

## 12. Hipotezy wyteżenia materiału

**Funkcja wyteżenia** materiału  $W$  jest funkcją stanu, w jakim znajduje się materiał (stan naprężenia, odkształcenia, temperatura itd.)  $W(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \dots)$ , opisującą, w jakim stopniu wykorzystany jest zapas nośności danego materiału – określa ona odległość od stanu uznanego za graniczny (np. niebezpieczeństwo zniszczenia). W szczególności funkcja wyteżenia przyrównana do pewnej stałej wartości, np.  $W(\boldsymbol{\sigma}, \dots) = \text{const.}$  może być uznana za warunek uplastycznienia materiału. Funkcja ta może być konstruowana w rozmaity sposób, w zależności od tego, co jest przyjęte jako **miara wyteżenia** materiału. Miarę taką stanowić może pewna wielkość fizyczna (wybrane naprężenie lub odkształcenie, niezmienniki stanu naprężenia lub odkształcenia, energia sprężysta itp.) którą określać może funkcja  $W(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, T, \dots)$ . Najczęściej zakłada się, że przyjęta miara wyteżenia da się jednoznacznie określić przy pomocy składowych stanu naprężenia, lub jego niezmienników:

$$W = W(\boldsymbol{\sigma}) \Leftrightarrow W(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) \Leftrightarrow W(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \Leftrightarrow W(I_1, I_2, I_3)$$

Przyjmuje się, że w stanie granicznym założona miara wyteżenia przyjmuje pewną ustaloną, charakterystyczną dla tego materiału wartość graniczną  $W_{gr}$ . Można więc napisać, że w takim stanie niebezpiecznym spełniony jest **warunek graniczny** (warunek stanu granicznego):

$$W(\boldsymbol{\sigma}) = W_{gr}$$

Przy pewnych założeniach, warunek powyższy da się zapisać w postaci

$$\sigma_{\text{red}}(\boldsymbol{\sigma}) = k$$

gdzie  $\sigma_{\text{red}}$  nazywane **naprężeniem zredukowanym**, jest pewną wielkością o wymiarze naprężenia (niekoniecznie posiadającą interpretację fizyczną), której zależność funkcyjna od stanu naprężenia zadana jest przez funkcję wyteżenia, zaś  $k$  jest graniczną wartością naprężenia w stanie jednoosiowym (np. granica plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu).

Równanie warunku granicznego określa pewną wielowymiarową hiperpowierzchnię w abstrakcyjnej sześciowymiarowej przestrzeni naprężeń. W przypadku materiałów izotropowych stan naprężenia określa jednoznacznie układ trzech jego niezmienników lub trzech naprężeń głównych – przestrzeń naprężeń może być więc utożsamiana z pewną przestrzenią fizyczną. Warunek graniczny określa w niej pewną trójwymiarową powierzchnię, której wewnątrz stanowi zbiór bezpiecznych stanów naprężenia. Punkty na tej powierzchni odpowiadają stanowi granicznemu. Powierzchnię tę nazywamy **powierzchnią graniczną**. Jeśli warunek graniczny utożsamiany jest z warunkiem uplastycznienia materiału, wtedy powierzchnię taką nazywa się **powierzchnią plastyczności**.

Dla **materiałów izotropowych** stosuje się następujące propozycje warunków stanu granicznego:

1. **Hipoteza Galileusza-Rankine'a**

Hipoteza przekroczenia dopuszczalnej wielkości naprężenia normalnego,

2. **Hipoteza Saint-Venanta**

Hipoteza przekroczenia dopuszczalnej wielkości odkształcenia liniowego,

3. **Hipoteza Coulomba-Tresca-Guesta**

Hipoteza przekroczenia dopuszczalnej wielkości naprężenia stycznego,

4. **Warunek graniczny Coulomba-Mohra**

Warunek przekroczenia kohezji i tarcia wewnętrznego materiału

5. **Hipoteza Maxwella-Hubera-Misesa-Hencky'ego**

Warunek przekroczenia dopuszczalnej wielkości gęstości energii odkształcenia postaciowego,

6. **Hipoteza Burzyńskiego**

Warunek przekroczenia dopuszczalnej wielkości kombinacji gęstości energii odkształcenia postaciowego i objętościowego,

7. **Warunek graniczny Druckera-Pragera**

Kombinacja wpływu naprężenia dewiatorowego i naprężenia hydrostatycznego,

8. **Warunek graniczny Druckera**

Kombinacja wpływu naprężenia dewiatorowego i kąta Lodego

## HIPOTEZA GALILEUSZA-RANKINE'A

Miarą wyłączenia wg hipotezy Galileusza-Rankine'a jest **ekstremalne naprężenie normalne**, tj.:

„Stan graniczny, niezależnie od charakteru obciążenia, występuje w danym punkcie w momencie, gdy ekstremalne z naprężeń normalnych osiąga pewną ustaloną, charakterystyczną dla danego materiału wartość  $W_{gr}^G$ ”

$$\sigma_{ekstr} = \max(|\sigma_{max}|, |\sigma_{min}|) = W_{gr}^{GR}$$

gdzie  $\sigma_{max}$  oraz  $\sigma_{min}$  są maksymalnym i minimalnym z naprężeń normalnych. Ponieważ naprężenia główne są ekstremalnymi wartościami, jakie mogą przyjmować normalne składowe stanu naprężenia w danym punkcie, zatem ekstremalne wartości naprężeń głównych są miarą wyłączenia wg hipotezy Galileusza-Rankine'a. Oryginalne sformułowanie Galileusza dopuszczało nieograniczoną wartość naprężenia normalnego, jeśli było naprężeniem ściskającym.

