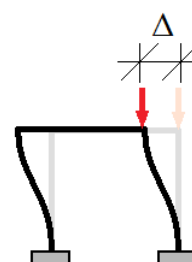


15. Efekty drugiego rzędu

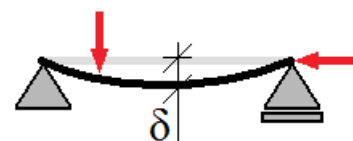
W mechanice układów prętowych efektami II rzędu nazywamy zjawiska, w których przemieszczenie wywołane obciążeniem powoduje wzrost wartości sił przekrojowych, co z kolei prowadzi do pogłębienia przemieszczenia i spowodowanego tym dalszego wzrostu wartości sił itd. aż do osiągnięcia nowego stanu równowagi. W dotychczasowych rozważaniach nie uwzględnialiśmy takich zjawisk. W przypadku konstrukcji statycznie wyznaczalnych wręcz przyjmowaliśmy zasadę zeszytowania, w myśl której deformacja konstrukcji jest na tyle mała, że nie wpływa na zmianę rozkładu sił zewnętrznych a co za tym idzie, nie wpływa na wartości sił przekrojowych. W układach statycznie niewyznaczalnych konieczne było określenie przemieszczeń konstrukcji, tak aby na podstawie znanych (jednoznacznych) zależności między przemieszczeniami i siłami przekrojowymi wyznaczyć te drugie, jednakże nieliniowa interakcja przemieszczenia z obciążeniem zewnętrznym nadal nie była uwzględniana.

Wśród efektów II rzędu wymienić należy:

- **Efekty $P-\Delta$** (tzw. „efekty P-duże delta”) – związane z przemieszczaniem się węzłów konstrukcji. W szczególności, układ sił przyłożony w tych węzłach po większej deformacji oddziałuje na konstrukcję w jakościowo odmienny sposób.



- **Efekty $P-\delta$** (tzw. „efekty P-małe delta”) – związane ze uwzględnieniem zmiany rozkładu sił przekrojowych spowodowanych deformacją prętów na ich długości – przykładowo siła osiowa przyłożona na końcach pręta, w sytuacji, gdy ulega on wygięciu, względem niektórych przekrojów pręta nie działa już w jego osi. W szczególności, ściskanie prętów zginanych pogłębia ich ugięcie i powiększa moment zginający – przy rozciąganiu, sytuacja jest odwrotna.



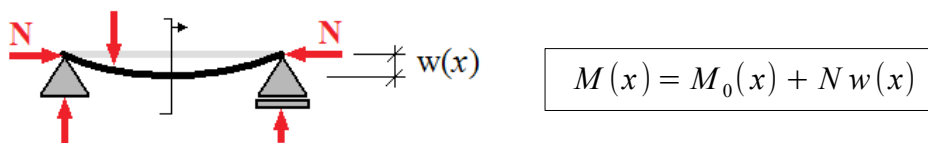
- **Wyboczenie** – jest to zjawisko gwałtownego przejścia z jednego stanu równowagi, w jakościowo odmienny stan, po przekroczeniu pewnej krytycznej wartości obciążenia zewnętrznego



- **Zagadnienie belki na podłożu sprężystym (podłożu Winklera)** – model podłoża sprężystego Winklera, jest najprostszym modelem opisującym deformację pręta, który spoczywa w ośrodku stawiającym opór tej deformacji.



Uwzględnienie interakcji odkształcenia z obciążeniem zewnętrznym, wymaga zmodyfikowania przyjętego modelu. Przyjmując, że znamy rozkład momentów zginających, wyznaczonych z pominięciem efektów II rzędu (oznaczymy go przez $M_0(x)$), w prosty sposób możemy uwzględnić ich powiększenie w każdym przekroju wskutek działania siły ściskającej, redukując układ sił równoległych do osi nieodkształconego pręta do środka ciężkości przekroju na osi zdeformowanej – mimośród działania tej siły jest równy po prostu ugięciu w danym punkcie:



Znając zależność między ugięciem a momentem zginającym, możemy wyznaczyć równanie rządzące zagadnieniem zginania ze ściskaniem:

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = -\frac{1}{EI} M(x) \quad \Rightarrow \quad w''(x) + k^2 w(x) = -\frac{M_0}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Równanie powyższe jest niejednorodnym liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu o stałych współczynnikach – równanie posiadać musi ponadto dwa warunki brzegowe, odpowiadające sposobowi podparcia. Jego rozwiązaniem jest rozkład ugięcia belki, uwzględniający efekty II rzędu.

