14. Ugięcia

Jednym z dwóch rodzajów stanu granicznego, w jakim znaleźć się może konstrukcja, jest stan graniczny użytkowalności. Nie jest on związany z niebezpieczeństwem trwałego uszkodzenia lub zniszczenia konstrukcji i nie grozi on jej całkowitą destrukcją. Nie zagraża tym samym w wielu przypadkach np. ludzkiemu życiu. W wielu przypadkach jego uniknięcie podyktowane jest wymaganiami estetycznymi lub poczuciem komfortu użytkownika. Niekiedy jednak sama tylko deformacja elementów konstrukcji może doprowadzić do sytuacji niebezpiecznej. Większe przemieszczenia skutkować mogą ponadto tzw. efektami II rzędu, w których przemieszczenie powoduje zmianę rozkładu obciążenia i dystrybucji sił wewnętrznych, co powoduje dalsze pogłębienie odkształcenia, co z kolei pociąga za sobą dalsze zmiany w rozkładzie sił itd. We takich przypadkach konieczne jest możliwie precyzyjne określenie wielkości ugięcia danego elementu.

Wśród metod obliczania ugięć prętów zginanych wyróżnia się m.in. następujące metody:

- **Metoda Clebscha (metoda analityczna, metoda całkowania)** – polegająca na analitycznym rozwiązaniu niejednorodnego równania różniczkowego belki zginanej z odpowiednimi warunkami brzegowymi i odpowiednio zadaną dystrybucją obciążenia zewnętrznego.

- **Metoda Mohra (metoda belki zastępczej, metoda obciążenia wtórnego, metoda graficzna)** – polegająca na dwukrotnym rozwiązaniu zagadnienia znalezienia rozkładu momentów zginających. Pierwsze dotyczy zwykłego rozkładu sił przekrojowych w danej belce, drugie zaś dotyczy znalezienia rozkładu fikcyjnych momentów w tzw. „belce zastępczej", której geometria, podparcie i obciążenie dobrane jest w taki sposób (na podstawie pierwszego rozwiązania) aby otrzymany rozkład fikcyjnych momentów był liczbowo równy rozkładowi ugięć w belce rzeczywistej.

- **Metody energetyczne** – bazujące na twierdzeniach energetycznych, które będą omówione osobno, w szczególności są to np.:
  - metoda Castigliano
  - wzór Maxwella-Mohra

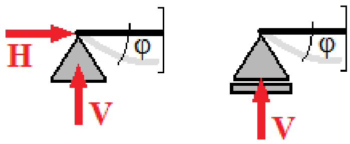
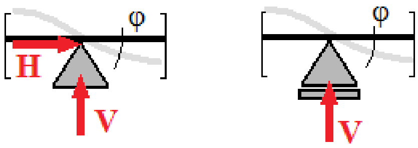
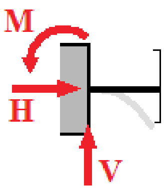
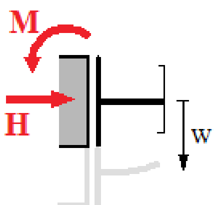
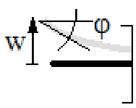
Pokazaliśmy już we wcześniejszym rozdziale, że zagadnieniem ugięcia belki obciążonej siłami poprzecznymi i momentami gnącymi rządzi równanie:

$$\boxed{\frac{d^4 w}{dx^4}=\frac{1}{EI}q_z(x)}$$

gdzie q_z oznacza dystrybucję obciążenia zginającego. W zagadnieniach statycznie wyznaczalnych można bez trudu wyznaczyć także rozkłady momentów zginających i skorzystać z prostszego równania:

$$\boxed{\frac{d^2 w}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M_y(x)}$$