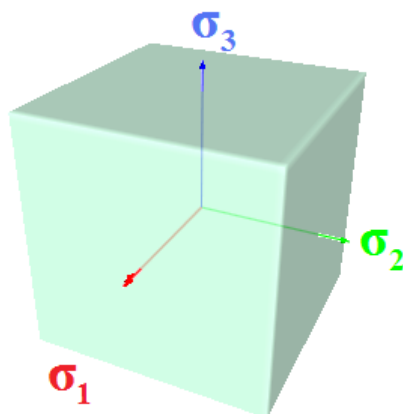
W stanie jednoosiowym mamy:

$$\sigma = \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_{max} = k_r \\ \sigma_{min} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \sigma_{ekstr} = k_r = W_{gr}^{GR}$$

Stąd naprężenie zredukowane wg hipotezy Galileusza-Rankine'a jest po prostu równe ekstremalnemu naprężeniu normalnemu:

$$\sigma_{red}^{GR} = \sigma_{ekstr} = \max(|\sigma_{max}|, |\sigma_{min}|)$$

W przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię graniczną opisaną warunkiem Galileusza-Rankine'a stanowi **sześcian** o boku długości  $2k_r$ .



W szczególnym przypadku, gdy materiał wykazuje różną wytrzymałość przy rozciąganiu i przy ściskaniu, warunek graniczny wyprowadzony z hipotezy ekstremalnego naprężenia normalnego może być przekształcony do następującej postaci:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{max}}{k_r} = 1 & \Leftrightarrow \sigma_{max} > 0 \\ -\frac{\sigma_{min}}{k_c} = 1 & \Leftrightarrow \sigma_{min} < 0 \end{cases}$$

## **HIPOTEZA SAINT-VENANTA**

Miarą wyężenia wg hipotezy Saint-Venanta jest **ekstremalne odkształcenie liniowe**, tj.:

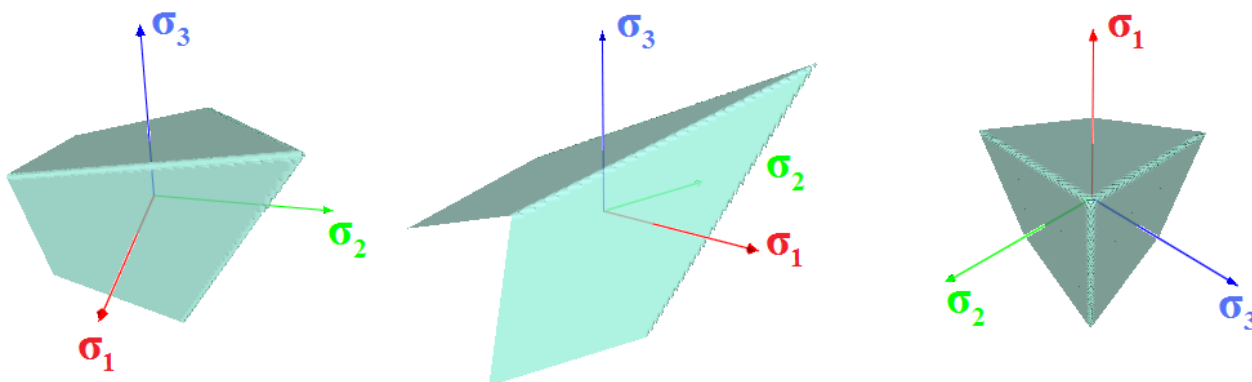
„Stan graniczny, niezależnie od charakteru obciążenia, występuje w danym punkcie w momencie, gdy ekstremalne z odkształceń liniowych normalnych osiąga pewną ustaloną, charakterystyczną dla danego materiału wartość  $W_{gr}^{SV}$ ”

$$\varepsilon_{max} = W_{gr}^{SV}$$

Ponieważ w materiałach izotropowych kierunki naprężeń głównych i odkształceń głównych pokrywają się, zatem możemy wyrazić maksymalne odkształcenie liniowe poprzez naprężenia główne:

$$\varepsilon_{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)(1 + \nu) - \nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

gdzie  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona. W przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię graniczną opisaną warunkiem granicznym Saint-Venanta opisuje ostrosłup o przekroju trójkąta równobocznego raz o osi równoległej do osi naprężenia hydrostatycznego.