Rozwiązanie to uwzględnia wpływ ugięcia poprzecznego belki na rozkład sił wewnętrznych, w dalszym ciągu jednak pomija przemieszczenia podłużne (wzdłuż osi pręta). Trzeba o tym pamiętać

Siły przekrojowe (siły poprzeczne i momenty zginające), które uwzględniają wpływ ugięcia na ich rozkład, otrzymuje się odpowiednio przez drugą i trzecią pochodną funkcji ugięcia.:

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{d x^2} \quad Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{d x^3}$$

Rozwiązanie powyższego równania jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego (tj. naszego równania po przyjęciu prawej strony równej 0) i dowolnej całki szczególnej równania niejednorodnego. Całkę ogólną tego równania znajdujemy stosując typową metodę dla równań liniowych o stałych współczynnikach. Zakładamy rozwiązanie w postaci funkcji wykładniczej $w(x) = e^{rx}$ i podstawiamy do równania, dzieląc następnie przez e^{rx} (które jest zawsze różne od 0). Otrzymujemy **równanie charakterystyczne**:

$$r^2 + k^2 = 0$$

Całka ogólna jest kombinacją liniową funkcji odpowiadających pierwiastkom równania charakterystycznego, przy czym:

- Pierwiastkom rzeczywistym r_n odpowiadają funkcje postaci $A \cdot e^{r_n x}$, gdzie A jest dowolną stałą.
- Sprzężonym pierwiastkom zespolonym $r_n, r_{n+1} = \bar{r}_n$ odpowiadają funkcje postaci $e^{\Re(r_n) \cdot x} \cdot [A \cdot \sin(\Im(r_n) \cdot x) + B \cdot \cos(\Im(r_n) \cdot x)]$, gdzie A i B są dowolnymi stałymi, a $\Re(r_n)$ i $\Im(r_n)$ oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną r_n .

- Jeśli otrzymujemy pierwiastek wielokrotny, wtedy rozwiązań poszukujemy wśród funkcji takich jak wspomniano powyżej, przy czym stałe parametry zastępujemy wielomianami wyższych stopni.

W naszym przypadku, z uwagi na dodatniość k otrzymujemy dwa sprzężone pierwiastki zespolone $r_1 = k i$, $r_2 = \bar{r}_1 = -k i$, którym odpowiada całka ogólna równania jednorodnego (CORJ) postaci

$$w_{og}(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)$$

Całkę szczególną równania niejednorodnego (CSRN) znajdujemy np. poprzez metodę uzmienniania stałej lub – w przypadku prostych funkcji $M_0(x)$ – przewidując ją w tej samej postaci co funkcja M_0 (np. wielomianu odpowiedniego stopnia).

Pojawiające się stałe całkowania wyznaczamy z kinematycznych warunków brzegowych związanych z podporami lub przemieszczeniami, których obecność przewidujemy w nowym stanie równowagi – w takim przypadku to nieznanne przemieszczenie jest kolejną stałą podlegającą wyznaczeniu. **Ważne:**

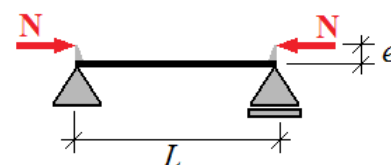
- 1) Rozważając nawet proste pręty, jeśli przemieszczeniu ulega węzeł, w którym przyłożona jest siła osiowa, wtedy, wyznaczając reakcje oraz funkcję M_0 , musimy uwzględnić to nowe ramię działania siły osiowej.
- 2) Musimy pamiętać, że funkcja M_0 określa moment sił względem środka ciężkości przekroju przed deformacją. A zatem wyznaczamy M_0 rozpatrujemy siły zewnętrzne i reakcje w konfiguracji zdeformowanej, jednak określamy moment tych sił względem osi przed deformacją.

