru wielkości obciążenia oraz materiału i przekroju pręta, aby maksymalne naprężenia styczne nie przekroczyły wartości dopuszczalnych $\tau_{max} < k_s$ (warunek nośności), oraz aby kąt skręcenia nie przekroczył wartości dopuszczalnej $\psi < \psi_{dop}$ (warunek użyteczności).

SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM I RUROWYM

Rozpatrujemy pręt o przekroju kołowym o średnicy $D = 2R$. Z rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego otrzymujemy $\phi(x, y) \equiv 0$, to znaczy, że **przekrój kołowy nie deplanuje się** pod wpływem momentu skręcającego. Stąd:

Stała skręcania:	$I_x = I_0 = I_y + I_z = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$	
Naprężenia styczne:	$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_0} z \quad \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_0} y$	
Naprężenie wypadkowe:	$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{M_x}{I_0} \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{M_x}{I_0} r$	

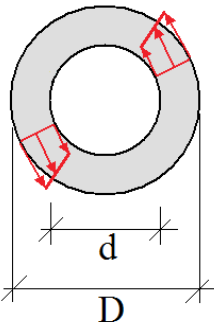
Stała skręcania jest równa biegunowemu momentowi bezwładności. Wypadkowe **naprężenie styczne** w danym punkcie **jest proporcjonalne do odległości** tego punktu od środka pręta. W środku jest ono równe 0. **Maksymalne naprężenie styczne otrzymuje się na obwodzie** przekroju poprzecznego pręta:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_0} R = \frac{M_x}{W_x} ,$$

gdzie **wskaźnik wytrzymałości na skręcanie pręta kołowego** jest równy:

$$W_x = \frac{I_0}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$$

W przypadku **przekroju rurowego** o średnicy zewnętrznej D i średnicy wewnętrznej d rozkład naprężeń jest taki sam, inna jest jedynie stała skręcania, która jest tutaj biegunowym momentem bezwładności dla przekroju rurowego a nie kołowego:

$I_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$	$W_x = \frac{I_0}{R} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$	
$\tau = \frac{M_x}{I_0} r$	$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_0} R = M_x \cdot \frac{16D}{\pi(D^4 - d^4)}$	

SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU ELIPTYCZNYM

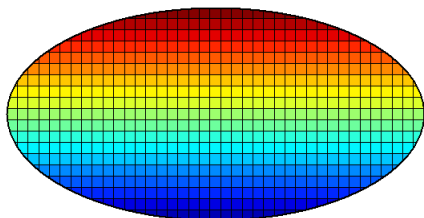
Rozpatrujemy pręt o przekroju elipsy o półosiach a i b ($a > b$).

Stała skręcania:	$I_x = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$	
Naprężenia styczne:	$\tau_{xy} = -\frac{2 M_x}{\pi a b^3} \cdot z$ $\tau_{xz} = \frac{2 M_x}{\pi a^3 b} \cdot y$	
Naprężenia maksymalne:	$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2 M_x}{\pi a b^2}$ $\tau_B = \frac{2 M_x}{\pi a^2 b}$	

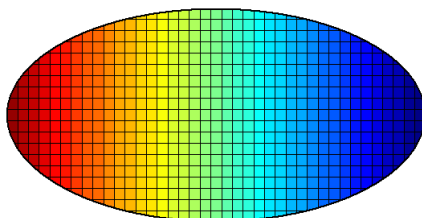
gdzie wskaźnik wytrzymałości na skręcanie jest równy:
$$W_x = \frac{\pi a b^2}{2}$$

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju eliptycznym:

Naprężenia τ_{xy}

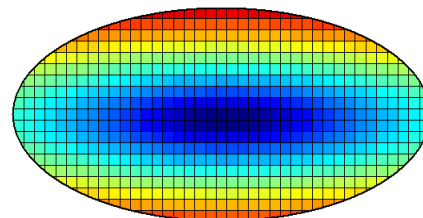


Naprężenia τ_{xz}



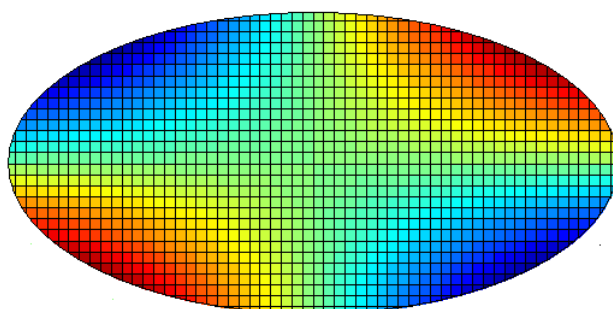
Naprężenia wypadkowe

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$



Deplanacja przekroju eliptycznego:

$$\phi(y, z) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot y \cdot z$$



SKREĆANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO

Rozpatrujemy pręt o przekroju trójkąta równobocznego o boku $2a$.