## HIPOTEZA COULOMBA-TRESCI-GUESTA

Miarą wyłączenia wg hipotezy Coulomba-Tresci-Guesta jest **ekstremalne naprężenie styczne**, tj:

„Stan graniczny, niezależnie od charakteru obciążenia, występuje w danym punkcie w momencie, gdy ekstremalne z naprężeń ścinających osiąga pewną ustaloną, charakterystyczną dla danego materiału wartość  $W_{gr}^{CTG}$ ”

$$\tau_{ekstr} = \frac{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}{2} = W_{gr}^{CTG}$$

gdzie  $\sigma_{max}$  oraz  $\sigma_{min}$  są maksymalnym i minimalnym z naprężeń głównych. Maksymalne naprężenie ścinające działa w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pośredniego naprężenia głównego w kierunkach nachylonych pod kątem  $45^\circ$  do kierunków maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego.

W stanie jednoosiowym:

$$\sigma = \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_{max} = k_r \\ \sigma_{min} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \tau_{ekstr} = \frac{|k_r - 0|}{2} = \frac{k_r}{2} = W_{gr}^G$$

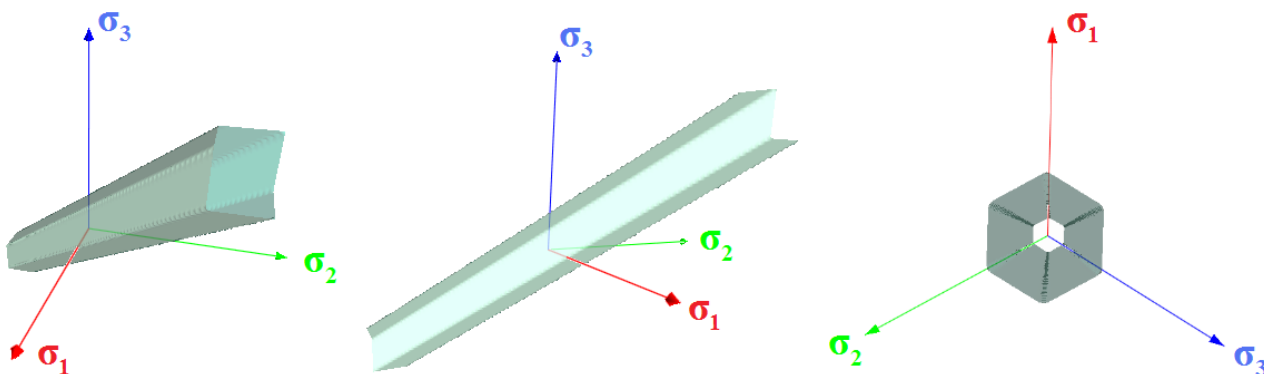
Równanie powyższe można przepisać w postaci:

$$\sigma_{red}^{CTG} = f_d ,$$

gdzie naprężenie zredukowane wg hipotezy Coulomba-Tresci-Guesta jest równe:

$$\sigma_{red}^{CTG} = 2\tau_{ekstr} = |\sigma_{max} - \sigma_{min}|$$

W przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię graniczną opisaną warunkiem Coulomba-Tresci-Guesta stanowi **graniastosłup prawidłowy sześciokątny** o nieskończonej wysokości, którego oś symetrii pokrywa się z osią naprężenia hydrostatycznego (wszechstronnie równe ściskanie i rozciąganie jest zatem stanem bezpiecznym niezależnie od jego wielkości), zaś przekrój powierzchnią prostopadłą do tej osi jest sześciokątem foremnym.



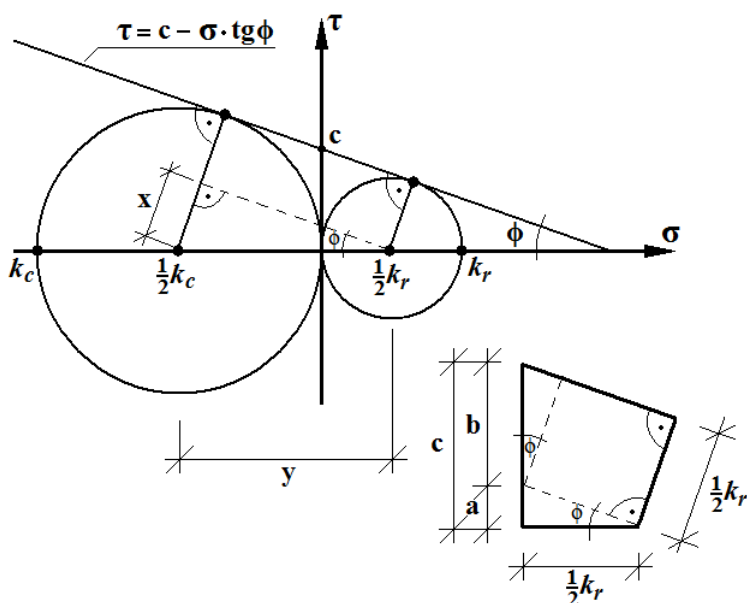
## WARUNEK GRANICZNY COULOMBA – MOHRA

Hipoteza Coulomba-Mohra nie podaje bezpośrednio fizycznej miary wyłączenia, lecz określa warunek, jaki spełniają składowe tensora naprężenia w stanie granicznym. Najogólniej można zapisać go w następującej postaci:

$$\tau = c - \sigma \cdot \operatorname{tg} \phi,$$

co można interpretować w ten sposób, iż w stanie granicznym wielkość **naprężenia stycznego** przewyższa wewnętrzną spójność materiału, na którą składa się stała jego **kohezja**  $c$  oraz **tarcie wewnętrzne**, które przyjmuje się za proporcjonalne do **naprężenia normalnego** i tangensa **kąta tarcia wewnętrznego**  $\phi$  (analogicznie do Coulombowskiego tarcia ślizgowego proporcjonalnego do siły nacisku (siły normalnej do powierzchni tarcia) i współczynnika tarcia). Stałe  $c$  i  $\phi$  są parametrami materiałowymi.