W przypadku układów statycznie niewyznaczalnych – tj. jeśli zastosowane podparcie narzuca więcej niż 2 kinematyczne warunki brzegowe (które nie mogą być w ogólności spełnione przez rozwiązanie równania różniczkowego 2 rzędu) – wtedy wprowadzamy nowe parametry zadania podlegające wyznaczeniu – np. nieznanne reakcje podporowe.

ŚCISKANIE MIMOŚRODOWE

Do tej pory, rozpatrując przypadek mimośrodowego ściskania pręta, redukowaliśmy układ obciążeń zewnętrznych do środka ciężkości przekroju – uzyskując obciążenie złożone z siły osiowej i momentu zginającego – a następnie przyjmowaliśmy rozwiązanie (m.in. rozkład naprężeń) będące prostą superpozycją (dodaniem) rozwiązań zagadnienia ściskania osiowego i prostego zginania. Całkiem pomijaliśmy efekty II rzędu. Teraz zajmiemy się tym problemem dokładniej.

Rozpatrzmy belkę swobodnie podpartą o przekroju bisymetrycznym o wysokości h , ściskaną mimośrodowo. Podobnie, jak wcześniej, siłę ściskającą N na mimośrodku e zastąpimy układem siły osiowej N i skupionego momentu zginającego (pary sił) o wartości Ne . Dla ustalenia uwagi, przyjmijmy, że siła przesunięta jest względem środka ciężkości wzdłuż wysokości, tj. wzdłuż osi z , co skutkuje zginaniem momentem M_y w płaszczyźnie (x, z) .



Rozkład momentów zginających od obciążenia zewnętrznego, z pominięciem efektów II rzędu jest dany funkcją: $M_0(x) = N e$.

Równanie różniczkowe opisujące zginanie belki z uwzględnieniem siły osiowej:

$$w''(x) + k^2 w(x) = -\frac{M_0}{EI} \quad k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Całka ogólna równania jednorodnego (CORJ): $w_{og}(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)$

Ponieważ funkcja z prawej strony równania niejednorodnego jest funkcją stałą, stąd całkę szczególną równania niejednorodnego (CSRN) przewidujemy w postaci: $w_{sz}(x) = C$.

Rozwiązanie równania - całka ogólna równania niejednorodnego (CORN) - jest równe:

$$w(x) = w_{og} + w_{sz} = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) + C$$

Funkcja ta musi spełniać nasze równanie różniczkowe:

$$w''(x) + k^2 w(x) = -\frac{M_0}{EI} \quad \Rightarrow \quad k^2 C = -\frac{N e}{EI} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{N e}{k^2 EI} = -e$$

Musi ona ponadto spełniać warunki brzegowe. Warunki podporowe dla belki swobodnie podpartej dają nam następujący układ równań:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w(0) = B + C = 0 \\ w(L) = A \sin(kL) + B \cos(kL) + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -C = e \\ A = -\frac{C + B \cos(kL)}{\sin(kL)} = \frac{e[1 - \cos(kL)]}{\sin(kL)} \end{cases}$$

Ponieważ układ jest symetryczny, stąd największy moment zginający występować będzie w środku przęsła, tam gdzie mimośród działania siły (suma mimośrodu wstępnego i ugięcia będącego efektem II rzędu) jest największy. Ugięcie w środku przęsła:

$$f = w\left(\frac{L}{2}\right) = e \cdot \left[\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) + \cos\left(\frac{kL}{2}\right) - 1 \right] = e \left[\sec\left(\frac{kL}{2}\right) - 1 \right]$$

Moment zginający w środku przęsła: $M_y\left(\frac{L}{2}\right) = N(e + f) = e N \sec\left(\frac{kL}{2}\right)$

Maksymalne naprężenie normalne: $\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I} \cdot z_{max} = \frac{N}{A} \left[1 + \frac{he}{2i_z^2} \cdot \sec\left(\frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{EI}}\right) \right]$

Dla porównania, pomijając efekty II rzędu, otrzymalibyśmy: $\sigma_{max} = \frac{N}{A} \left[1 + \frac{he}{2i_z^2} \right]$

Wartości funkcji secans są zawsze większe od 1, a zatem pominięcie efektów II rzędu w zagadnieniu ściskania mimośrodowego jest zawsze niedoszacowaniem stawiającym nas po stronie niebezpiecznej.