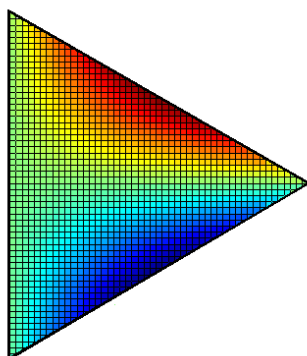
Stała skręćania: $I_x = \frac{a^4 \sqrt{3}}{5}$

Naprężenia styczne: $\tau_{xy} = \frac{5 M_x}{a^5 \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} y - a) \cdot z$
 $\tau_{xz} = \frac{5 M_x}{2 a^5} \cdot \left[y^2 - z^2 + \frac{2a}{\sqrt{3}} y \right]$

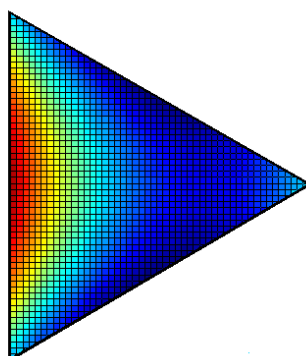
Naprężenia maksymalne: $\tau_{max} = \frac{5 M_x}{2 a^3} = \frac{M_x}{W_x}$ gdzie $W_x = \frac{2 a^3}{5}$

Rozkład naprężen stycznych w przekroju trójkątnym:

Naprężenia τ_{xy}

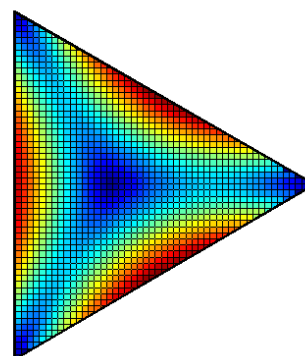


Naprężenia τ_{xz}



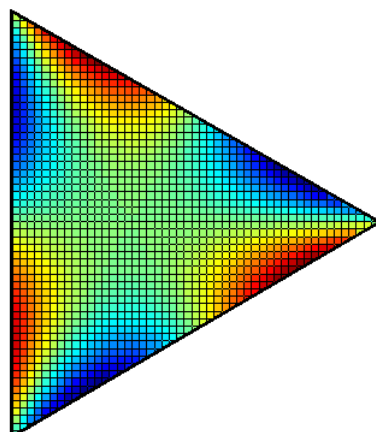
Naprężenia wypadkowe

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$



Deplanacja przekroju trójkątnego:

$$\phi(y, z) = \frac{\sqrt{3}}{2a} \cdot z \cdot \left(y^2 - \frac{z^2}{3} \right)$$



SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

Rozpatrujemy pręt o przekroju prostokątnym o wymiarach b i h , przy czym zakładamy, że $b \leq h$. Funkcja deplanacji jest równa:

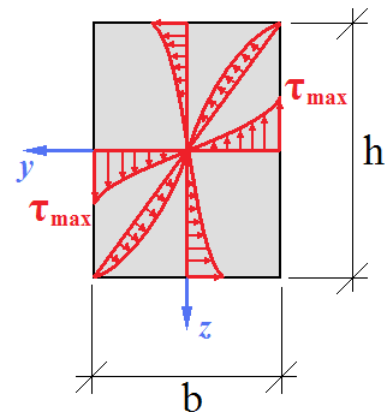
$$\phi(y, z) = yz - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n \cdot \sin(k_n y) \cdot \sinh(k_n z)}{k_n \cosh\left(\frac{h}{2} k_n\right)} \quad \text{gdzie}$$

