

## 10.1 Zginanie czyste i zginanie proste

Podstawą dla opisu zginania prętów będzie rozwiązanie następującego zagadnienia:

- **ELEMENT I MATERIAŁ:**

- Dany jest nieważki, pryzmatyczny pręt prosty o długości  $L$ .
- Pręt wykonany jest z jednorodnego, izotropowego materiału liniowo sprężystego (materiału Hooke'a).

- **OBCIĄŻENIE:**

- Pręt obciążony jest na obydwu ściankach poprzecznych (w przekrojach  $x=L$  i  $x=0$ ) obciążeniem ciągłym liniowo zmiennym wzdłuż osi  $z$  lokalnego układu głównych centralnych osi bezwładności, normalnym (prostopadłym) do tych ścianek, redukującym się do par leżących w płaszczyźnie  $(xz)$  (zerowa suma układu oraz wektor momentu równoległy do osi  $y$ ).

$$\begin{aligned} \text{-ścianka początkowa: } \mathbf{v} &= [-1; 0; 0]^T & \mathbf{q}(0, y, z) &= [-qz; 0; 0]^T \\ \text{-ścianka końcowa: } \mathbf{v} &= [1; 0; 0]^T & \mathbf{q}(L, y, z) &= [qz; 0; 0]^T \end{aligned}$$

- Pręt jest nieobciążony na swojej powierzchni bocznej.

$$\mathbf{v} = [0; v_y; v_z]^T \quad \mathbf{q} = [0; 0; 0]^T$$

- **PODPARCIE:**

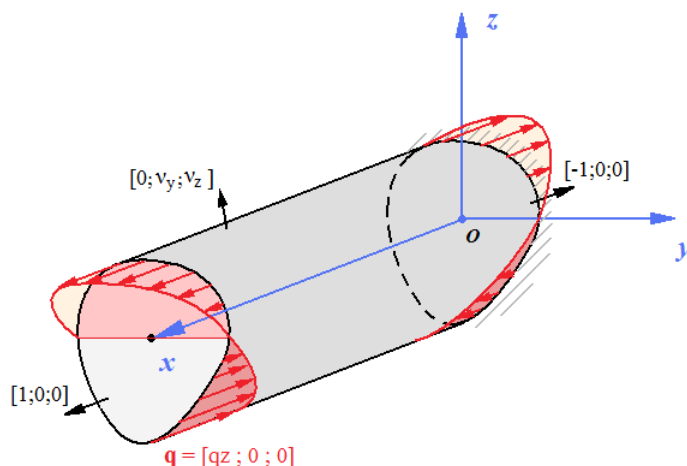
- Środek ciężkości ścianki poprzecznej pręta w przekroju  $x=0$ , tj. punkt  $O(0;0;0)$  jest utwierdzony, tj. nie może doznać żadnych przemieszczeń i żadnych obrotów.

$$\text{-brak przemieszczenia: } \mathbf{u}(0,0,0) = [u_x; u_y; u_z]^T = [0; 0; 0]^T$$

$$\text{-brak obrotu wokół osi } x, y, z: \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_o = 0 \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_o = 0 \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_o = 0$$

- Pozostałe punkty przekroju  $x=0$  podparte są w ten sposób, że nie mogą doznawać przemieszczeń na kierunku osi pręta, ale mogą swobodnie przemieszczać się w płaszczyźnie tego przekroju

$$u_x(0, y, z) = 0$$



Zagadnienie powyższe nazywamy zagadnieniem **czystego zginania**. Rozwiązanie tego zagadnienia, na mocy zasady Saint-Venanta, będzie mogło również posłużyć do opisu innych przypadków, w których obciążenie zewnętrzne redukuje się do dwóch par zginających, przyłożonych do ścianek poprzecznych pręta.

Zadanie rozwiązuje się tzw. **metodą półodwrotną, podejściem statycznym**. Rozwiązanie to ma następujący schemat:

1. Przyjąć rozkład naprężeń w pręcie, spełniający równania równowagi Naviera, statyczne (obciążeniowe) warunki brzegowe i równoważny w każdym przekroju układowi sił zewnętrznym przyłożonym do myślowo odciętej części ciała.
2. Dla założonych naprężeń wyznaczyć odkształcenia na podstawie równań uogólnionego prawa Hooke'a.
3. Sprawdzić czy wyznaczone odkształcenia spełniają warunki nierozdzielności.
4. Dla obliczonych odkształceń wyznaczyć przemieszczenia na podstawie równań geometrycznych Cauchy'ego.
5. Sprawdzić czy wyznaczone przemieszczenia spełniają kinematyczne (podporowe) warunki brzegowe.

Jeżeli przypuszczone rozwiązanie spełniać będzie wszystkie równania i warunki, to – ponieważ dowodzi się jednoznaczności rozwiązań zagadnień liniowej teorii sprężystości – będzie ono właśnie tym jedynym, poszukiwanym rozwiązaniem.

### 1. Przypuszczenie rozkładu naprężeń

Uzasadnione wydaje się przypuszczenie, że ciągle rozłożone obciążenie liniowo zmienne, będące w istocie gęstością sił na jednostkę powierzchni (o wymiarze Pa), powodować będzie wewnątrz pręta analogiczny rozkład naprężeń normalnych na kierunku osi pręta. Brak obciążenia poprzecznego i swoboda deformacji w kierunkach poprzecznych do osi pręta sugeruje, że pozostałe składowe tensora naprężenia będą równe 0. Przyjmujemy zatem:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qz & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix}$$

Sprawdzić należy czy taki rozkład naprężeń spełnia statyczne (obciążeniowe) warunki brzegowe  $\sigma \cdot \mathbf{v} = \mathbf{q}$ .

Dla ścianek poprzecznych - początkowej (wzory ze znakiem „-”) i końcowej („+”):

- wektor obciążenia  $\mathbf{q} = [\pm q ; 0 ; 0]^T$
- normalna zewnętrzna  $\mathbf{v} = [\pm 1 ; 0 ; 0]^T$

$$\sigma \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} qz & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm qz \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Dla pobocznicy:

- wektor obciążenia  $\mathbf{q} = [0 ; 0 ; 0]^T$
- normalna zewnętrzna  $\mathbf{v} = [0 ; v_y ; v_z]^T$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} qz & 0 & 0 \\ \text{sym} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Widać zatem, że założony rozkład naprężeń spełnia wszystkie statyczne warunki brzegowe. Łatwo sprawdzić również, że spełnione są równania równowagi Naviera:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ponieważ naprężenia  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  opisane są tymi samymi funkcjami co składowe obciążenia  $q_x, q_y, q_z$ , stąd oczywista jest równoważność układu sił przekrojowych w dowolnym przekroju pręta z układem sił zewnętrznych przyłożonych do jego odciętej części.