Równanie to zostało wyprowadzone przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego, która (jak wiemy) nie jest spełniona przy zginaniu poprzecznym. Równanie powyższe pomija również wpływ naprężeń ścinających na pogłębienie ugięcia belki. Każde równanie różniczkowe musi mieć ponadto warunki brzegowe, które pozwalają na jednoznaczne określenie rozwiązania. Warunków brzegowych musi być dokładnie tyle, ile wynosi rząd równania różniczkowego. Warunki te określone są poprzez sposób podparcia belki oraz sposób obciążenia jej końców. Możemy to zapisać w następującej postaci:

Podpora	**Kinematyczne (przemieszczeniowe) warunki brzegowe**	**Statyczne (obciążeniowe) warunki brzegowe***
Podpora przegubowa (brzegowa) 	$w(x_0)=0$ $(\varphi(x_0)\neq 0)$	$M(x_0)=0$ $(Q(x_0)\neq 0)$
Podpora przegubowa (pośrednia) 	$w(x_0)=0$ $(\varphi(x_0)\neq 0)$	$M^{lewo}(x_0)-M^{prawo}(x_0)=0$ $(Q^{lewo}(x_0)-Q^{prawo}(x_0)\neq 0)$
Utwierdzenie 	$w(x_0)=0$ $\varphi(x_0)=0$	$(M(x_0)\neq 0)$ $(Q(x_0)\neq 0)$
Utwierdzenie z przesuwem 	$(w(x_0)\neq 0)$ $\varphi(x_0)=0$	$(M(x_0)\neq 0)$ $Q(x_0)=0$
Koniec swobodny 	$(w(x_0)\neq 0)$ $(\varphi(x_0)\neq 0)$	$M(x_0)=0$ $Q(x_0)=0$

* Jeśli w danym punkcie przyłożone jest obciążenie skupione, wtedy warunek nie jest jednorodny, tj. po prawej stronie nie daje się 0, lecz odpowiednią wartość siły.

METODA CLEBSCHA:

Metoda Clebscha jest pewną techniką bezpośredniego całkowania równania różniczkowego ugięcia belki.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{EI} M_y(x)$$

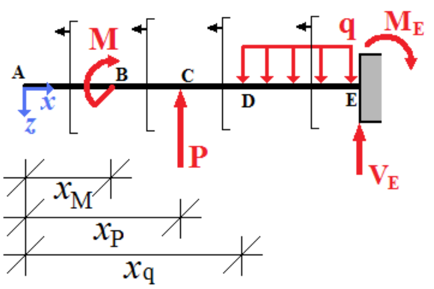
Główną zaletą metody Clebscha jest to, iż korzysta ona ze stosunkowo prostego, powtarzalnego schematu wykonywanych operacji. Jego prostota wynika z zastosowania specyficznej techniki zapisu rozkładu momentów zginających. Po dwukrotnym scałkowaniu, dwie stałe całkowania wyznacza się z warunków podporowych.

Przy wykorzystaniu metody Clebscha należy kierować się następującymi zasadami:

- **Rozkład momentu w danym przedziale charakterystycznym oddzielamy od pozostałych przedziałów pionową kreską. To, co znajduje się za nią (po prawej), dotyczy tylko następnych przedziałów. To co znajduje się przed nią (po lewej) dotyczy wszystkich dotychczas opisanych przedziałów z danym włącznie**;

- **Wyznaczamy rozkład momentów dokonując cięcia o normalnej zewnętrznej skierowanej ZAWSZE w tę samą stronę, PRZECIWNIE do osi *x* lokalnego układu współrzędnych**; Jeśli redukcji dokonuje się dokonując w każdym przedziale charakterystycznym z użyciem innego lokalnego układu współrzędnych lub dokonując cięć raz w jedną, raz w drugą stronę, wtedy w każdym przedziale trzeba uwprowadzić dodatkowe stałe całkowania i żądać równości ugięć i kątów ugięć na granicach przedziałów (tzw. warunki zszycia). Jeśli normalna zewnętrzna jest skierowana zgodnie z lokalną osią x, wtedy w całkowaniu trzeba uwzględniać minus przy zmiennej x.