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}$$

$$F_n = (-1)^n \frac{8b}{(2n+1)^2 \pi^2}$$

Stąd otrzymujemy wzory na stałą skręcania i wartości naprężeń:

$$I_x = \underbrace{\left[\frac{1}{3} - \frac{64b}{\pi^5 h} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}\left(\frac{h}{2} k_n\right)}{(2n+1)^5} \right]}_{\beta(h/b)} b^3 h = \beta\left(\frac{h}{b}\right) b^3 h$$



$\beta(h/b)$ jest stałym parametrem zależnym od stosunku długości boków przekroju. Naprężenia styczne:

$$\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_x} \left[\frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(k_n y) \cdot \sinh(k_n z)}{(2n+1)^2 \cdot \cosh\left(\frac{h}{2} k_n\right)} \right]$$

$$\tau_{xz} = \frac{M_x}{I_x} \left[2y - \frac{8b}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(k_n y) \cdot \cosh(k_n z)}{(2n+1)^2 \cdot \cosh\left(\frac{h}{2} k_n\right)} \right]$$

Maksymalne naprężenia styczne τ_{xz} – w połowie długości dłuższego boku. Są to jednocześnie **maksymalne z wypadkowych naprężeń stycznych występujących w całym przekroju**:

$$\tau_{xz}^{max} = \tau_{xz}(y = \pm b/2, z = 0) = \pm \frac{M_x b}{I_x} \underbrace{\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cdot \cosh\left(\frac{h}{b} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1)\right)} \right]}_{\gamma(h/b)} = \pm \frac{M_x b}{I_x} \gamma\left(\frac{h}{b}\right)$$

Maksymalne naprężenia styczne τ_{xy} – w połowie długości krótszego boku:

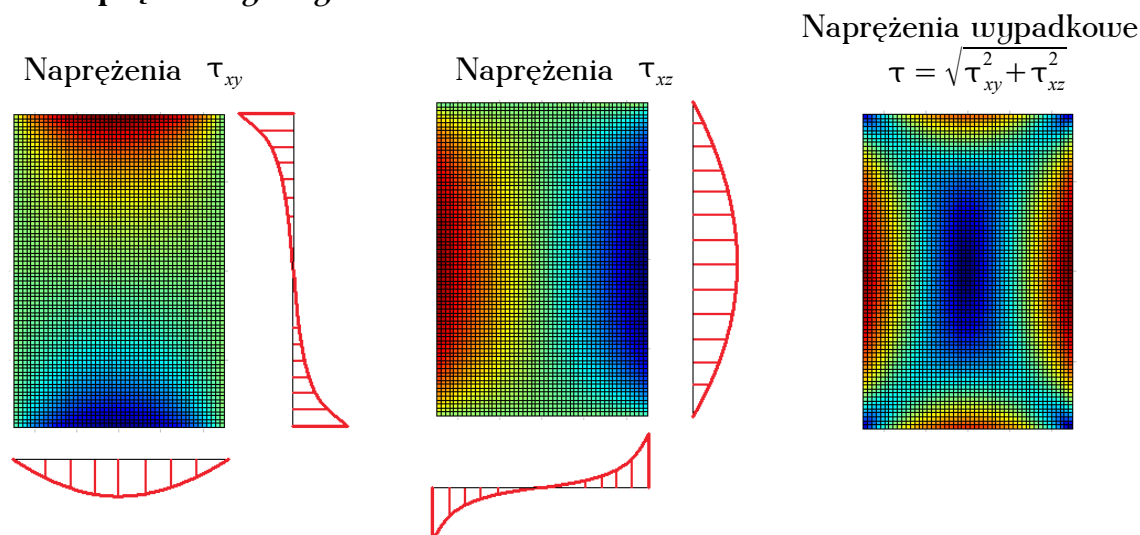
$$\tau_{xy}^{max} = \tau_{xy}(y = 0, z = \pm h/2) = \mp \frac{M_x b}{I_x} \cdot \underbrace{\left[\frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{tgh}\left(\frac{h}{b} \cdot \frac{\pi}{2} (2n+1)\right) \right]}_{\delta(h/b)} = \mp \frac{M_x b}{I_x} \delta\left(\frac{h}{b}\right)$$

Podsumowując:

$$\left| \tau_{xz}^{max} \right| = \frac{|M_x| b}{I_x} \cdot \gamma\left(\frac{h}{b}\right) \quad \left| \tau_{xy}^{max} \right| = \frac{|M_x| b}{I_x} \cdot \delta\left(\frac{h}{b}\right)$$

$\gamma(h/b), \delta(h/b)$ to stałe parametry zależne od stosunku długości boków przekroju.