$$\begin{aligned} F_x(W_1) &= \iint_A \sigma_{xx} dA = \iint_A q_x dA = F_x(Z_2) & M_x(W_1) &= \iint_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = \iint_A (q_z y - q_y z) dA = M_x(Z_2) \\ F_y(W_1) &= \iint_A \tau_{xy} dA = \iint_A q_y dA = F_y(Z_2) & M_y(W_1) &= \iint_A \sigma_{xx} z dA = \iint_A q_x z dA = M_y(Z_2) \\ F_z(W_1) &= \iint_A \tau_{xz} dA = \iint_A q_z dA = F_z(Z_2) & M_z(W_1) &= \iint_A (-\sigma_{xx} y) dA = \iint_A (-q_x y) dA = M_z(Z_2) \end{aligned}$$

Pokażemy, że dane obciążenie redukuje się do pary zginającej w płaszczyźnie  $(xz)$  :

$$\begin{aligned} F_x &= \iint_A q_x dA = \iint_A qz dA = q \underbrace{\iint_A z dA}_{S_y=0} = 0 \\ F_y &= \iint_A q_y dA = \iint_A 0 dA = 0 \\ F_z &= \iint_A q_z dA = \iint_A 0 dA = 0 \\ M_x &= \iint_A (q_z y - q_y z) dA = \iint_A 0 dA = 0 \\ M_y &= \iint_A q_x z dA = \iint_A q z^2 dA = q \underbrace{\iint_A z^2 dA}_{I_y} = q I_y \\ M_z &= \iint_A (-q_x y) dA = -\iint_A qz y dA = q \underbrace{\iint_A zy dA}_{D_{yz}=0} = 0 \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach skorzystaliśmy z faktu, że rozpatrywany układ współrzędnych jest układem głównych centralnych osi bezwładności, w którym zarówno momenty statyczne, jak i moment dewiacji są równe 0.

## 2. Wyznaczenie odkształceń

Na podstawie równań fizycznych prawa Hooke'a wyznaczamy odkształcenia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{2G} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}\end{aligned}$$

$\varepsilon_{xx} = \frac{q}{E}z$	$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu q}{E}z$	$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu q}{E}z$
$\varepsilon_{yz} = 0$	$\varepsilon_{zx} = 0$	$\varepsilon_{xy} = 0$

## 3. Sprawdzenie warunków nierozdzielności

Warunki nierozdzielności:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} & , & & \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} & , & & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & , & & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Ponieważ odkształcenia mają liniowy rozkład w przestrzeni, a w równaniach nierozdzielności występują jedynie drugie pochodne odkształceń, stąd równania powyższe spełnione są w sposób tożsamościowy.

## 4. Wyznaczenie przemieszczeń

Składowe wektora przemieszczenia są rozwiązaniem układu równań geometrycznych Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} & \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} & \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yz} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \varepsilon_{zx} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xy} \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego niejednorodnego układu liniowych, cząstkowych równań różniczkowych pierwszego rzędu będzie sumą rozwiązania ogólnego układu jednorodnego (z zerowymi prawymi stronami) oraz dowolnego szczególnego rozwiązania układu niejednorodnego. Wyznamy je kolejno.

Rozwiązanie ogólne układu jednorodnego:

Rozwiązanie to jest najogólniejszym przemieszczeniem ciała nieodkształconego, tj. bryły sztywnej – w ogólności jest to złożenie translacji i obrotu wokół chwilowego środka obrotu. Funkcję tę wyznaczamy w identyczny sposób, jak w przypadku rozwiązania zagadnienia czystego rozciągania:

$$\begin{cases} u_{x,og}(x, y, z) = a - d y + e z \\ u_{y,og}(x, y, z) = b - f z + d x \\ u_{z,og}(x, y, z) = c - e x + f y \end{cases}$$

Rozwiązanie szczególne układu niejednorodnego:

Poszukujemy ogólnego rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{q}{E} \cdot z & \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\nu q}{E} \cdot z & \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu q}{E} \cdot z \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań znaleźć całkując pierwsze trzy równania – całkując pamiętać musimy, że w ogólności każda z poszukiwanych funkcji zależy od wszystkich trzech zmiennych niezależnych. „Stała całkowania” jest może być zatem funkcją zależną od wszystkich zmiennych niezależnych różnych od tej, względem której całkujemy:

$$u_{x,sz} = \frac{q}{E} z x + \varphi(y, z) \quad u_{y,sz} = -\frac{\nu q}{E} z y + \psi(z, x) \quad u_{z,sz} = -\frac{\nu q}{2E} z^2 + \vartheta(x, y)$$

Nieznane funkcje  $\varphi, \psi, \vartheta$  wyznaczymy na podstawie pozostałych równań dla odkształceń postaciowych:

$$-\frac{\nu q}{E} y + \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \quad \frac{q}{E} x + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Ponieważ rozwiązanie szczególne można przyjąć dowolnie, stąd można założyć:

$$\varphi(y, z) \equiv 0, \quad \psi(z, x) \equiv 0$$

Ostatnie równanie jest spełnione tożsamościowo. Z pozostałych dwóch możemy napisać:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\nu q}{E} y \Rightarrow \vartheta(x, y) = \frac{\nu q}{2E} y^2 + \zeta(x)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{q}{E} x \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{q}{E} x \Rightarrow \zeta(x) = -\frac{q}{2E} x^2 \Rightarrow \vartheta(x) = \frac{q}{2E} (\nu y^2 - x^2)$$

Stąd:

$$u_{x,sz} = \frac{q}{E} z x \quad u_{y,sz} = -\frac{\nu q}{E} z y \quad u_{z,sz} = \frac{q}{2E} (\nu y^2 - \nu z^2 - x^2)$$

Rozkład przemieszczeń, będący rozwiązaniem niejednorodnego układu równań Cauchy'ego jest zatem dany funkcjami:

$$\begin{cases} u_x = u_{x,og} + u_{x,sz} = a - d y + e z + \frac{q}{E} z x \\ u_y = u_{y,og} + u_{y,sz} = b - f z + d x - \frac{\nu q}{E} z y \\ u_z = u_{z,og} + u_{z,sz} = c - e x + f y + \frac{q}{2E} (\nu y^2 - \nu z^2 - x^2) \end{cases}$$

## 5. Sprawdzenie warunków podporowych

Warunek braku przemieszczeń punktu  $O(0,0,0)$  daje:

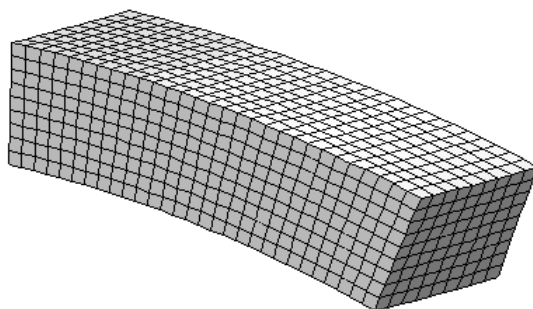
$$\begin{cases} u_x(0,0,0) = a=0 \\ u_y(0,0,0) = b=0 \\ u_z(0,0,0) = c=0 \end{cases}$$

Warunek braku obrotów wokół osi  $y$  i  $z$  w punkcie  $O(0,0,0)$  daje:

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_{(0,0,0)} = f=0 \quad \left. \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} = d=0 \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial x} \right|_{(0,0,0)} = -e=0$$

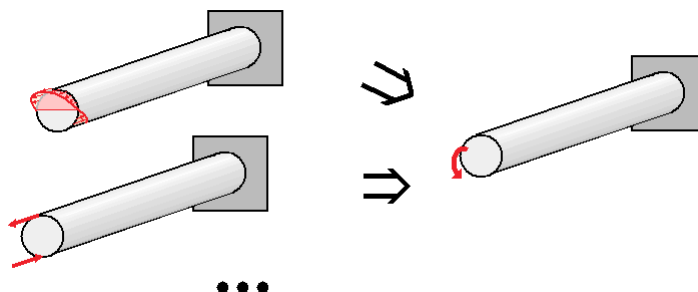
Wobec powyższych zależności, spełniony jest także warunek braku przemieszczeń na kierunku osi  $x$  w przekroju  $x=0$ . Ostatecznie więc rozkład przemieszczeń dany jest funkcjami:

$$u_x = \frac{q}{E} z x \quad u_y = -\frac{\nu q}{E} z y \quad u_z = \frac{q}{2E} (\nu y^2 - \nu z^2 - x^2)$$



Przyjęte rozwiązanie spełnia wszystkie równania i warunki brzegowe, jest zatem ścisłym rozwiązaniem zagadnienia czystego rozciągania.

Zgodnie z zasadą Saint-Venanta, rozwiązanie zagadnienia zginania czystego można zastosować z dobrym przybliżeniem dla jakiegokolwiek przypadku, w którym pręt obciążony jest na ściankach poprzecznych układem sił redukującym się w ich środku ciężkości do pary zginającej. Takie zagadnienia nazywamy **zginaniem prostym**.



Ponadto, powszechnie, z dobrą dokładnością, stosuje się powyższe rozwiązanie również dla prętów o przekroju i obciążeniu rozciągającym zmiennym na długości. Należy przy tym mieć jednak świadomość, że stosowane rozwiązanie ma w takim przypadku jedynie charakter przybliżony – szczególnie dotyczy to obszarów bliskich skokowej zmiany geometrii lub obciążenia, w których z reguły występuje koncentracja naprężeń.

## PODSUMOWANIE ROZWIĄZANIA:

Wykorzystując zależność między momentem zginającym a naprężeniem normalnym, przemieszczenie, odkształcenie i naprężenie można wyrazić w następujący sposób:

<p>Tensor naprężenia:</p> $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix}$	$\sigma = \frac{M_y}{I_z} \cdot z \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = [\text{MPa}]$	<p>Tensor odkształcenia:</p> $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \sigma \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ & -\sigma \frac{\nu}{E} & 0 \\ \text{sym} & & -\sigma \frac{\nu}{E} \end{bmatrix}$
---	--	--

gdzie:

$E$  – moduł Younga (moduł sztywności podłużnej) [Pa]

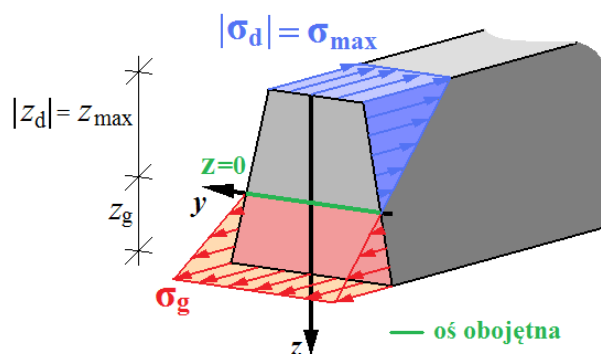
$\nu$  – współczynnik Poissona [-]

$I_y$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta [m<sup>4</sup>]

Rozkład naprężeń normalnych w każdym przekroju zmienia się liniowo – końcówki wektorów naprężenia w każdym punkcie przekroju tworzą **płaszczyznę** nachyloną do płaszczyzny przekroju i przecinającą ją wzdłuż osi  $y$ . Mówi się także o **bryle naprężeń** – jest to bryła ograniczona powierzchnią przekroju, pobocznicą pręta oraz powierzchnią, którą tworzą końcówki wektorów naprężenia

Na osi  $y$  (dla której  $z=0$ ) naprężenia normalne są równe 0 – miejsce geometryczne wszystkich takich punktów, w których naprężenia są równe 0 nazywamy **osią obojętną** – jest to linia prosta. Oś obojętna dzieli przekrój na dwie strefy – **strefę ściskaną i strefę rozciąganą**. Naprężenia normalne są tym większe im dalej dany punkt jest odległy od osi obojętnej. Oznaczając odległość punktu najbardziej oddalonego od osi obojętnej przez  $z_{max}$  możemy napisać:

$$\sigma_{max} = \sigma(z=z_{max}) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} = \frac{M_y}{W_y} \quad \text{gdzie} \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$$



Parametr  $W_y$  nazywamy **wskaźnikiem wytrzymałości na zginanie** i dla zadanej płaszczyzny zginania jest charakterystyką geometryczną przekroju. Dla przekrojów niesymetrycznych odległość od skrajnych włókien dolnych i górnych, w których występują ekstremalne naprężenia rozciągające i ściskające (lub na odwrót), może być różna. Dla pręta obciążonego dodatnim momentem zginającym, zorientowanym w ten sposób, że oś  $z$

zorientowana jest w dół (co jest powszechnie stosowaną praktyką) ekstremalne naprężenia są równe:

$$\sigma_d = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_d \quad \sigma_g = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_g$$