Warunek ten ma jeszcze inną interpretację – równanie to opisuje prostą, która ma pełnić obwiednię wszystkich kół Mohra, które opisują dopuszczalne stanu naprężenia. Dwa takie koła wykreślić można na podstawie wyników badań wytrzymałości w stanie jednoosiowego rozciągania oraz w stanie jednoosiowego ściskania. Dwa naprężenia główne są wtedy równe 0 i koło jest styczne do osi naprężeń stycznych – trzecie naprężenie (odpowiadające naprężeniu granicznemu) określa punkt przecięcia się koła z osią naprężeń normalnych:



Można więc napisać:

$$x = \frac{k_c}{2} - \frac{k_r}{2}$$

$$y = \frac{k_c}{2} + \frac{k_r}{2}$$

$$\sin \phi = \frac{x}{y} = \frac{k_c - k_r}{k_c + k_r}$$

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \frac{2\sqrt{k_c k_r}}{k_c + k_r}$$

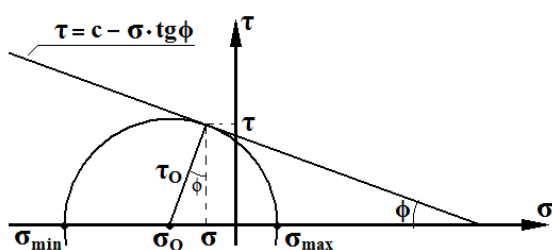
$$a = \frac{k_r}{2} \operatorname{tg} \phi = \frac{k_r \sin \phi}{2 \cos \phi} \quad b = \frac{k_r}{2 \cos \phi}$$

$$c = a + b = \frac{\sqrt{k_c k_r}}{2}$$

Ostatecznie:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{k_c - k_r}{2\sqrt{k_c k_r}} \quad c = \frac{\sqrt{k_c k_r}}{2}$$

Kryterium stanu granicznego Coulomba-Mohra można wyrazić poprzez naprężenia główne dla dowolnego stanu granicznego (tj. kiedy koło Mohra opisujące ten stan jest styczne do obwiedni):



Środek koła Mohra:  $\sigma_0 = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$

Promień koła Mohra:  $\tau_0 = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

Składowa normalna i styczna będące miarami wyężenia:

$$\sigma = \sigma_0 + \tau_0 \cdot \sin \phi$$

$$\tau = \tau_0 \cdot \cos \phi$$

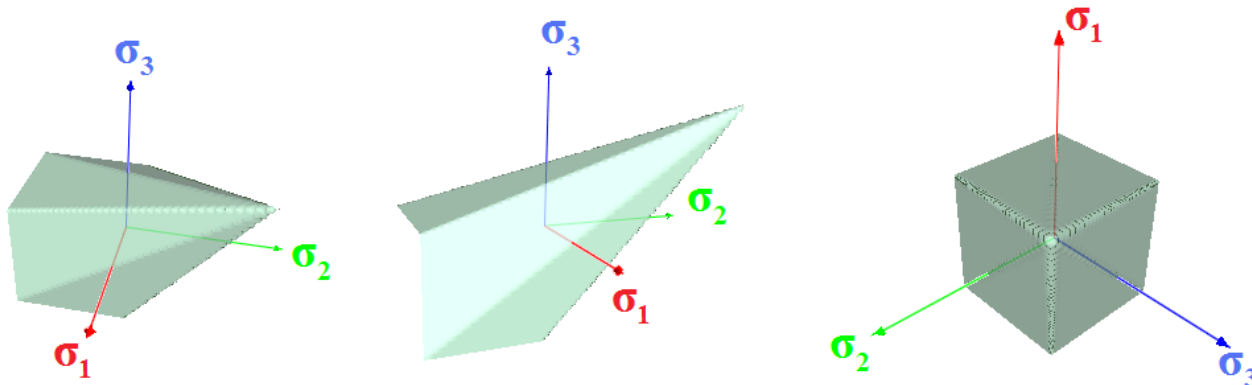
Kryterium stanu granicznego przyjmuje postać:

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cdot \cos \phi + \operatorname{tg} \phi \left[ \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cdot \sin \phi \right] - c = 0$$

A po podstawieniu związków między kohezją i kątem tarcia wewnętrznego a granicznymi wartościami naprężeń normalnych, otrzymujemy jeszcze prostszą postać:

$$\frac{\sigma_{max}}{k_r} - \frac{\sigma_{min}}{k_c} = 1$$

W szczególnym przypadku  $k_c = k_r$  uzyskuje się kryterium Coulomba-Tresci-Guesta. W przestrzeni naprężeń głównych, powierzchnia graniczna zadana warunkiem Coulomba-Mohra reprezentowana jest przez ostrosłup o podstawie sześciokąta (niekoniecznie foremego), którego oś pokrywa się z osią naprężenia hydrostatycznego.