Rozkład naprężeń stycznych:



Definiuje się tzw. **wskaznik wytrzymałości na skręcanie pręta prostokątnego**:

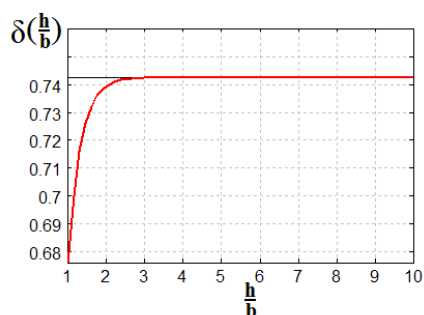
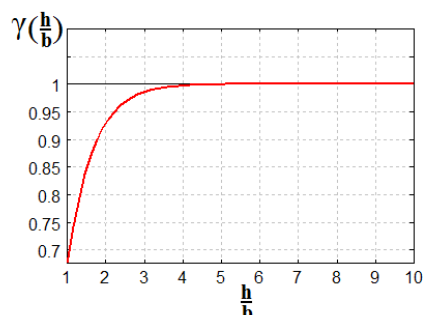
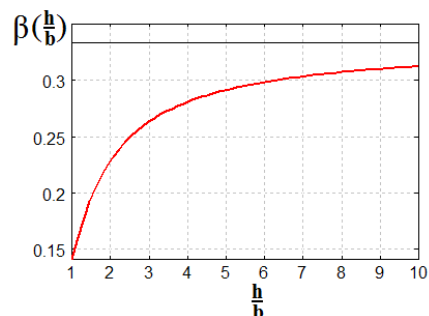
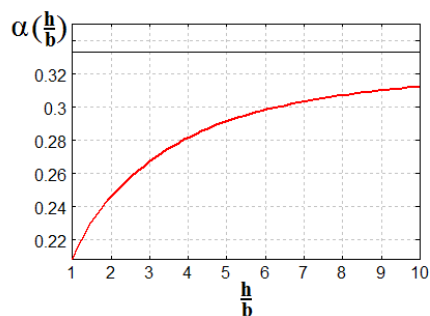
$$W_x = \frac{I_x}{b \gamma \left(\frac{h}{b}\right)} = \frac{b^3 h \beta \left(\frac{h}{b}\right)}{b \gamma \left(\frac{h}{b}\right)} = \alpha \left(\frac{h}{b}\right) b^2 h, \text{ gdzie } \alpha(h/b) = \frac{\beta(h/b)}{\gamma(h/b)}$$

Warunek projektowania skręcanego pręta kołowego:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq f_d$$

Dla celów obliczeniowych funkcje zależne od stosunku długości boków przekroju określające rozkład naprężeń stycznych zostały stabelaryzowane:

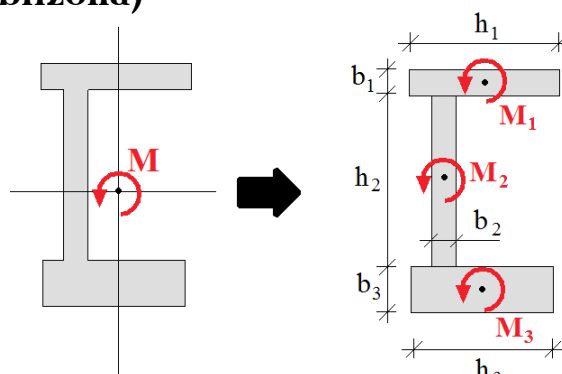
h/b	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5	4	5	6	8	10	∞
$\alpha(h/b)$	0,2082	0,2212	0,2310	0,2390	0,2459	0,2576	0,2672	0,2751	0,2817	0,2915	0,2984	0,3071	0,3123	0,3333
$\beta(h/b)$	0,1406	0,1717	0,1958	0,2143	0,2287	0,2494	0,2633	0,2733	0,2808	0,2913	0,2983	0,3071	0,3123	0,3333
$\gamma(h/b)$	0,6753	0,7763	0,8476	0,8966	0,9301	0,9681	0,9854	0,9934	0,9970	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
$\delta(h/b)$	0,6753	0,7111	0,7280	0,7359	0,7394	0,7418	0,7423	0,7424	0,7425	0,7425	0,7425	0,7425	0,7425	0,7425