- **Udział w wartości momentu w danym punkcie od obciążenia *q*, siły *P* lub momentu *M* zapisujemy ZAWSZE w postaci** $\pm a(x-x_0)^n$. Przykładowo:



$$M(x) = 0\Big|^{AB} + M\cdot(x-x_M)^0\Big|^{BC} + P\cdot(x-x_P)^1\Big|^{CD} - \frac{q}{2}(x-x_q)^2\Big|^{DE}$$

Zapis powyższy jest równoważny następującemu:

$$M(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad x\in AB \\ 0+M\cdot(x-x_M)^0 & \Leftrightarrow \quad x\in BC \\ 0+M\cdot(x-x_M)^0+P\cdot(x-x_P)^1 & \Leftrightarrow \quad x\in CD \\ 0+M\cdot(x-x_M)^0+P\cdot(x-x_P)^1-\frac{q}{2}(x-x_q)^2 & \Leftrightarrow \quad x\in DE \end{cases}$$

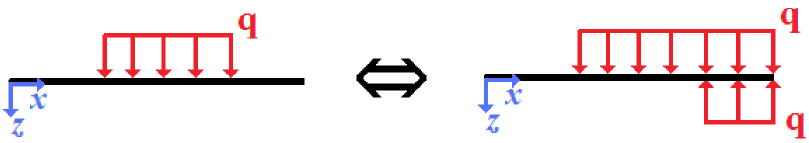
Taki zapis umożliwia bardzo proste całkowanie przez podstawianie

$$\int a(x-x_0)^n\,dx = \frac{a}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\begin{cases} \Leftrightarrow \quad a=M \quad n=0 \\ \Leftrightarrow \quad a=P \quad n=1 \\ \Leftrightarrow \quad a=q/2 \quad n=2 \end{cases}$$

- **UWAGA:** Ponieważ zawsze redukujemy układ sił z lewej strony, stąd obciążenie przyłożone do ostatniego (skrajnego prawego) punktu charakterystycznego nie występuje jawnie w żadnej części wzoru na $M(x)$.

- Jeśli obciążenie ciągłe w kończy się w pewnym punkcie, wtedy modelujemy to w ten sposób, że przyjmujemy, że dane obciążenie jest rozłożone już do końca belki, zaś od tego punktu przyłożone jest dodatkowe obciążenie, przeciwne do pierwotnego.



- **Rozkład ugięć i kątów ugięć otrzymuje się poprzez dwukrotne całkowanie dystrybucji momentów podzielonej przez $(-EI)$. Stałe całkowania umieszczamy przed pierwszą kreską pionową** (w części wzoru, która dotyczy pierwszego i wszystkich następnych przedziałów charakterystycznych).

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_1 + M\cdot(x-x_M)^1\Big|^{AB} + \frac{P}{2}\cdot(x-x_P)^2\Big|^{BC} + \frac{q}{2\cdot 3}(x-x_q)^3\Big|^{BC}\right]$$

$$w(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_2 + C_1\cdot x + \frac{M}{2}\cdot(x-x_M)^2\Big|^{AB} + \frac{P}{2\cdot 3}\cdot(x-x_P)^3\Big|^{BC} + \frac{q}{2\cdot 3\cdot 4}(x-x_q)^4\Big|^{BC}\right]$$

- Jeśli sztywność giętna *EI* jest zmienna na długości belki, wtedy moment zginający określamy na każdym przedziale charakterystycznym osobną funkcją – przykładowo, gdyby przyjąć, że w każdym przedziale z przykładu przedstawionego uprzednio sztywność jest inna, rozkład momentów określać będą odrębne funkcje:

$$M_{AB}(x) = 0$$
$$M_{BC}(x) = M\cdot(x-x_M)^0$$
$$M_{CD}(x) = M\cdot(x-x_M)^0 + P\cdot(x-x_P)^1 \quad \text{itd.}$$