Pamiętając, że dla belki swobodnie podpartej $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, możemy napisać:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \left[1 + \frac{he}{2i_z^2} \cdot \sec\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{N_{cr}}}\right) \right]$$

Łatwo zauważyć, że dla $N \rightarrow N_{cr}$ naprężenia $\sigma_{max} \rightarrow \infty$. Stąd wniosek, że pręt ściskany mimośrodowo prędzej ulegnie zniszczeniu wskutek przekroczenia naprężeń dopuszczalnych, niż wskutek utraty stateczności (tj. wskutek wyboczenia).

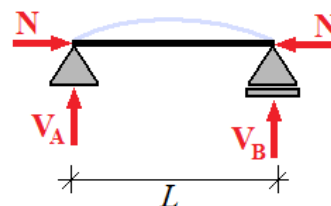
WYBOCZENIE

Ze zjawiskiem wyboczenia mamy do czynienia w sytuacji, kiedy pręt prosty, obciążony siłą osiową, ulega gwałtownemu przejściu do nowej, jakościowo odmiennej, krzywoliniowej postaci, w której układ przyłożonych sił osiąga nowy stan równowagi. Wyboczenie może zajść nawet w przypadku, gdy nie są obecne żadne obciążenia poprzeczne, zginające, jednak wskutek deformacji układu, na podporach pojawią się reakcje - to one wyznaczą będą funkcję $M_0(x)$. Zajmijmy się zatem poszczególnymi schematami podparcia belki. Za każdym razem przyjmujemy całkę ogólną równania postaci:

$$w_{og}(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)$$

BELKA SWOBODNIE PODPARTA

W przypadku belki swobodnie podpartej z równań równowagi wynika, że nawet w krzywoliniowym stanie równowagi (po wyboczeniu) reakcje podporowe muszą być równe 0 - stąd uzyskujemy $M_0(x) \equiv 0$ i rozwiązanie równania jest równe całce ogólnej równania jednorodnego:



$$w = w_{og} = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(0)=0 \\ w(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ A \sin(kL)=0 \end{cases}$$

Przyjęcie $A=0$ celem spełnienia drugiego warunku daje nam rozwiązanie trywialne, które odrzucamy. Równanie to może być zatem spełnione jedynie w przypadku, gdy:

$$kL = n\pi \Rightarrow k_n = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow N_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

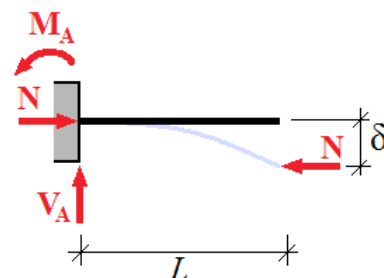
Widzimy zatem, że układ może przyjąć nowy, krzywoliniowy stan równowagi, jeśli tylko siła ściskająca przyjmie wartość określoną powyższym wzorem. Im większe n , tym większa jest wymagana siła - oczywiste jest, że wyboczenie nastąpi już przy najmniejszej z nich, tj. dla $n = 1$. Otrzymujemy stąd wzór na **siłę krytyczną (wyboczeniową)**:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2}$$

nazywany **wzorem Eulera**, który podał to rozwiązanie. We wzorze zastąpiliśmy wielkość I (moment bezwładności przekroju) symbolem I_{min} - w przypadku jednakowego podparcia we wszystkich płaszczyznach, pręt ulegnie wyboczeniu w tej płaszczyźnie, dla której energia potrzebna na zmianę konfiguracji jest najmniejsza a w konsekwencji i siła wybozeniowa jest najmniejsza. Jest to oczywiście płaszczyzna najmniejszej sztywności giętej, tj. płaszczyzna prostopadła do osi minimalnego momentu bezwładności.

WSPORNIK

Rozwiązanie zadania w przypadku wspornika przebiega nieco odmiennie. Spodziewamy się bowiem, jak będzie wyglądać postać wybożenia, tj. jaki może przyjąć kształt wspornik ściskany, tak aby deformacja ta odbyła się najmniejszym kosztem energetycznym – schematycznie pokazano to na ilustracji obok. Widać zatem, że koniec wspornika, do którego przyłożono obciążenie osiowe, ulega małemu przemieszczeniu δ - w konsekwencji siła ściskająca działa na pewnym mimośrodku względem punktu utwierdzenia, co skutkuje występowaniem reakcji momentu utwierdzenia $M_A = N\delta$. Ponadto, z równania równowagi $\Sigma Y = V_A = 0$.