## ZASADA PŁASKICH PRZEKROJÓW BERNOULLIEGO

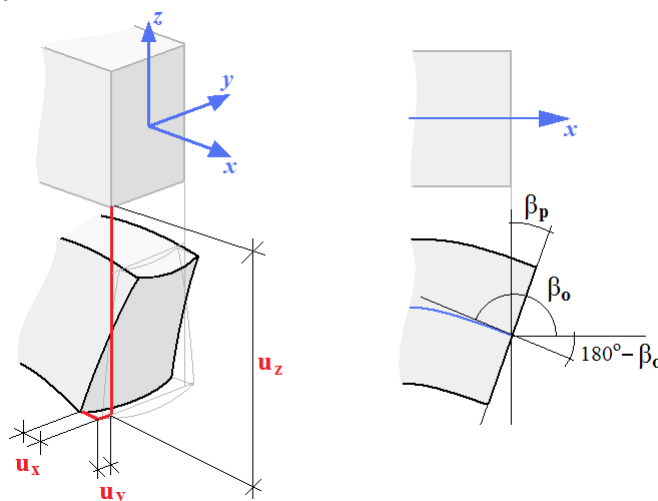
Trzeba również zwrócić uwagę na ważną cechę uzyskanego rozwiązania, która będzie dla nas podstawą opisu deformacji belek zginanych. Rozpatrzmy dowolny płaski przekrój poprzeczny, prostopadły do osi pręta  $x$ . Przyjmijmy, że odpowiada on współrzędnej  $x_0 = const$ . Przy ustalonej wartości  $x$ , zmienne  $y$  i  $z$  określają położenie punktów tego przekroju, tj. leżące na pewnej płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta. Wyznamy teraz położenie tych punktów po deformacji – w tym celu skorzystamy z obliczonych funkcji przemieszczeń. Wyróżnimy:

- **przemieszczenia w płaszczyźnie przekroju**

$$y' = y + u_y = y - \frac{\nu q}{E} z y$$

$$z' = z + u_z = z + \frac{q}{2E} (\nu y^2 - \nu z^2 - x_0^2)$$

Na przemieszczenia powyższe składa przesunięcie przekroju związane z ugięciem belki, oraz jego deformacja, związana ze zwięźaniem się przekroju w strefie rozciąganej i jego pęcznieniem w strefie ściskanej. A zatem przekrój doznaje przemieszczenia w pierwotnej płaszczyźnie tego przekroju, a ponadto zmienia swój kształt.



- **przemieszczenie prostopadłe do przekroju (wzdłuż osi pręta)**

$$x' = x_0 + u_x = x_0 + \frac{q}{E} z x_0$$

Wszystkie punkty przekroju doznają ponadto przesunięć wzdłuż osi pręta – rozkład tych przemieszczeń jest liniowo zależy od zmiennej  $z$ , a zatem końcówki wektorów przemieszczeń tworzą powierzchnię płaską. Ponieważ przekrój już przed deformacją był płaski, w takim razie mimo że zmienił on swój kształt, to jednak nadal pozostaje płaski. Możemy również wyznaczyć kąt nachylenia tego przekroju względem pionowej osi  $z$ :

$$\operatorname{tg} \beta_p = \frac{dx'}{dz} = \frac{q x_0}{E}$$

Wyznamy teraz kąt, pod jakim nachylona jest oś pręta to pierwotnego kierunku osi  $x$  (przed deformacją). Funkcja opisująca kształt zdeformowanej osi pręta jest równa:

$$w(x) = u_z(x, y=0, z=0) = -\frac{q x^2}{2E}$$



Kąt nachylenia tej krzywej w miejscu przekroju  $x_0$  jest równy:  $\operatorname{tg} \beta_o = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} = -\frac{q x_0}{E}$

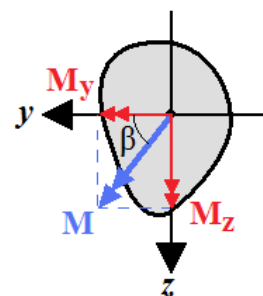
Z prostych zależności trygonometrycznych mamy:  $\operatorname{tg}(180^\circ - \beta_o) = \operatorname{tg} \beta_p$ . Ponieważ kąty są małe i wartości tangensów kątów odpowiadają w przybliżeniu samym kątom, stąd widzimy, że kąt zawarty między osią poziomą a styczną do odkształconej osi pręta jest taki sam, jak kąt między płaszczyzną zdeformowanego przekroju a osią pionową – zatem przekrój po deformacji jest nachylony do odkształconej osi pręta pod kątem prostym.

Możemy więc już w pełni sformułować **zasadę płaskich przekrojów Bernoulliego**:

Przekrój **płaski i prostopadły** do osi pręta, po deformacji (zginaniu) pozostaje **płaski i prostopadły** do odkształconej osi pręta.

## 10.2 Zginanie ukośne

**Zginaniem ukośnym** nazywamy przypadek obciążenia, w którym wektor momentu zginającego nie jest równoległy do żadnej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju pręta, jak było to w przypadku zginania czystego. Wektor ten możemy jednak rozłożyć na składowe równoległe do tych osi – jeśli wektor momentu tworzy z osią  $y$  kąt  $\beta$  (orientacja jak na rysunku!) wtedy:



$$\begin{aligned} M_y &= M \cos \beta & \operatorname{tg} \beta &= \frac{M_z}{M_y} \\ M_z &= M \sin \beta \end{aligned}$$

Zgodnie z **zasadą superpozycji** rozkład naprężeń normalnych w takim przypadku można zapisać w następującej formie:

$$\sigma_{xx}(y, z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Wzór ten określa **bryłę naprężeń** – powierzchnię bryły tej jednoznacznie wyznaczają dowolne **trzy niewspółliniowe punkty**.

Jeśli stosuje się układ osi zorientowany inaczej niż to przyjęto w tym opracowaniu, wtedy znak przy odpowiednim składniku we wzorze określa się w ten sposób, że sprawdza się w jaki sposób wektor momentu zorientowany zgodnie z odpowiadającą mu osią oddziałuje na pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych – jeśli rozciąga, wtedy we wzorze przyjmuje się „+”, jeśli ściska, przyjmuje się „-”. Przykładowo:

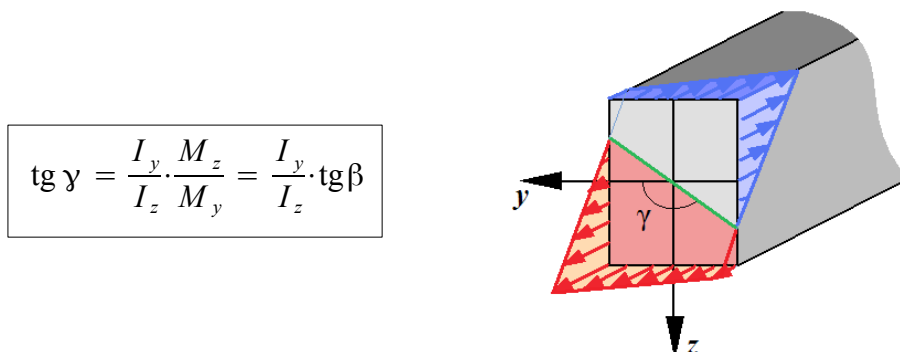
$$\sigma(x, y) = \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

The diagram shows a rectangular cross-section with a coordinate system where the x-axis is horizontal and the y-axis is vertical. The stress distribution is indicated by signs: '+' in the top-left and bottom-right quadrants, and '-' in the top-right and bottom-left quadrants. A red arrow points to the right along the x-axis, and a blue arrow points upwards along the y-axis.