Każdą z tych funkcji całkujemy następnie dzieląc ją uprzednio przez odpowiednią dla danego przedziału sztywność giętną – w wyniku całkowania, dla każdej z tych funkcji otrzymujemy dwie stałe całkowania. Dla każdej funkcji są one różne:

$$w_{AB}(x) = -\frac{1}{EI_{AB}}\left[A_2 + A_1\cdot x + \frac{M}{2}\cdot(x-x_M)^2\right]$$

$$w_{BC}(x) = -\frac{1}{EI_{BC}}\left[B_2 + B_1\cdot x + \frac{M}{2}\cdot(x-x_M)^2 + \frac{P}{2\cdot 3}\cdot(x-x_P)^3\right]$$

$$w_{CD}(x) = -\frac{1}{EI_{CD}}\left[C_2 + C_1\cdot x + \frac{M}{2}\cdot(x-x_M)^2 + \frac{P}{2\cdot 3}\cdot(x-x_P)^3 + \frac{q}{2\cdot 3\cdot 4}(x-x_q)^4\right]$$

- **Stałe całkowania wyznaczamy z kinematycznych warunków brzegowych,** tj. warunków na ugięcia i kąty ugięć jakie opisują podpory. Jeśli rozpatrujemy przypadek zmiennej sztywności, wtedy dodatkowe stałe wyznaczamy z **warunków zszycia,** np.:

$$w_{AB}(x_B)=w_{BC}(x_B) \quad \wedge \quad \varphi_{AB}(x_B)=\varphi_{BC}(x_B)$$

WAŻNA UWAGA

Zapisując warunki brzegowe, wartość ugięcia lub kąta ugięcia w danym punkcie należy oczywiście wyznaczyć na podstawie tych części wzoru, które odpowiadają przedziałom charakterystycznym, do których należy punkt podparcia!

Metoda Clebscha nadaje się również do rozwiązywania belek statycznie niewyznaczalnych. Wtedy zapisujemy rozkład momentów uwzględniając w nim nieznane reakcje podporowe – wartości tych reakcji są wyznaczane na podstawie warunków brzegowych oraz równań równowagi razem ze stałymi całkowania.

METODA MOHRA:

Metoda Mohra bazuje na spostrzeżeniu, że wyznaczenie rozkładu momentów zginających dla zadanego obciążenia q jest niczym więcej jak tylko rozwiązaniem niejednorodnego równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego:

$$\frac{d^2 M}{dx^2}=-q(x)$$

Równanie ugięcia belki ma identyczną postać – odmienne ma jedynie warunki brzegowe. Możemy więc rozważać problem wyznaczenia ugięcia belki, w której znany jest rozkład momentów za równoważny z problemem wyznaczenia momentów w pewnej fikcyjnej belce – tzw. **belce zastępczej**. Wprowadźmy więc gęstość fikcyjnego obciążenia:

$$\tilde{q}(x)=\frac{M(x)}{EI}$$

Odpowiadający mu rozkład fikcyjnych momentów $\tilde{M}(x)$, który możemy wyznaczyć na drodze zwykłych obliczeń statycznych, spełnia wtedy równanie różniczkowe ugięcia belki.

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{M}}{dx^2}=-\tilde{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2}=-\frac{M}{EI}}$$