## HIPOTEZA MAXWELLA – HUBERA – MISESA – HENCKY'EGO

Miarą wyęczenia wg hipotezy MHMH jest **gęstość energii sprężystej odkształcenia postaciowego**, tj.

„Stan graniczny, niezależnie od charakteru obciążenia, występuje w danym punkcie w momencie, gdy gęstość energii sprężystej odkształcenia postaciowego osiąga pewną ustaloną, charakterystyczną dla danego materiału wartość  $W_{gr}^{MHMH}$ ”

$$\Phi_f = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \right] = W_{gr}^{MHMH},$$

gdzie  $G$  oznacza moduł sztywności poprzecznej Kirchhoffa. W stanie jednoosiowym:

$$\Phi_f = \frac{1}{12G} \left[ (0-0)^2 + (0-k_r)^2 + (k_r-0)^2 + 6(0^2+0^2+0^2) \right] = \frac{k_r^2}{6G} = W_{gr}^{MHMH}$$

Równanie powyższe można przepisać w postaci:

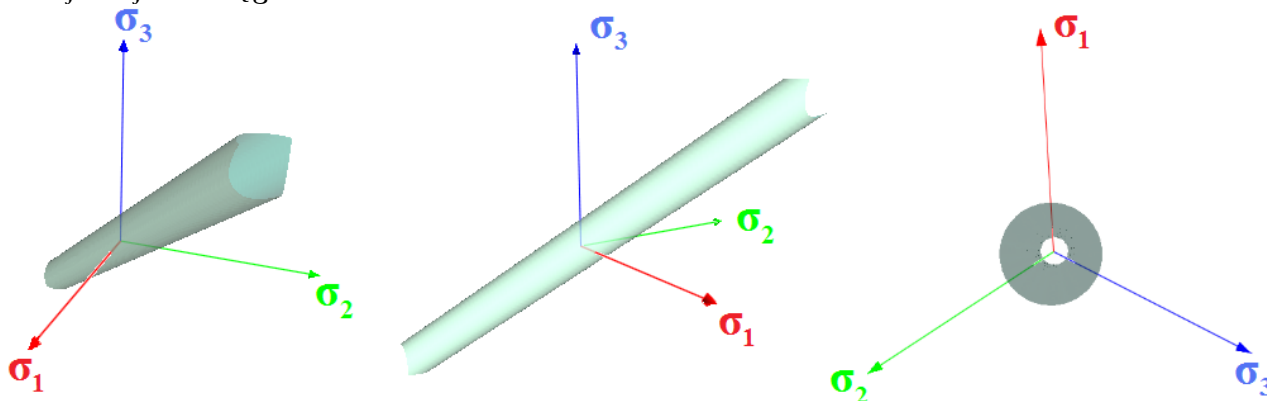
$$\sigma_{red}^{MHMH} = k_r$$

gdzie naprężenie zredukowane wg hipotezy MHMH jest równe:

$$\begin{aligned} \sigma_{red}^{MHMH} = \sqrt{6G\Phi_f} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \end{aligned}$$

Spośród przytoczonych do tej pory hipotez jest to pierwsza hipoteza, która nie wymaga wyznaczenia naprężeń głównych – naprężenie zredukowane może zostać wyznaczone na podstawie składowych tensora naprężenia w dowolnym układzie współrzędnych. W oryginalnym sformułowaniu Hubera  $\Phi_f$  było miarą wyęczenia jedynie w przypadku ściskania (dla ujemnych wartości składowej hydrostatycznej naprężenia) – przy rozciąganiu miarą tą była gęstość całkowitej energii odkształcenia sprężystego.

W przestrzeni naprężeń głównych powierzchnię graniczną opisaną warunkiem Maxwella-Hubera-Misesa-Hencky'ego stanowi **walec**, którego oś symetrii pokrywa się z osią naprężenia hydrostatycznego (wszechstronnie równe ściskanie i rozciąganie jest zatem stanem bezpiecznym niezależnie od jego wielkości), zaś przekrój powierzchnią prostopadłą do tej osi jest okręgiem.





## HIPOTEZA BURZYŃSKIEGO

Miarą wyjątku wg hipotezy Burzyńskiego jest **kombinacja gęstości energii sprężystej odkształcenia postaciowego i gęstości energii sprężystej odkształcenia objętościowego**, tj.