Rozkład momentów zginających: $M_0(x) = -M_A = -N\delta$

CORJ: $w = w_{og} = A \sin(kx) + B \cos(kx)$

CSRN przewidujemy w postaci: $w_{sz} = C$

CORN: $w = w_{og} + w_{sz} = A \sin(kx) + B \cos(kx) + C$

Podstawiając do równania różniczkowego $w'' + k^2 w = -\frac{M_0}{EI}$ otrzymujemy:

$$k^2 C = \frac{N\delta}{EI} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{N\delta}{k^2 EI} = \delta$$

Warunki brzegowe:

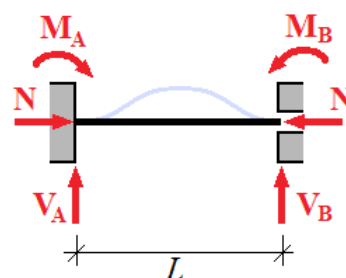
$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ \varphi(0) = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 \\ w(L) = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = 0 \\ A = 0 \\ A \sin(kL) + B \cos(kL) + C = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -C = -\delta \\ \cos(kL) = 0 \end{cases}$$

Ostatnie równanie jest spełnione jest, gdy

$$kL = \frac{n\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad k_n = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{n\pi}{2L} \quad \Rightarrow \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2L)^2}$$

BELKA OBUSTRONNIE UTWIERDZONA

Jest to przypadek statycznie niewyznaczalny – reakcje i spowodowany nimi rozkład momentów zginających nie są znane i muszą być wyznaczone razem z przemieszczeniem układu. Wprowadzamy dodatkowe nieznanne parametry zadania M_A, V_A .



Rozkład momentów zginających: $M_0(x) = M_A + V_A \cdot x$
 CORJ: $w = w_{og} = A \sin(kx) + B \cos(kx)$
 CSRN przewidujemy w postaci: $w_{sz} = Cx + D$
 CORN: $w = w_{og} + w_{sz} = A \sin(kx) + B \cos(kx) + Cx + D$

Podstawiając do równania różniczkowego $w'' + k^2 w = -\frac{M_0}{EI}$ otrzymujemy:

$$k^2 Cx + k^2 D = -\frac{V_A}{EI}x - \frac{M_A}{EI} \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{V_A}{k^2 EI} = -\frac{V_A}{N} \\ D = -\frac{M_A}{k^2 EI} = -\frac{M_A}{N} \end{cases}$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ \varphi(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ w(L) = 0 \\ \varphi(L) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + D = 0 \\ kA + C = 0 \\ A \sin(kL) + B \cos(kL) + CL + D = 0 \\ kA \cos(kL) - kB \sin(kL) + C = 0 \end{cases}$$

Przyjmując $B = -D = \frac{M_A}{N}$, $A = -\frac{C}{k} = \frac{V_A}{kN}$, pozostałe równania można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} V_A(\sin(kL) - kL) + kM_A(\cos(kL) - 1) = 0 \\ V_A(\cos(kL) - 1) - kM_A \sin(kL) = 0 \end{cases}$$

Jest to układ równań jednorodnych na V_A i M_A . Rozwiązanie niezerowe istnieje jedynie wtedy, gdy wyznacznik macierzy współczynników tego układu będzie równy 0:

$$\det = (\sin(kL) - kL) \cdot (-\sin(kL)) - (\cos(kL) - 1)^2 = kL \sin(kL) + 2 \cos(kL) - 2 = 0$$

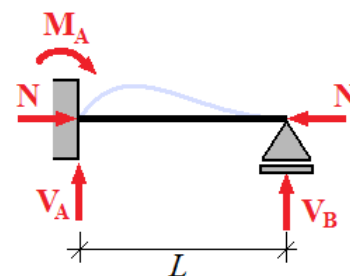
Jest to spełnione, gdy

$$kL = 2n\pi \Rightarrow k_n = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{2n\pi}{L} \Rightarrow \boxed{N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,5L)^2}}$$

UTWIERDZENIE - PODPORA PRZEGUBOWA

Postępując analogicznie, jak w poprzednich przypadkach, otrzymujemy:

Rozkład momentów zginających: $M_0(x) = V_B \cdot (L - x)$
 CORJ: $w = w_{og} = A \sin(kx) + B \cos(kx)$
 CSRN przewidujemy w postaci: $w_{sz} = Cx + D$
 CORN: $w = w_{og} + w_{sz} = A \sin(kx) + B \cos(kx) + Cx + D$



Podstawiając do równania różniczkowego $w'' + k^2 w = -\frac{M_0}{EI}$ otrzymujemy:

$$k^2 C x + k^2 D = \frac{V_B}{EI} x - \frac{V_B L}{EI} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{V_B}{k^2 EI} = \frac{V_B}{N} \\ D = -\frac{V_B L}{k^2 EI} = -\frac{V_B L}{N} \end{cases}$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(0)=0 \\ \varphi(0) = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ w(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+D=0 \\ kA+C=0 \\ A \sin(kL) + B \cos(kL) + CL + D = 0 \end{cases}$$

Przyjmując $B = -D = \frac{V_B L}{N}$, $A = -\frac{C}{k} = -\frac{V_B}{kN}$, ostatnie równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{V_B}{kN} [-\sin(kL) + kL \cos(kL)] = 0$$

Powyższe równanie będzie spełnione dla V_B różnego od 0, jeśli tylko wyrażenie w nawiasie będzie równe 0. Możemy traktować je jako nieliniowe równania na zmienną kL .

$$-\sin(kL) + kL \cos(kL) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(kL) = kL$$

Najmniejszym pierwiastkiem tego równania (odpowiadającym najmniejszej sile wyboczeniowej), który można znaleźć na drodze obliczeń numerycznych jest:

$$kL \approx 4,4934 \Rightarrow kL = \sqrt{\frac{NL^2}{EI}} = 4,4934 \Rightarrow \boxed{N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(0,699L)^2}}$$

UTWIERDZENIE - UTWIERDZENIE Z PRZESUWEM

Z równania równowagi:

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A = 0$$

Rozkład momentów zginających:

$$M_0(x) = M_A$$

CORJ:

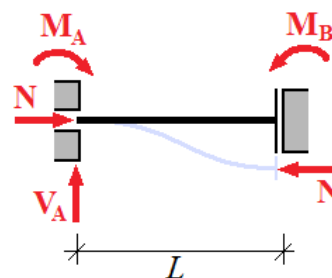
$$w = w_{og} = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

CSRN przewidujemy w postaci:

$$w_{sz} = C$$

CORN:

$$w = w_{og} + w_{sz} = A \sin(kx) + B \cos(kx) + C$$



Podstawiając do równania różniczkowego $w'' + k^2 w = -\frac{M_0}{EI}$ otrzymujemy:

$$k^2 C = -\frac{M_A}{EI} \Rightarrow C = -\frac{M_A}{k^2 EI} = -\frac{M_A}{N}$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(0)=0 \\ \varphi(0)=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0}=0 \\ w(L)=\delta \\ \varphi(L)=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=L}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ kA=0 \\ A\sin(kL)+B\cos(kL)+C=\delta \\ kA\cos(kL)-kB\sin(kL)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-C \\ A=0 \\ -C\cos(kL)+C-\delta=0 \\ kC\sin(kL)=0 \end{cases}$$

Ostatnie dwa równania stanowią układ równań na niewiadome C, δ . Będzie on posiadał rozwiązanie niezerowe, jeśli wyznacznik macierzy współczynników tego układu będzie równy 0.

$$\det = [1 - \cos(kL)] \cdot 0 - k \sin(kL) \cdot (-1) = k \sin(kL) = 0$$

Jest to spełnione, gdy

$$kL = n\pi \Rightarrow k_n = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2}$$

UTWIERDZENIE Z PRZESUWEM - PODPORA PRZEGUBOWA

Z równań równowagi:

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_B = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A = N\delta$$

Rozkład momentów zginających:

$$M_0(x) = M_A - N\delta = 0$$

CORJ:

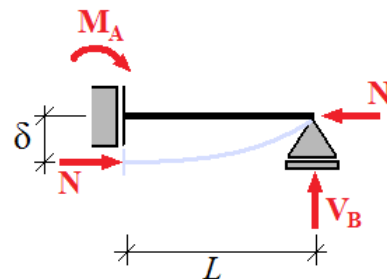
$$w = w_{og} = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

