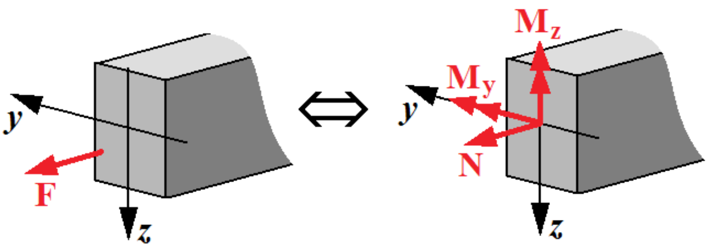
13. Obciążenie złożone

Dotychczas przedstawione zostały przykłady tylko najprostszych przypadków obciążenia – prostego rozciągania i ściskania, prostego skręcania oraz zginania prostego, ukośnego i poprzecznego. Już w przypadku zginania poprzecznego można było zauważyć złożenie działania momentów zginających i ścinających sił poprzecznych. W praktyce bardzo często – a w pewnych zagadnieniach niemal zawsze – mamy do czynienia ze złożonym stanem obciążenia. Zgodnie z założeniami wytrzymałości materiałów, skorzystać możemy w takim przypadku z zasady superpozycji – skutek sumy przyczyn, jest sumą skutków od każdej z przyczyn z osobna.

13.1 Mimośrodowe rozciąganie i ściskanie – metoda przybliżona

Szczególnym przypadkiem obciążenia jest stan **mimośrodowego rozciągania lub ściskania** – jest to stan w którym **siła osiowa nie jest przyłożona w środku ciężkości przekroju**. Przyjmijmy, że siła ta jest przyłożona w pewnym punkcie P o współrzędnych (e_y, e_z) . Dokonując redukcji układu sił do środka ciężkości otrzymujemy układ

$$\begin{cases} N = F \\ M_y = F\cdot e_z \\ M_z = -F\cdot e_y \end{cases}$$



Wektor momentu nachylony jest pod kątem $\operatorname{tg}\beta = -e_y/e_z$. Widzimy zatem, że przypadek obciążenia mimośrodowego jest równoważny ze **złożeniem obciążenia osiowego i zginania ukośnego**. W takim przypadku rozkład naprężeń normalnych dany jest wzorem:

$$\boxed{\sigma(x, y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y}$$

W szczególności:

$$\boxed{\sigma(x, y) = \frac{F}{A}\cdot\left[1 + \frac{e_z\cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y\cdot y}{i_z^2}\right]}$$

gdzie $i_y = \sqrt{I_y/A}$ $\quad i_z = \sqrt{I_z/A}$ nazywamy **promieniami bezwładności**. Postępując jak w przypadku zginania ukośnego, można pokazać, że oś obojętna nachylona jest do osi *y* pod kątem:

$$\boxed{\operatorname{tg}\gamma = \frac{M_z}{M_y}\cdot\frac{I_y}{I_z} = -\operatorname{tg}\frac{e_y\cdot i_y^2}{e_z\cdot i_z^2}}.$$

Z drugiej strony, ponieważ we wzorze na oś obojętną występuje stały składnik 1, który wynika z przyłożenia siły osiowej, oś obojętna nigdy nie będzie przechodzić przez środek ciężkości przekroju jeśli tylko siła osiowa jest różna od 0. Widać też, że kąt nachylenia osi jest taki sam jak w przypadku zginania ukośnego. A zatem tylko **momenty zginające decydują o nachyleniu** osi obojętnej, zaś tylko **siła osiowa decyduje o jej przesunięciu** względem punktu (0,0).

RDZEŃ PRZEKROJU

Niekiedy bardzo duże znaczenie ma to, jaki znak mają naprężenia normalne – np. gdy wytrzymałość przy rozciąganiu bardzo istotnie różni się od tej przy ściskaniu (np. beton). Pojawia się więc pytanie – w jakim miejscu można przyłożyć siłę osiową aby naprężenia w całym przekroju miały ten sam znak? Obszar ten nazywamy **rdzeniem przekroju**. Wyznacza się go w następujący sposób:

1) cały kontur przekroju poprzecznego obrysowuje się układem prostych, które tworzą **najmniejszą możliwą wypukłą figurę zawierającą w sobie cały kontur przekroju** (często jest to wielokąt)– część z jej boków pokrywa się z konturem przekroju

2) Dla każdej z prostych tworzących ten obrys znajdujemy jej postać kanoniczną w układzie głównych centralnych osi bezwładności (*y,z*). Dla prostej przechodzącej przez punkty *A* i *B* wzór ogólny ma postać:

$$y\frac{(z_B-z_A)}{z_A(y_B-y_A)-y_A(z_B-z_A)} + z\frac{(y_B-y_A)}{y_A(z_B-z_A)-z_A(y_B-y_A)} + 1=0$$