„Stan graniczny, niezależnie od charakteru obciążenia, występuje w danym punkcie w momencie, gdy kombinacja gęstości energii sprężystej odkształcenia postaciowego i objętościowego osiąga pewną ustaloną, charakterystyczną dla danego materiału wartość  $W_{gr}^B$ ”

Warunek stanu granicznego zaproponowany przez Burzyńskiego można zapisać w postaci:

$$\Phi_f + \left( A + \frac{B}{p} \right) \Phi_v - C = 0$$

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\Phi_v = \frac{1}{18K} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 = \frac{p^2}{2K}$$

$$\Phi_f = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \right]$$

gdzie  $\Phi_f$  i  $\Phi_v$  to odpowiednio gęstości energii sprężystej odkształcenia postaciowego i objętościowego,  $p$  jest naprężeniem hydrostatycznym,  $G$  i  $K$  to odpowiednio moduł Kirchhoffa i moduł Helmholtza, zaś parametry  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla materiału. Zakładając, że warunek graniczny ma być spełniony w trzech podstawowych stanach:

- jednoosiowe rozciąganie  $\sigma = \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r \end{bmatrix}$
- jednoosiowe ściskanie  $\sigma = \begin{bmatrix} -k_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_c \end{bmatrix}$
- czyste ścinanie  $\sigma = \pm \begin{bmatrix} 0 & k_s & 0 \\ k_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \sigma = \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_s \\ 0 & 0 & 0 \\ k_s & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \sigma = \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_s \\ 0 & k_s & 0 \end{bmatrix}$

uzyskujemy układ 12 równań, z których tylko 3 są niezależne z uwagi na izotropię materiału i równoważność odpowiednich naprężeń dla wszystkich kierunków. Te trzy równania pozwalają wyrazić trzy stałe materiałowe  $A$ ,  $B$ ,  $C$  poprzez wartości naprężeń granicznych:

$$A = \frac{K}{G} \cdot \frac{3(3k_s^2 - k_c k_r)}{k_c k_r} \quad B = \frac{K}{G} \cdot \frac{3k_s^2(k_c - k_r)}{k_c k_r} \quad C = \frac{k_s^2}{2G}$$

Warunek graniczny można przepisać w następującej postaci:

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2 \left( \frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1 \right) (\sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} + \sigma_{xx} \sigma_{yy}) + \frac{k_c k_r}{k_s^2} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) + (k_c - k_r) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) - k_c k_r = 0,$$

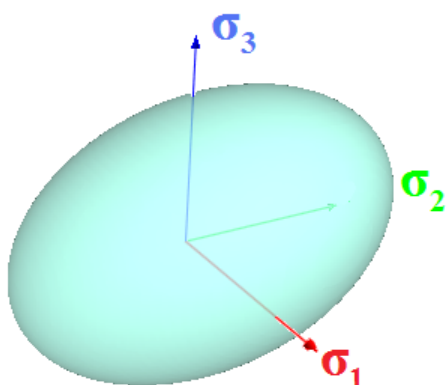
Warunek Burzyńskiego reprezentowany jest w przestrzeni naprężeń przez pewną **kwadrykę** – trójwymiarową powierzchnię drugiego stopnia. Są to powierzchnie obrotowe, o osi symetrii pokrywającej się z osią naprężenia hydrostatycznego. Rodzaj powierzchni zależy od wzajemnych stosunków wartości parametrów kryterium. Wprowadza się parametry:

$$\mu = \frac{k_c k_r}{2k_s^2} - 1 \quad \kappa = \frac{k_c}{k_r}$$

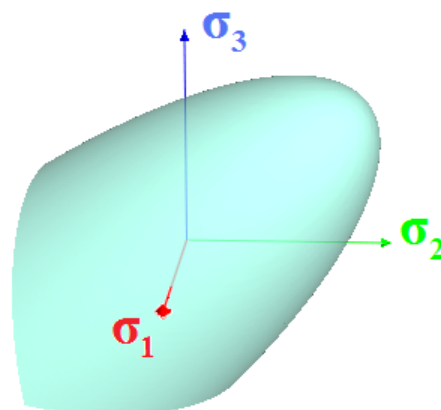
Powierzchnia graniczna:

- $\mu < 0,5$  : **elipsoida obrotowa**, w szczególności sfera,
- $\mu = 0,5 \wedge \kappa = 1$  : **walec** (hipoteza MHMH),
- $\mu = 0,5 \wedge \kappa > 1$  : **paraboloida obrotowa**,
- $\mu > 0,5 \wedge k_s > \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{k_c k_r}{k_c + k_r}$  : **obrotowa hiperboloida dwupowłokowa**,  
 -tylko jedna powłoka ma sens fizyczny;  
 -w szczególności otrzymuje się **stożek** dla  $k_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{k_c k_r}{k_c + k_r}$ .

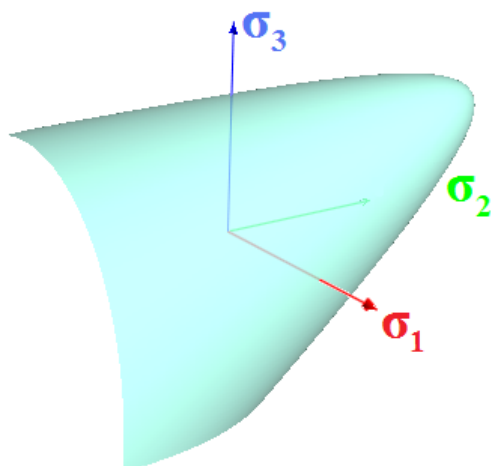
Powierzchnia elipsoidalna



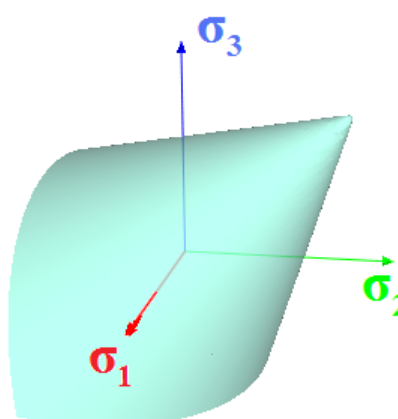
Powierzchnia paraboloidalna



Hiperboloida dwupowłokowa (jedna z powłok)