Skręcanie prętów o przekroju cienkościennym otwartym (metoda przybliżona)

- 1) Dokonujemy aproksymacji danego przekroju sumą n pracujących niezależnie prostokątów.
- 2) Rozdzielamy całkowity moment skręcający na składowe prostokąty

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{xi}$$



- 3) Zakładamy, że każdy i -ty prostokąt w danym przekroju obróci się o taką samą wartość jednostkowego kąta skręcenia (taka jak dla całego przekroju)

$$\forall_i \Theta_i = \frac{M_{xi}}{G I_{xi}} = \Theta \quad \Rightarrow \quad M_{xi} = G \Theta I_{xi} = G \Theta \underbrace{b_i^3 h_i \beta_i}_{I_{xi}}$$

- 4) Ponieważ każdy prostokąt musi się obrócić o tę samą wartość jednostkowego kąta skręcenia, możemy napisać:

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{xi} = \sum_{i=1}^n \Theta G b_i^3 h_i \beta_i = G \Theta \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \beta_i \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{M_x}{G \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \beta_i}$$

- 5) Wprowadzamy zastępczą stałą skręcenia

$$I_x = \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \beta_i \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{M_x}{G I_x}$$

- 6) Obliczamy moment przypadający na każdy z prostokątów: $M_{xi} = \frac{M_x}{I_x} b_i^3 h_i \beta_i$

- 7) Poszukujemy maksymalnego naprężenia stycznego dla każdego z prostokątów:

$$\tau_{max,i} = \frac{M_{xi}}{W_{xi}} = \frac{M_x \beta_i b_i^3 h_i}{I_x \alpha_i b_i^2 h_i} = \frac{\beta_i}{\alpha_i} \frac{M_x}{I_x} b_i$$

Zastępczy wskaźnik wytrzymałości dla całego przekroju

$$W_x = \min_i \left(\frac{\alpha_i I_x}{\beta_i b_i} \right)$$

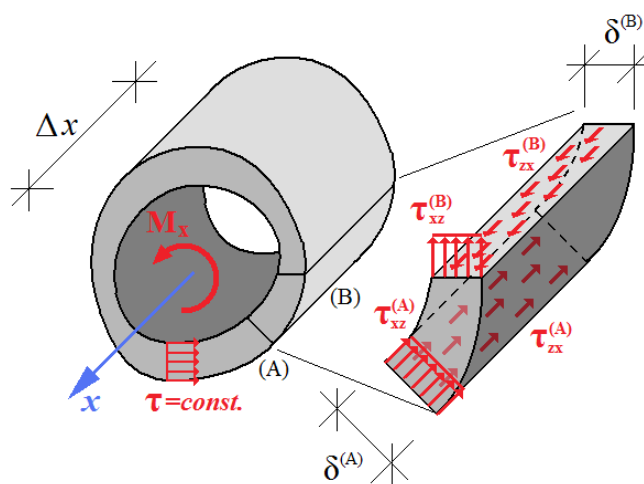
Dla bardzo cienkich przekrojów można przyjąć $\alpha = \beta = 1/3$. Wtedy:

$$\Theta = \frac{3 M_x}{G \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i} \quad I_x = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \quad \tau_{max,i} = \frac{M_x}{I_x} b_i \quad W_x = \min_i \left(\frac{I_x}{b_i} \right) = \frac{I_x}{b_{max}}$$

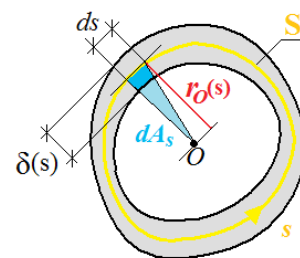
Skręcanie prętów o przekroju cienkościennym zamkniętym (metoda przybliżona – wzory Bredta)