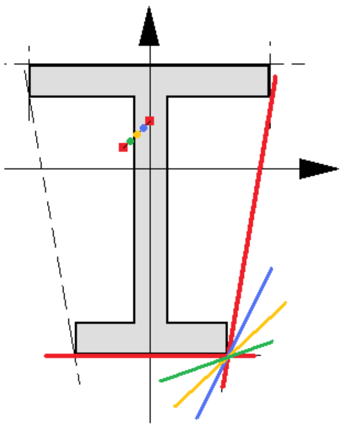
3) Z porównania współczynników przy *y* i *z* z ogólnym wzorem na oś obojętną, znajdujemy mimośród przyłożenia siły, dla którego oś obojętna pokrywa się z daną prostą na konturze:

$$e_y=i_z^2\frac{(z_B-z_A)}{z_A(y_B-y_A)-y_A(z_B-z_A)} \qquad e_z=i_y^2\frac{(y_B-y_A)}{y_A(z_B-z_A)-z_A(y_B-y_A)}$$

4) Rdzeń przekroju jest figurą powstałą przez połączenie otrzymanych punktów odcinkami prostymi.

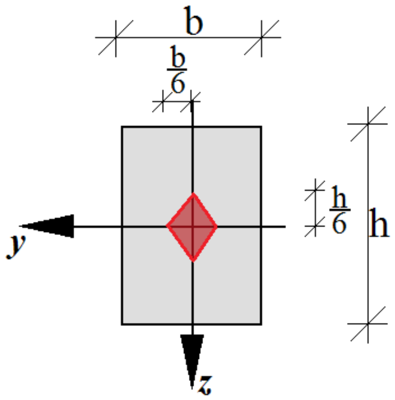
Ostatni krok wyznaczania rdzenia przekroju może wymagać wyjaśnienia. Obrys konturu wyznaczony jest przez kilka tylko prostych, którym odpowiadają pojedyncze punkty. Wszystkie inne graniczne położenia osi obojętnej, jakie są możliwe pomiędzy dwoma położeniami wyznaczającymi ten obrys muszą przechodzić przez punkt przecięcia tych dwóch prostych – nachylone są jedynie pod innym kątem. Zapiszmy równanie osi obojętnej dla obciążenia mimośrodowego siłą przyłożoną w punkcie (y_0, z_0) :

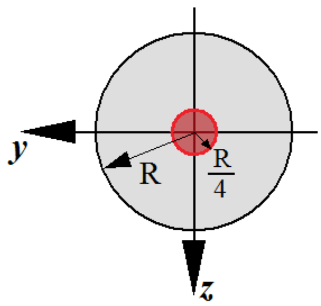
$$1+\frac{z_0 z}{i_y^2}+\frac{y_0 y}{i_z^2}=0$$



Jeśli teraz przyjmiemy, że *x* i *y* są stałe a x_0 i y_0 zmienne to ponownie otrzymujemy równanie prostej. Jeśli więc dwa punkty należące do brzegu rdzenia wyznaczają dwie przecinające się proste obrysu konturu przekroju, to wszystkim osiom obojętnym przechodzącym przez ten punkt odpowiada punkt przyłożenia siły leżący na prostej łączącej punkty te dwa punkty rdzenia.

Rdzenie przekrojów prostokątnego i kołowego:





Trzeba wspomnieć, że zasada superpozycji – a zatem i całe przedstawione rozwiązanie – obowiązuję jedynie w przypadku bardzo małych przemieszczeń. W istocie zdarza się, że ugięcia pręta zginanego są na tyle duże, że siła osiowa przyłożona do końców tego pręta może w dalszym stopniu pogłębiać (lub zmniejszać) jego ugięcie – wszyscy wiemy, że lekko tylko wykrzywioną linijkę można zginać (a nawet złamać) nie zginając jej poprzecznie a jedynie stosunkowo lekko ściskając ją na końcach. Zmiana ugięcia pod wpływem sił osiowych z kolei znowu zmienia wpływ tej siły (większe wygięcie – większy mimośród działania) – jest to zagadnienie sprzężone; mówimy wtedy o tzw. **efektach drugiego rzędu**. Zagadnienie to będzie omówione w dziale poświęconym **wyboczeniu**.

13.2 Zginanie ze skręcaniem

Obciążeniem, jakie jest powszechne w przypadku projektowania elementów maszyn jest złożenie zginania ze skręcaniem. Elementami podlegającymi temu obciążeniu są zasadniczo **pręty o przekroju kołowym lub rurowym**. U podstaw dalszych wyprowadzeń leży założenie, że **naprężenia ścinające od zginania poprzecznego są dużo mniejsze (pomijalnie małe) niż naprężenia ścinające od skręcania** – w praktyce założenie to jest niemal zawsze spełnione.