Dla przypadku zginania ukośnego, oś obojętna w układzie głównych centralnych osi bezwładności określona jest wzorem:

$$\sigma(y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} \cdot y = \frac{I_y}{I_z} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot y$$

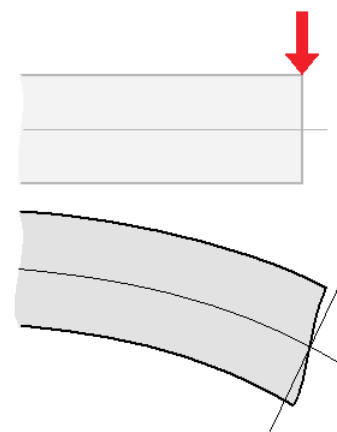
Oś obojętna przechodzi przez punkt (0,0) i jest nachylona do osi y pod kątem  $\gamma$



A zatem, jeśli tylko  $M_z$  i  $M_y$  są różne od 0 oraz  $I_y \neq I_z$ , to oś obojętna nigdy nie będzie pokrywać się z kierunkiem wektora momentu. Sytuacja taka może mieć miejsce tylko dla przypadków zginania prostego lub dla przekrojów, które posiadają więcej niż dwie osie symetrii (kwadrat, koło wielokąty foremne itp.).

### 10.3 Zginanie poprzeczne (zginanie ze ścinaniem)

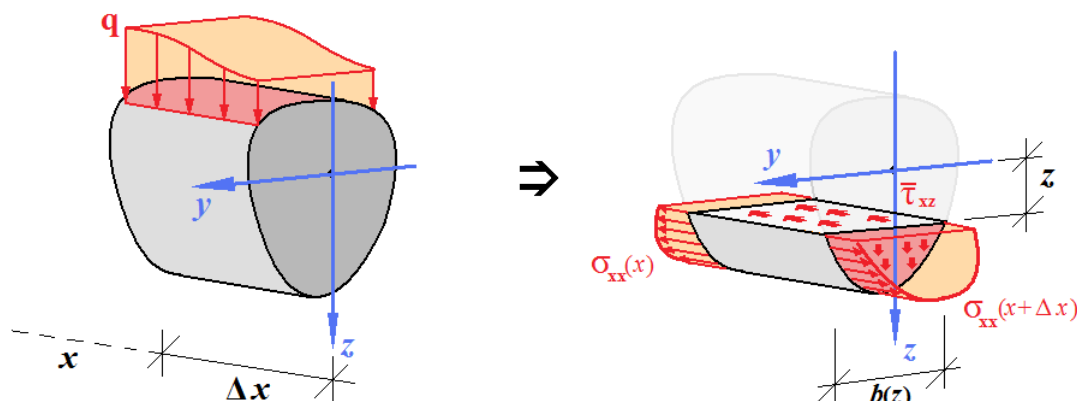
Dotychczas rozważaliśmy tylko przypadki, w których układ sił zewnętrznych redukował się jedynie do momentu zginającego. Z reguły jednak zginanie prętów odbywa się wskutek działania sił poprzecznych – ich obecność powoduje występowanie naprężeń stycznych i odkształceń postaciowych. To sprawia, że zasada płaskich przekrojów Bernoulliego nie jest w tym przypadku spełniona – **przekrój poprzeczny pod wpływem naprężeń stycznych ulega deplanacji**, tj. przestaje być płaski. Ścisłe rozwiązanie tego zagadnienia jest wyjątkowo trudne – stosuje się zatem **rozwiązanie przybliżone**. Przyjmować będziemy, że przemieszczenia i rozkład naprężeń normalnych są takie same jak w przypadku zginania czystego, jednakże w tensorze naprężenia uwzględnimy naprężenia styczne.



#### NAPRĘŻENIA STYCZNE

Rozważmy wycinek pręta o długości  $\Delta x$  obciążony siłami poprzecznymi. Następnie dokonajmy cięcia przez ten wycinek płaszczyzną prostopadłą do osi z, przecinającą tę oś w pewnym ustalonym punkcie z. Ta odcięta część obciążona jest układem naprężeń – są to naprężenia normalne  $\sigma_{xx}$  (o których zakładamy, że mają rozkład liniowy, taki jak w przypadku zginania czystego) oraz naprężenia styczne  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  będące wynikiem działania sił poprzecznych. Dla

uproszczenia przyjmijmy, że rozkład tych naprężeń na poziomej powierzchni cięcia jest stały, równy pewnemu średniemu naprężeniu  $\bar{\tau}_{xz}$  :



Zapiszmy równanie równowagi sił na kierunku osi  $x$ :

$$\sum X = - \iint_{A(z)} \sigma(x) dA - \Delta x \cdot b(z) \cdot \bar{\tau}_{xz} + \iint_{A(z)} \sigma(x + \Delta x) dA = 0$$

Wykorzystujemy zależności opisujące rozkład naprężeń normalnych przy zginaniu:

$$- \iint_{A(z)} \frac{M(x)}{I_x} z dA - \Delta x \cdot b(z) \cdot \bar{\tau}_{xz} + \iint_{A(z)} \frac{M(x + \Delta x)}{I_y} z dA = 0$$

$$\frac{1}{I_y} [M(x + \Delta x) - M(x)] \cdot \underbrace{\iint_{A(z)} z dA}_{S_y(z)} - \Delta x \cdot b(z) \cdot \bar{\tau}_{xz} = 0$$

Dzieląc obie strony równania przez  $\Delta x$  otrzymujemy:

$$\frac{S_y(z)}{I_y} \cdot \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} - b(z) \cdot \bar{\tau}_{xz} = 0$$

Po przekształceniach:

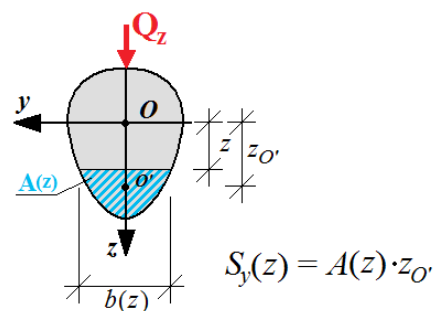
$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{S_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \cdot \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x}$$

Dokonując przejścia granicznego  $\Delta x \rightarrow 0$  i wykorzystując zależność różniczkową między momentem zginającym i siłą poprzeczną, otrzymujemy:

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{S_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \frac{S_y(z)}{I_y \cdot b(z)} \cdot \frac{dM_y}{dx} = \frac{Q_z \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b(z)}$$

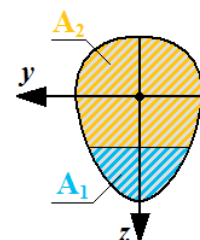
Przyjmując, że naprężenia styczne są faktycznie równe założonemu naprężeniu średniemu, otrzymujemy ostatecznie wzór opisujący rozkład naprężeń stycznych przy zginaniu poprzecznym – tzw. **wzór Żurawskiego**:

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{Q_z(x) \cdot S_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

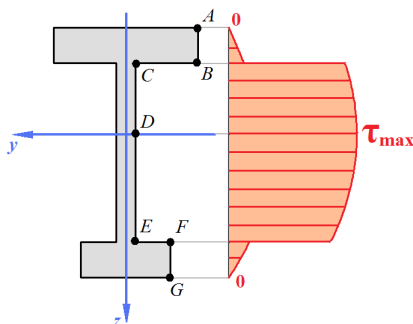


Funkcja  $S_y(z)$  oznacza **moment statyczny odciętej części przekroju** (w odległości  $z$ ) **względem głównej centralnej** (przechodzącej przez środek ciężkości) **osi bezwładności  $y$** , przy czym bierzemy tę część przekroju, która jest po stronie większych wartości  $z$ . Niekiedy jednak wygodniej jest skorzystać z następującej zależności:

$$\underbrace{\iint_A z dA}_{S_y=0} = \underbrace{\iint_{A_1} z dA}_{S_y(z)} + \underbrace{\iint_{A_2} z dA} \Rightarrow S_y(z) = \iint_{A_1} z dA = - \iint_{A_2} z dA$$



Rozkład naprężeń stycznych przy stałej szerokości przekroju  $b$  jest kwadratową funkcją zmiennej  $z$ . **Naprężenia styczne przyjmują lokalnie maksymalną wartość na wysokości środka ciężkości**, tj. dla  $z=0$ . Ponadto rozkład naprężeń stycznych jest **odwrotnie proporcjonalny do szerokości przekroju** dla danego  $z$ . Typowy rozkład naprężeń stycznych dla przekroju dwuteowego widoczny jest na rysunku.

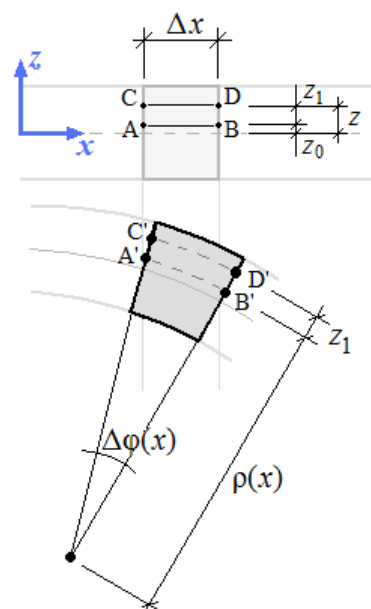


## 10.4 Ugięcie osi belki – równanie belki

Na początku obecnego rozdziału wyznaczyliśmy równanie opisujące kształt zdeformowanej osi belki – równanie to stosuje się jednak tylko do postawionego na początku zagadnienia, tj. zginania momentem zginającym o stałej wartości na długości pręta. Sytuacja taka jest bardzo rzadka. W niemal wszystkich przypadkach zginanie ma miejsce z uwagi na obecność obciążenia poprzecznego. Wiemy natomiast, że siła poprzeczna jest pochodną rozkładu momentów zginających – skoro jest ona w tych przypadkach różna od 0, stąd rozkład momentów musi być wtedy zmienny na długości pręta. Poszukujemy więc ogólniejszej zależności między obciążeniem zewnętrznym a deformacją układu. Zależność tę wyprowadzimy na drodze stosunkowo prostych rozważań geometrycznych przy następujących założeniach:

- Przesunięcia i pochodne przemieszczeń są małe.
- Pomijamy wpływ sił poprzecznych na deformację belki.
- Obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów Bernoulliego.
- Pomijamy wpływ naprężeń  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$  jako znacznie mniejszych od  $\sigma_{xx}$

Rozważmy wycinek pręta o długości  $\Delta x$ . Oznaczmy w wycinku tym dwa włókna: AB i CD. W wyniku deformacji otrzymamy odpowiednio włókna A'B' oraz C'D'. O włóknie AB zakładamy, że nie zmienia swojej długości. Jego położenie w układzie głównych centralnych osi bezwładności przekroju opisujemy współrzędną  $z_0$ , którą wyznaczymy dopiero później. Włókno CD będzie dowolnym włókniem przekroju, znajdującym się w odległości  $z = z_1 + z_0$  od środka ciężkości. W wyniku zginania, wycinek ten ulegnie przemieszczeniu (przesunięcie i obrót) oraz odkształceniu – zgodnie z założeniem hipotezy Bernoulliego przekroje płaskie i prostopadłe do osi belki przed deformacją, pozostają płaskie i prostopadłe do zdeformowanej osi. Odkształcenie normalne  $\varepsilon_{xx}$  we włóknie CD obliczymy jako graniczną wartość jego wydłużenia względnego:



$$\varepsilon_{xx} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{L' - L}{L} = \lim_{|CD| \rightarrow 0} \frac{|C'D'| - |CD|}{|CD|} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{(\rho(x) + z_1) \cdot \Delta \varphi(x) - \rho \cdot \Delta \varphi(x)}{\rho(x) \cdot \Delta \varphi(x)} = \frac{z_1}{\rho(x)}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a i założeniem o pomijalnie małych wartościach naprężeń  $\sigma_{yy}$  i  $\sigma_{zz}$ , naprężenie normalne  $\sigma_{xx}$  jest równe:

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \frac{z_1}{\rho(x)}$$

Układ naprężeń normalnych  $\sigma_{xx}$  musi spełniać równania równowagi:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ M_y = M_y(x) \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Pomijamy tutaj jednak kwestię obecności sił poprzecznych oraz naprężeń stycznych. Siła osiowa jest równa 0, stąd możemy napisać:

$$F_x = \iint_A \sigma_{xx} dA = \iint_A E \frac{z_1}{\rho(x)} dA = \frac{E}{\rho(x)} \iint_A z_1 dA = 0$$

Brak obecności siły osiowej wymaga, aby ostatnia całka była równa 0. Całka ta jest równa momentowi statycznemu przekroju względem osi  $z_0$ . Może ona być równa 0 tylko wtedy, gdy jest to oś przechodząca przez środek ciężkości przekroju, a zatem konsekwencją przyjętych założeń jest to, że osią która nie doznaje deformacji, a zarazem osią obojętną jest główna centralna oś bezwładności równoległa do osi zginania. Możemy zatem napisać  $z_0=0$ , co daje  $z_1 = z$ .