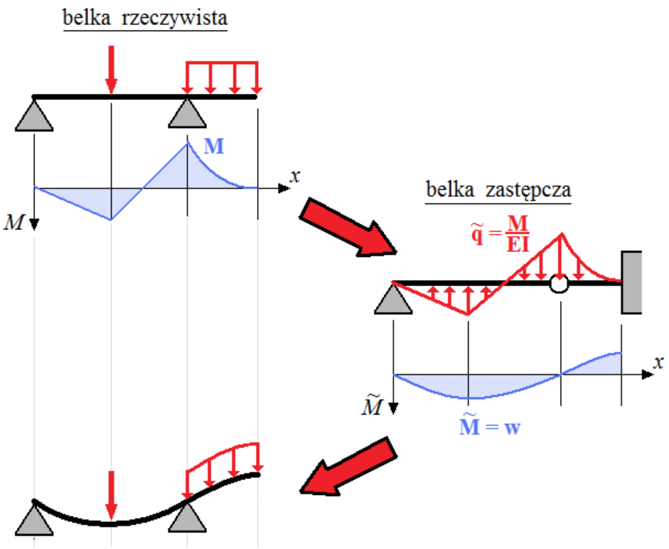
Pozostaje jeszcze problem sprecyzowania, jak powinna wyglądać ta belka zastępcza, tj. w jaki sposób powinna być podparta – problem ten dotyczy po prostu określenia warunków brzegowych dla nowego równania na fikcyjny moment zginający w belce zastępczej. Warunki te muszą odpowiadać odpowiednim warunkom brzegowym dla równania na ugięcie belki rzeczywistej.

Jak wiadomo, każda podpora w belce rzeczywistej charakteryzuje się pewnymi ograniczeniami na wartość ugięcia i kątów ugięć oraz na wartości sił poprzecznych oraz momentów zginających w tej belce. Ponieważ moment zginający w belce rzeczywistej jest równy gęstości obciążenia fikcyjnego w belce zastępczej, wykorzystując zależności różniczkowe między ugięciami, kątami ugięć, momentami zginającymi, siłami poprzecznymi oraz gęstością obciążenia, które obowiązują zarówno dla rzeczywistych przemieszczeń i sił jak i dla wielkości fikcyjnych, możemy napisać:

$$\frac{1}{EI} M(x) = \tilde{q}(x)$$

$$\varphi(x) = \tilde{Q}(x)$$

$$w(x) = \tilde{M}(x)$$



Tak więc warunki brzegowe dla belki rzeczywistej transformują się dla belki fikcyjnej w następujący sposób:

Punkt charakterystyczny belki rzeczywistej	**Warunki brzegowe**	**Punkt charakterystyczny belki zastępczej**
Podpora przegubowa (brzegowa)	$\varphi \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{Q} \neq 0$ $w = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{M} = 0$	Podpora przegubowa (brzegowa)
Podpora przegubowa (pośrednia)	$\varphi^L \neq \varphi^P \;\Rightarrow\; \tilde{Q}^L \neq \tilde{Q}^P$ $w = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{M} = 0$	Przegub
Utwierdzenie	$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{Q} = 0$ $w = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{M} = 0$	Koniec swobodny
Utwierdzenie z przesuwem	$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \tilde{Q} = 0$ $w \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{M} \neq 0$	Utwierdzenie z przesuwem
Koniec swobodny	$\varphi \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{Q} \neq 0$ $w \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{M} \neq 0$	Utwierdzenie
Przegub	$\varphi^L \neq \varphi^P \;\Rightarrow\; \tilde{Q}^L \neq \tilde{Q}^P$ $w^L = w^P \;\Rightarrow\; \tilde{M}^L = \tilde{M}^P$	Podpora przegubowa (pośrednia)

Schemat postępowania w metodzie Mohra jest więc następujący:

- **Wyznaczamy rozkład momentów zginających w rzeczywistej belce pod rzeczywistym obciążeniem;**

- **Konstruujemy belkę zastępczą zastępując podpory i przeguby odpowiednimi podporami lub przegubami wg schematu przedstawionego powyżej;**

- **Wyznaczamy rozkład fikcyjnych momentów w belce zastępczej pod obciążeniem fikcyjnym równym rozkładowi momentów z belki rzeczywistej podzielonemu przez EI;**

- **Rozkład momentów fikcyjnych w belce zastępczej jest równy rozkładowi ugięć w belce rzeczywistej;**