W projektowaniu elementów w złożonych stanach naprężenia konieczne jest uwzględnienie interakcji między naprężeniami stycznymi i normalnymi – dużo obszerniej na ten temat w rozdziale poświęconym **hipotezom wytężeniowym**. W praktyce często korzysta się z pojęcia tzw. **naprężenia zredukowanego** σ_{red} – jest to pewna fikcyjna wielkość będąca funkcją stanu naprężenia (wszystkich składowych normalnych i stycznych), uwzględniającą różny wpływ tych naprężeń na wytężenie materiału, dobraną w taki sposób, aby w stanie granicznym (np. zniszczenia), jego wartość była równa **dopuszczalnemu naprężeniu normalnemu** przy rozciąganiu k_r :

$$\sigma_{\mathrm{red}} = k_r \quad .$$

Można zauważyć, że naprężenie zredukowane dane wzorem

$$\sigma_{\mathrm{red}} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{k_r^2}{k_s^2}\tau^2} \quad ,$$

gdzie σ to naprężenie normalne od sił osiowych i momentów zginających, τ to naprężenie styczne od skręcania (i ew. zginania poprzecznego), zaś k_r i k_s to **dopuszczalne naprężenia normalne i ścinające**, spełnia powyższy warunek w obydwu stanach granicznych: rozciągania/ściskania, (gdy $\sigma = k_r, \tau = 0$) oraz czystego ścinania (gdy $\sigma = 0, \tau = k_s$). Ogólnie można napisać:

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{red}} = \sqrt{\sigma^2 + (\alpha\tau)^2} \quad \text{, gdzie} \quad \alpha = \frac{k_r}{k_s}}$$

Dla $\alpha = 3$ naprężenie zredukowane odpowiada hipotezie wytężenia Maxwella-Hubera-Misesa, dla $\alpha = 4$ otrzymujemy hipotezę Coulomba-Tresci-Guesta. Jeśli naprężenia normalne pochodzą tylko od zginania, wtedy zwyczajowo dopuszczalne naprężenie normalne oznaczamy przez k_g .

W ogólności parametr α uwzględniać może także wpływ **zmęczenia materiału**. Jeśli **obciążenie jest cykliczne**, **wielokrotnie powtarzalne**, wtedy efektywna wytrzymałość materiału (**wytrzymałość zmęczeniowa**) spada. Spadek ten uzależniony jest także od samego przebiegu procesu obciążenia i może być różny w przypadku **obciążenia jednostronnego** (stały zwrot, zmienna wartość – obciążenie tętniące – graniczne naprężenia oznaczane indeksem *j*, np. k_{rj}, k_{gj}, k_{sj}) lub **obustronnego** (zmienny zwrot, zmienna wartość – obciążenie wahadłowe – graniczne naprężenia oznaczane indeksem *o*, np. k_{go}, k_{so}).

Parametr m może być ilorazem dowolnych z tych wielkości w zależności od charakteru obciążenia. Przyjmuje się:

- Zginanie jednostronne, skręcanie obustronne $\alpha=2\sqrt{3}$
- Zginanie obustronne, skręcanie jednostronne $\alpha=\sqrt{3}/2$
- Jednostronne zginanie, jednostronne skręcanie lub obustronne zginanie i obustronne skręcani $\alpha=\sqrt{3}$

Wykorzystując wzory na maksymalne naprężenia normalne od zginania momentem M_g i maksymalne naprężenia styczne od skręcania momentem M_s w przekroju kołowym o średnicy D:

$$\sigma_{max}=\frac{M_g}{W_g}=\frac{32M_g}{\pi D^3} \qquad \tau_{max}=\frac{M_s}{W_s}=\frac{16M_s}{\pi D^3}$$

Możemy przepisać wzór na maksymalne naprężenie zredukowane w postaci: $\sigma_{g,\mathrm{red}}=M_{\mathrm{red}}/W_y$, gdzie $W_y=\pi D^3/32$ jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju na zginanie, zaś **zredukowany (zastępczy) moment zginający** wyraża się wzorem:

$$\boxed{M_{g,\mathrm{red}}=\sqrt{M_g^2+\left(\frac{\alpha}{2}\cdot M_s\right)^2}}$$

Warunek projektowania sprowadza się do przyjęcia takiej średnicy pręta, dla której spełnione jest:

$$D>\sqrt[3]{\frac{32M_{g,\mathrm{red}}}{\pi k_g}}$$

Jeśli mamy do czynienia z przekrojem rurowym o średnicy zewnętrznej D i średnicy wewnętrznej D_w, wtedy:

$$D>\sqrt[3]{\frac{32M_{g,\mathrm{red}}}{\pi k_g\left(1-\beta^4\right)}}, \quad \text{gdzie} \quad \beta=\frac{D_w}{D}$$

Jeśli dominującymi naprężeniami są naprężenia styczne, wtedy warunek graniczny dla przekroju kołowego zapisuje się jako:

$$\tau_{\mathrm{red}}=\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2+\tau^2}=\frac{M_{s,\mathrm{red}}}{W_s}<k_s \quad ,$$

gdzie **zredukowany moment skręcający** wyraża się wzorem:

$$\boxed{M_{s,\mathrm{red}}=\sqrt{\left(\frac{2}{\alpha}\cdot M_g\right)^2+M_s^2}}$$

Odpowiednie wzory na średnicę minimalną pręta skręcanego i zginanego mają postać:

$$D>\sqrt[3]{\frac{16M_{s,\mathrm{red}}}{\pi k_s}} \qquad D>\sqrt[3]{\frac{16M_{s,\mathrm{red}}}{\pi k_s\left(1-\beta^4\right)}}, \quad \text{gdzie} \quad \beta=\frac{D_w}{D}$$