Równowaga momentów  $M_z$ :

$$M_z = \iint_A (-\sigma_{xy}y) dA = -\frac{E}{\rho(x)} \underbrace{\iint_A zy dA}_{D_y=0} = 0$$

Z uwagi na fakt, że  $z_0=0$  jest osią centralną, równanie to jest spełnione w sposób tożsamościowy, ponieważ ostatnia całka jest równa momentowi dewiacji, który w układzie głównym centralnym jest zawsze równy 0. Pozostaje nam już tylko równowaga momentów  $M_y$ :

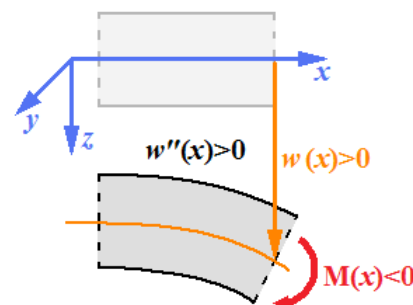
$$M_y = \iint_A \sigma_{xx}z dA = \frac{E}{\rho(x)} \underbrace{\iint_A z^2 dA}_{I_y} = \frac{EI_y}{\rho(x)} = M_y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_y(x)}{EI_y}$$

Lewa strona powyższego równania przedstawia odwrotność promienia krzywizny, czyli krzywiznę zdeformowanej osi belki. Z geometrii analitycznej wiemy, że krzywizna krzywej płaskiej  $w(x)$  wyraża się w następujący sposób:

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{(1+[w'(x)]^2)^{3/2}}$$

Krzywizna i promień krzywizny, są zawsze nieujemne, stąd zależność między nimi a funkcją momentów zginających jest określona z dokładnością do znaku. Znak ten określamy w następujący sposób: druga pochodna funkcji stanowi o jej wypukłości. Gdy jest dodatnia, wtedy funkcja jest „wypukła” - tj. dla dodatnich jej wartości, skierowana jest swoją wypukłością w stronę osi  $x$ . To znaczy, że włókna rozciągane znajdują się właśnie po tej stronie belki, która jest bliżej osi  $x$  - te włókna rozciąga moment zginający o wartości ujemnej, stąd otrzymujemy ostatecznie równanie różniczkowe na ugięcie belki  $w(x)$  w postaci:

$$\frac{w''(x)}{(1+[w'(x)]^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$



Powyższe równanie jest równaniem nieliniowym – znalezienie rozwiązania takiego równania jest zadaniem wyjątkowo trudnym. Jednakże zgodnie z założeniem o małych pochodnych przemieszczeń kwadrat pochodnej w mianowniku powyższego równania będzie bliski 0, a cały mianownik będzie równy 1. Otrzymamy wtedy następujące równanie:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach – jego rozwiązanie sprowadza się do dwukrotnego scałkowania funkcji rozkładu momentów zginających. Dwie stałe całkowania, jakie pojawiają się przy tej okazji wyznaczamy z dwóch warunków brzegowych, jakie trzeba określić dla tego równania – są to warunki podporowe ograniczające ugięcia lub kąt ugięcia, tj. pochodną funkcji ugięcia.

Jeśli uwzględnimy teraz znane zależności między siłami przekrojowymi a gęstością obciążenia zewnętrznego, otrzymamy ogólne **równanie zginanej belki Eulera-Bernoulliego**:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q_z(x)}{EI_y}$$

które uzupełnione musi być układem 4 warunków brzegowych: statycznych (obciążeniowych) lub kinematycznych (przemieszczeniowych), które określamy na podstawie warunków podparcia belki. Bardziej szczegółowo kwestia ta omówiona jest w rozdziale poświęconym wyznaczaniu ugięć.

Komplet zależności różniczkowych dla belki zginanej przedstawia się następująco:

Kąt ugięcia:

$$\varphi = \frac{dw}{dx}$$

Moment zginający:

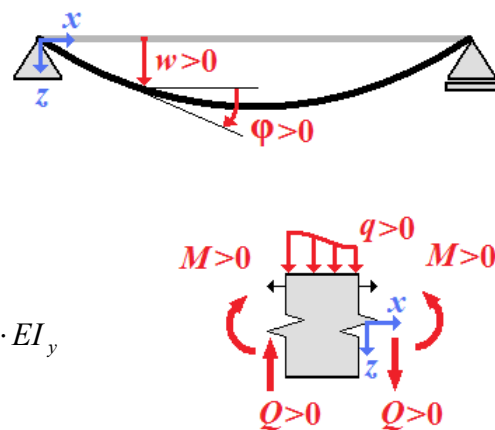
$$M_y = -\frac{d\varphi}{dx} \cdot EI_y = -\frac{d^2 w}{dx^2} \cdot EI_y$$

Siła poprzeczna:

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx} = -\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cdot EI_y = -\frac{d^3 w}{dx^3} \cdot EI_y$$

Gęstość obciążenia:

$$q_z = -\frac{dQ_z}{dx} = -\frac{d^2 M_y}{dx^2} = \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \cdot EI_y = \frac{d^4 w}{dx^4} \cdot EI_y$$



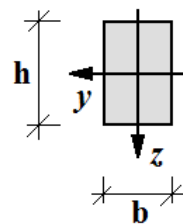
## **10.5 Zginanie prętów silnie zakrzywionych**



## ZGINANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

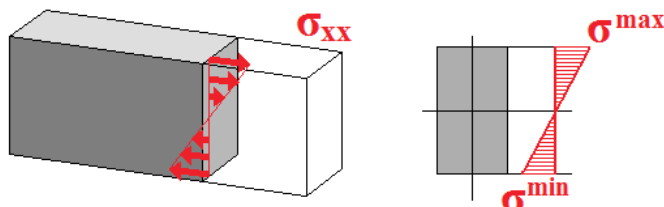
### NAPRĘŻENIA NORMALNE

Moment bezwładności przekroju:  $I_y = \frac{bh^3}{12}$



Rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_{xx}$  :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{12M_y}{bh^3} z$$



Maksymalne naprężenia normalne dla  $z = \pm h/2$ :

$$\sigma^{max} = \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma^{min} = -\frac{M_y}{W_y},$$

gdzie wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

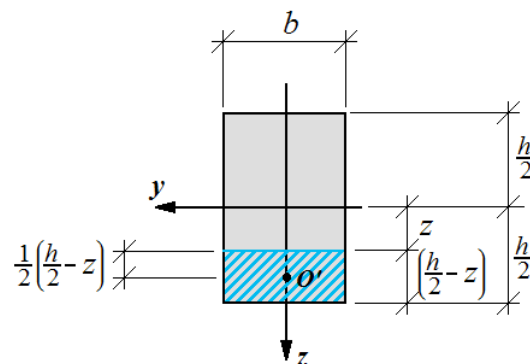
$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{bh^2}{6}$$