Powierzchnia stożkowa



## INNE WARUNKI GRANICZNE

Dużą popularność zyskały sobie również stosunkowo proste warunki stanu granicznego nie odwołujące się bardzo ściśle do jakiejś konkretnej wielkości fizycznej, którą przyjmowałyby za miarę wyłączenia materiału – warunki te zwykle się formułować poprzez niezmienniki tensora naprężenia i jego dewiatora:

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

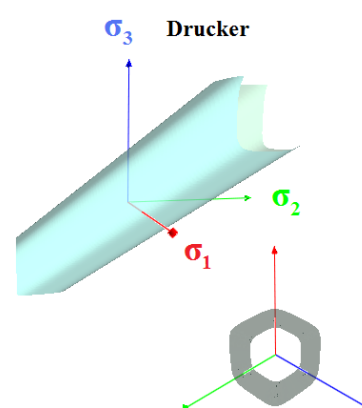
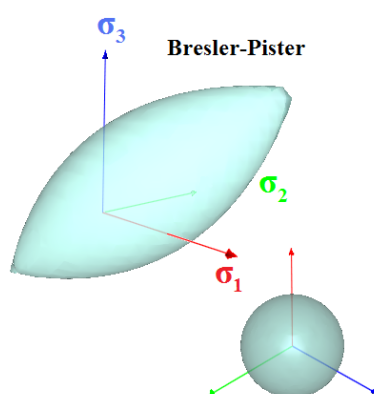
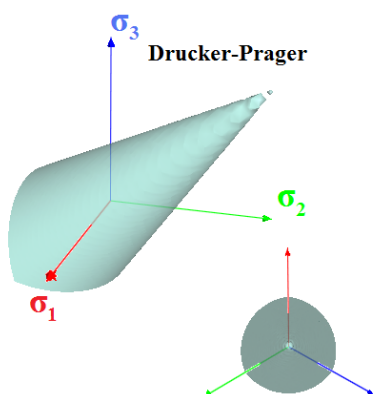
$$I_3(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$J_3 = I_3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1 J_2 - \frac{1}{27} I_1^3$$

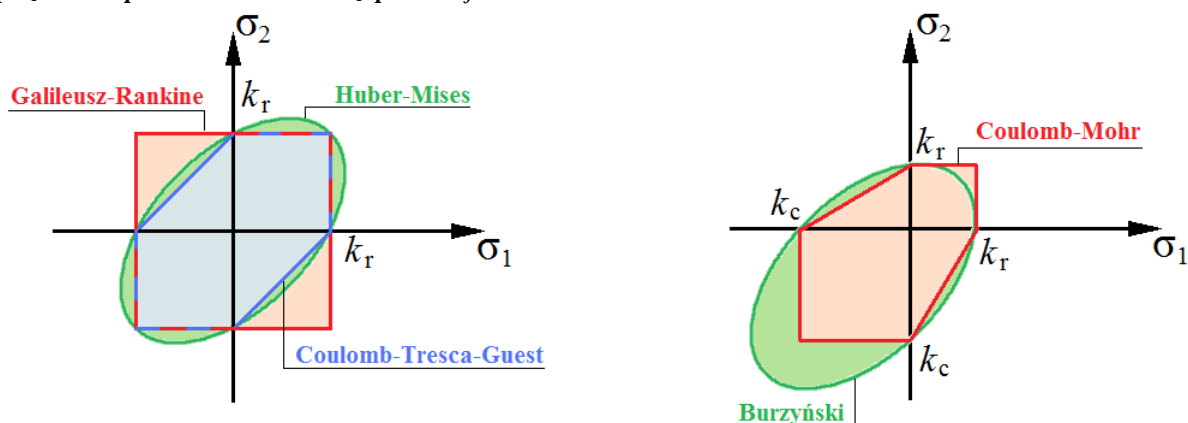
W XX wieku sformułowano szereg warunków granicznych których postać jest kombinacją tych niezmienników – zyskały sobie one dość dużą popularność. Wspomnieć tu można m.in. o propozycjach Druckera, Druckera-Pragera (powierzchnia stożkowa), Breslera-Pistera. Także i kryteria stanu granicznego przedstawione wyżej mogą być zapisane w podobnej bardzo ogólnej postaci ( $a, b, c, \dots = const.$ ) .