Dla prętów cienkościennych zamkniętych wyprowadzono uproszczone wzory umożliwiające wyznaczenie naprężeń stycznych oraz kąta skręcenia, tzw. **wzory Bredta**. U ich podstaw leży założenie, że **rozkład naprężeń po grubości ścianki jest stały**. Motywacją dla takiego założenia jest przedstawiony już wcześniej rzeczywisty rozkład naprężeń stycznych w przekroju rurowym – jest to rozkład trapezowy, który dla bardzo cienkich ścianek, można z powodzeniem aproksymować rozkładem prostokątnym. Rozpatrzmy wycinek takiego pręta o długości Δx . Następnie, w wycinku tym rozważmy dwa przekroje podłużne – oznaczmy je przez (A) i (B). Grubości ścianek na wysokości tych przekrojów wynoszą odpowiednio $\delta^{(A)}$ i $\delta^{(B)}$. Wskutek skręcania, na wysokości każdego przekroju podłużnego pojawiają się w płaszczyźnie przekroju poprzecznego naprężenia styczne $\tau_{xz}^{(A)}$ i $\tau_{xz}^{(B)}$. W płaszczyźnie przekrojów podłużnych przez ściankę pojawiają się równe im naprężenia $\tau_{zx}^{(A)}$ i $\tau_{zx}^{(B)}$. Możemy wyznaczyć wypadkową tych naprężeń uśredniając ich wartość na długości Δx i po prostu sumując wszystkie naprężenia po odpowiednich polach powierzchni. Warunek równowagi sumy rzutów sił na oś x daje nam:

$$\tau_{xz}^{(A)} \delta^{(A)} \Delta x = \tau_{xz}^{(B)} \delta^{(B)} \Delta x$$



Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że iloczyn $\tau_{xz} \cdot \delta = const.$ w każdym punkcie przekroju. Oznaczmy przez S linię środkową przekroju, tj. linię znajdującą się w każdym punkcie w połowie odległości między konturem wewnętrznym i zewnętrznym przekroju zamkniętego. Wprowadźmy następnie współrzędną łukową s wzdłuż tej krzywej. Przez $r_o(s)$ oznaczmy odległość punktu linii środkowej o współrzędnej s od prostej równoległej do stycznej do S w danym punkcie i przechodzącej przez środek ciężkości przekroju. Wyznamy teraz sumę momentów skręcających od wszystkich naprężeń stycznych w przekroju – musi ona być oczywiście równa momentowi skręcającemu przekrój M_x :



$$M_x = \oint_S [\tau_{xz}(s) \delta(s) r_o(s)] ds = \tau(s) \delta(s) \oint_S [r_o(s)] ds$$

Możemy zauważyć, że $\frac{1}{2} r_o(s) ds = dA_s$, gdzie A_s jest polem powierzchni ograniczonym linią środkową. Dla uproszczenia zapisu pomińmy zależność wszystkich wielkości od s . Otrzymujemy:

$$M_x = 2 \tau_{xz} \delta \cdot \oint_S \frac{1}{2} r_o ds = 2 \tau_{xz} \delta \cdot \iint_{A_s} dA_s = 2 \tau_{xz} \delta A_s \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz}(s) = \frac{M_x}{2 A_s \delta(s)}$$

Stąd maksymalne naprężenia styczne:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{2 A_s \delta_{min}}$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie można zatem zdefiniować jako:

$$W_x = 2 A_s \delta_{min}$$

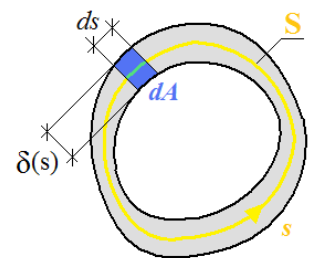
Stałą skręcania dla przekroju cienkościennego zamkniętego wyznaczymy przez porównanie pracy obciążeń zewnętrznch na przemieszczeniach z pracą naprężeń na odkształceniach. Zakładając, że lokalnie (dla danego x) przyrost kąta obrotu zadany jest wartością jednostkowego kąta obrotu θ , rozpatrywany przekrój obróci się (względem drugiego przekroju wyznaczającego nasz wycinek pręta) o kąt $\psi = \theta \cdot \Delta x$. Praca obciążeń zewnętrznch na przemieszczeniach jest równa po prostu:

$$L_z = \frac{1}{2} \cdot M_x \cdot \theta \cdot \Delta x$$

Praca naprężeń na odkształceniach jest równa:

$$L_w = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma \cdot \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta x} dx \cdot \iint_A [\tau \cdot \varepsilon] dA = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \iint_A \frac{\tau^2}{G} dA$$