### NAPRĘŻENIA STYCZNE

Szerokość przekroju:  $b(z) = b$

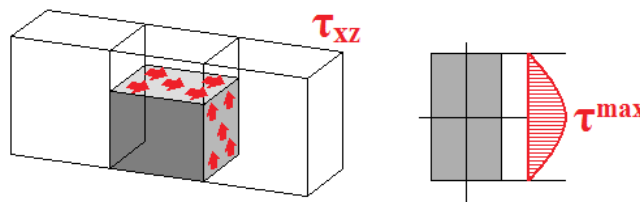
Funkcja  $S_y(z)$  dla przekroju prostokątnego:

$$S_y(z) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \left[z + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right)\right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - z\right) \left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$



Rozkład naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y(z)}{b_y(z) \cdot I_y} = \frac{6Q_z}{bh} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right)$$



**Brak naprężeń  $\tau_{xy}$  !**

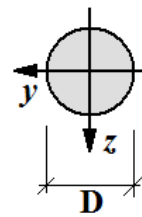
Maksymalne naprężenia styczne dla  $z = 0$ :

$$\tau^{max} = \frac{3}{2} \frac{Q_z}{A}$$

## ZGINANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM

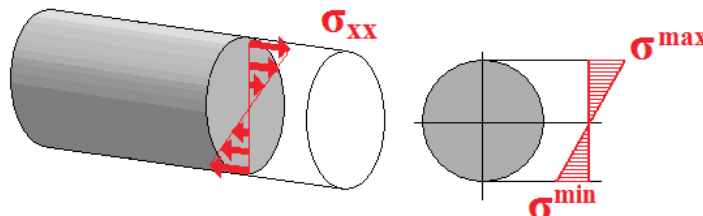
### NAPRĘŻENIA NORMALNE

Moment bezwładności przekroju:  $I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$



Rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_{xx}$  :

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{4 M_y}{\pi R^4} z = \frac{64 M_y}{\pi D^4} z$$



Maksymalne naprężenia normalne dla  $z = R$ :

$$\sigma^{max} = \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma^{min} = -\frac{M_y}{W_y},$$

gdzie wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi R^3}{4}$$

### NAPRĘŻENIA STYCZNE

Z rysunku:  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R}$

Szerokość przekroju:  $b(z) = 2R \cos \alpha = 2R \cdot \frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{R} = 2\sqrt{R^2 - z^2}$

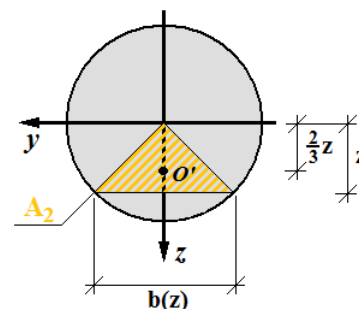
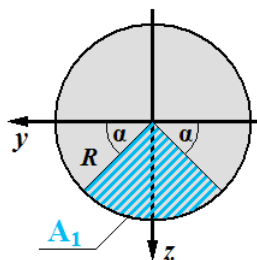
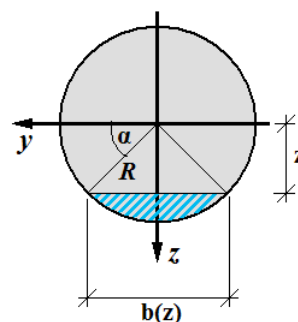
Funkcja  $S_y(z)$  dla przekroju prostokątnego:

$$S_y(z) = S_{y1}(z) - S_{y2}(z)$$

$$S_{y2}(z) = \frac{1}{2} \cdot b(z) \cdot z \cdot \frac{2}{3} \cdot z = \frac{2}{3} z^2 \sqrt{R^2 - z^2}$$

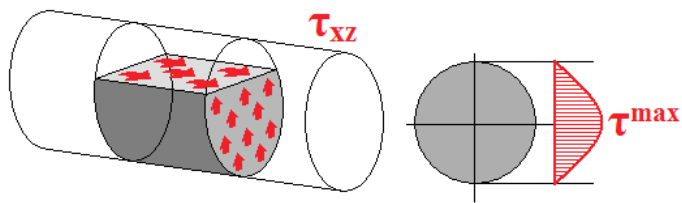
$$\begin{aligned} S_{y1}(z) &= \iint_{A_1} z dA = \int_{r=0}^R \int_{\varphi=\alpha}^{\pi-\alpha} [(r \sin \varphi) r] d\varphi dr = \int_0^R r^2 dr \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \varphi]_{\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{R^3}{3} [-\cos(\pi-\alpha) + \cos \alpha] = \frac{2}{3} R^3 \cos \alpha = \frac{2}{3} R^2 \sqrt{R^2 - z^2} \end{aligned}$$

$$S_y(z) = S_{y1}(z) - S_{y2}(z) = \frac{2}{3} (R^2 - z^2) \sqrt{R^2 - z^2}$$



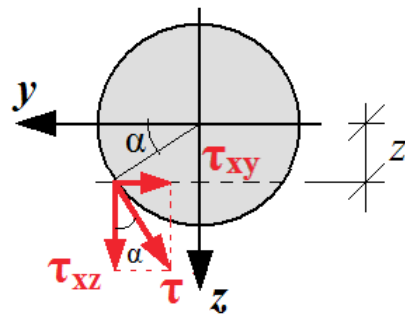
**Rozkład naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  :**

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y(z)}{b_y(z) \cdot I_y} = \frac{4Q_z(R^2 - z^2)}{3\pi R^4}$$



Statyczne warunki brzegowe wymagają, aby wypadkowe naprężenia styczne na powierzchni bocznej przekroju były styczne do tej powierzchni. Muszą zatem występować dodatkowe **naprężenia**  $\tau_{xy}$ . Dla punktów konturu możemy napisać:

$$\tau_{xy} = -\operatorname{tg} \alpha \cdot \tau_{xz} = -\frac{z}{y} \cdot \tau_{xz} = -\frac{4}{3} \frac{Q_z \cdot z \cdot y}{\pi R^4}$$



**Wzór należy stosować tylko dla punktów konturu przekroju.** Naprężenia te zmieniają wartość wewnątrz przekroju, jednak swoją maksymalną wartość przyjmują właśnie na konturze.

**Naprężenia wypadkowe na konturze (styczne do konturu):**

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

**Maksymalne naprężenia styczne dla  $z = 0$ :**

$$\tau^{max} = \frac{4}{3} \frac{Q_z^{max}}{A}$$