- **Huber-Mises**  $a J_2 = 1$
- **Burzyński**  $a J_2 + b I_1^2 + c I_1 = 1$
- **Drucker-Prager**  $a \sqrt{J_2} + b I_1 = 1$
- **Bresler-Pister**  $a \sqrt{J_2} + b I_1 + c I_1^2 = 1$
- **Drucker**  $a J_3^2 + b J_2^3 = 1$



## PORÓWNANIE HIPOTEZ W PŁASKIM STANIE NAPRĘŻENIA

Przekroje powierzchni granicznych płaszczyznami odpowiadającymi płaskiemu stanowi naprężenia przedstawione są poniżej.



### Granica plastyczności przy ścinaniu

Znajomość granicy plastyczności w stanie jednoosiowym oraz przyjęcie którejś z hipotez wyciężenia materiału pozwala przewidywać wartości naprężeń granicznych w innych stanach, np. w stanie czystego ścinania. Przy czystym ścinaniu, w stanie granicznym tensor naprężenia opisany w układzie swoich osi własnych przyjmuje następującą postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

stąd:

- hipoteza GR  $\sigma_{\text{red}}^{GR} = k_s = k_r \Rightarrow k_s^{GR} = k_r$
- hipoteza CTG  $\sigma_{\text{red}}^{CTG} = 2k_s = k_r \Rightarrow k_s^{CTG} = \frac{k_r}{2} = 0,5k_r$
- hipoteza MHMH  $\sigma_{\text{red}}^{MHMH} = \sqrt{3}k_s^2 = k_r \Rightarrow k_s^{MHMH} = \frac{k_r}{\sqrt{3}} \approx 0,58k_r$

### Naprężenia zredukowane w stanie jednoosiowym złożonym z czystym ścinaniem

W stanie jednoosiowym złożonym ze stanem czystego ścinania (zginanie poprzeczne, zginanie ze skręcaniem, rozciąganie ze skręcaniem itp.). Tensor naprężenia przyjmuje następującą postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wprowadzając oznaczenia  $\sigma = \sigma_x$ ,  $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$  naprężenia zredukowane w takim stanie wg przytoczonych hipotez dla materiałów o równej wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie wyrażają się wzorami:

- hipoteza GR  $\sigma_{\text{red}}^G = \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
- hipoteza CTG  $\sigma_{\text{red}}^{CTG} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
- hipoteza MHMH  $\sigma_{\text{red}}^{MHMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

## Kryteria stanu granicznego dla materiałów anizotropowych

Najczęściej stosowanymi ogólnymi kryteriami stanu granicznego dla materiałów anizotropowych są:

### 1. Warunek graniczny Hilla

$$H_{23}(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + H_{31}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H_{12}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 2H_{44}\sigma_{23}^2 + 2H_{55}\sigma_{31}^2 + 2H_{66}\sigma_{12}^2 = 1$$

Parametry kryterium są równe:

$$H_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k_3^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) \quad H_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_3^2} + \frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2} \right) \quad H_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_3^2} \right)$$

$$H_{44} = \frac{1}{2k_{s1}^2} \quad H_{55} = \frac{1}{2k_{s2}^2} \quad H_{66} = \frac{1}{2k_{s3}^2}$$

gdzie  $k_i$  oznacza graniczne naprężenie normalne (rozciągające / ściskające) na kierunku równoległym do  $i$ -tej osi przyjętego układu współrzędnych, zaś  $k_{si}$  oznacza graniczne naprężenie styczne przy ścinaniu w płaszczyźnie prostopadłej do  $i$ -tej osi przyjętego układu współrzędnych, w kierunkach pozostałych dwóch osi.

### 2. Warunek graniczny Hoffmana

$$H_{23}(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + H_{31}(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H_{12}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + H_1\sigma_{11} + H_2\sigma_{22} + H_3\sigma_{33} + 2H_{44}\sigma_{23}^2 + 2H_{55}\sigma_{31}^2 + 2H_{66}\sigma_{12}^2 = 1$$

Parametry kryterium są równe:

$$H_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_{r2}k_{c2}} + \frac{1}{k_{r3}k_{c3}} - \frac{1}{k_{r1}k_{c1}} \right) \quad H_1 = \frac{1}{k_{r1}} - \frac{1}{k_{c1}} \quad H_{44} = \frac{1}{k_{s1}^2}$$

$$H_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_{r3}k_{c3}} + \frac{1}{k_{r1}k_{c1}} - \frac{1}{k_{r2}k_{c2}} \right) \quad H_2 = \frac{1}{k_{r2}} - \frac{1}{k_{c2}} \quad H_{55} = \frac{1}{k_{s2}^2}$$

$$H_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_{r1}k_{c1}} + \frac{1}{k_{r2}k_{c2}} - \frac{1}{k_{r3}k_{c3}} \right) \quad H_3 = \frac{1}{k_{r3}} - \frac{1}{k_{c3}} \quad H_{66} = \frac{1}{k_{s3}^2}$$

gdzie  $k_{ri}$  i  $k_{ci}$  oznaczają odpowiednio graniczne naprężenia rozciągające i ściskające na kierunku równoległym do  $i$ -tej osi przyjętego układu współrzędnych, zaś  $k_{si}$  oznacza graniczne naprężenie styczne przy ścinaniu w płaszczyźnie prostopadłej do  $i$ -tej osi przyjętego układu współrzędnych, w kierunkach pozostałych dwóch osi.