Przez τ i ε oznaczamy tu naprężenia styczne, których kierunek jest równoległy do stycznej do linii środkowej dla danego s oraz odpowiadające im odkształcenia postaciowe. Możemy zauważyć, że $dA = \delta(s) ds$. Wykorzystując ponadto wyprowadzony uprzednio wzór na naprężenia styczne, otrzymujemy:



$$L_w = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \oint_s \frac{M_x^2}{4 A_s^2 \delta^2(s) G} \delta(s) ds = \frac{1}{8} \cdot \Delta x \cdot \frac{M_x^2}{A_s^2 G} \cdot \oint_s \frac{ds}{\delta(s)}$$

Praca sił zewnętrznch na przemieszczeniach jest równa pracy naprężeń na odkształceniach (o czym przekonamy się w rozdziale poświęconym twierdzeniom energetycznym) – stąd mamy:

$$L_w = L_z \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M_x}{4 A_s^2 G} \cdot \oint_s \frac{ds}{\delta(s)}$$

Przez analogię, do wyprowadzonego dla zginania prostego wzoru $\theta = \frac{M_x}{G I_x}$, możemy wreszcie podsumować nasze rozwiązanie i zapisać komplet wzorów:

WZORY BREDTA

Stała skręcania: $I_x = \frac{4 A_s^2}{\oint_s \frac{ds}{\delta(s)}}$

Maksymalne naprężenia styczne: $\tau_{max} = \frac{M_x}{W} = \frac{M_x}{2 A_s \delta_{min}}$

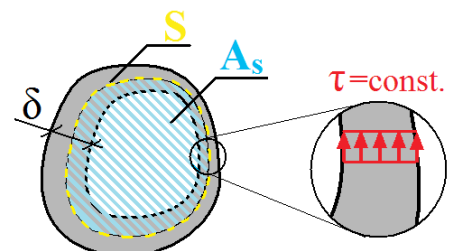
- Dla przekroju o stałej grubości $\delta = const.$:

$$I_x = \frac{4 \delta A_s^2}{S} \quad W_x = 2 A_s \delta_{min}$$

- Dla przekroju rurowego (kołowego) o promieniu R o ściance grubości δ :

$$I_x = 2 \pi R^3 \delta \quad W_x = 2 \pi R^2 \delta$$

gdzie A_s - pole obszaru zamkniętego linią środkową
 S - długość linii środkowej
 δ - grubość ścianki



Sprężyny kołowe

Siły przekrojowe w drucie:

$$M_x = P \cdot \frac{D}{2} \quad N = P \cdot \sin \beta \quad Q = P \cdot \cos \beta \quad M_z = N \cdot \frac{D}{2} = \frac{P D}{2} \sin \beta$$

Dla małych skoków i stosunkowo większych od nich średnic zwojów, kąt β jest bardzo mały i można napisać $N \approx 0$, $Q \approx P$, $M_z \approx 0$.

Naprężenia styczne od skręcania:
$$\tau^M = \frac{M_x}{W_x} = \frac{8 P D}{\pi d^3}$$

Średnie naprężenia styczne od ścinania:
$$\tilde{\tau}^Q = \frac{Q}{A} = \frac{4 P}{\pi d^2}$$

Wypadkowe naprężenia styczne:

$$\tau = \tau^M + \tilde{\tau}^Q = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + \frac{d}{2 D} \right)$$

Zatem dla małych stosunków d/D (cienki drut, lub duża średnica zwojów) wpływ ścinania przekroju jest do pominięcia.

Zmianę długości sprężyny wyznaczmy porównując pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych:

Praca sił zewnętrznych:
$$L_z = \frac{1}{2} P \cdot \Delta L$$

Praca sił wewnętrznych:
$$L_w = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{G I_x} dx = \frac{M_x^2}{2 G I_x} \int_0^l dx \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x}{G I_x} \cdot (n \cdot \pi \cdot D) = \frac{4 n P^2 D^3}{G d^4}$$

Z porównania prac $L_z = L_w$:

$$\Delta L = \frac{8 n D^3 P}{G d^4} \quad \text{skąd podatność sprężyny: } k = \frac{8 n D^3}{G d^4} \quad \Delta L = k P$$