CSRN przewidujemy w postaci:

$$w_{sz} = 0$$

CORN:

$$w = w_{og} + w_{sz} = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$



Podstawiając do równania różniczkowego $w'' + k^2 w = -\frac{M_0}{EI}$ otrzymujemy:

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(0)=\delta \\ \varphi(0)=\frac{dw}{dx}\Big|_{x=0}=0 \\ w(L)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\delta \\ kA=0 \\ A\sin(kL)+B\cos(kL)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\delta \\ \cos(kL)=0 \end{cases}$$

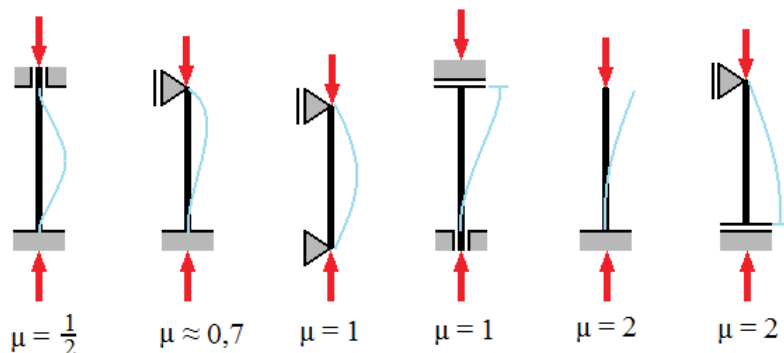
Ostatnie równanie jest spełnione jest, gdy

$$kL = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow k_n = \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{n\pi}{2L} \Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2L)^2}$$

Podsumowując powyższe rozwiązania, możemy napisać ogólny wzór na **siłę krytyczną**:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_w^2}$$

Gdzie L_w to **długość wyboczeniowa** równa $L_w = \mu L$, zaś **współczynnik długości wyboczeniowej** μ określamy na podstawie schematu podparcia:



Wprowadza się wielkość $\lambda = \frac{L_w}{i_{min}}$ nazywaną **smukłością pręta** - $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ oznacza tu minimalny promień bezwładności. Jest to parametr bezwymiarowy. Zauważmy, że uwzględnia on wszystkie informacje dotyczące geometrii układu: długość pręta, sposób podparcia oraz pole powierzchni i moment bezwładności przekroju. Dzielic wyrażenie na siłę krytyczną przez pole powierzchni pręta otrzymamy wzór na **Eulerowskie naprężenie krytyczne**:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_w^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Funkcja $\sigma_{cr}(\lambda)$ jest hiperbolą drugiego stopnia - jeśli smukłość pręta zmierza do 0 (pręt jest bardzo krótki, albo jego przekrój bardzo duży), wtedy naprężenie krytyczne - naprężenie przy którym następuje wyboczenie - rośnie do nieskończoności. Nie może to być oczywiście prawdą - zanim pręt uległby wyboczeniu, prędzej uległby uplastycznieniu. Co więcej, już po przekroczeniu granicy proporcjonalności R_H , wzór na σ_{cr} przestaje być poprawny, ponieważ został on wyprowadzony przy założeniu prawa Hooke'a, które dla naprężeń powyżej R_H nie obowiązuje. Graniczną wartość smukłości dla której wzór Eulera jeszcze obowiązuje nazywamy **smukłością graniczną** λ_{gr} :

$$\sigma_{cr}(\lambda_{gr}) = R_H \quad \Rightarrow \quad \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$$

O ile smukłość jest parametrem charakteryzującym element, o tyle smukłość graniczna jest charakterystyką **materiału**. Tak więc dla $\lambda < \lambda_{gr}$ nie możemy stosować Eulerowskiego wzoru na siłę krytyczną. Stosuje się różne hipotezy dotyczące zależności $\sigma_{cr}(\lambda)$ dla $\lambda < \lambda_{gr}$. Do najprostszych i najpowszechniej stosowanych należą:

- hipoteza Tetmajera-Jasińskiego
- hipoteza Johnsona-Ostenfelda

Dla naprężeń krytycznych określonych zgodnie z jedną z powyższych hipotez, siłę krytyczną wyznacza się po prostu jako:

$$N_{cr} = \sigma_{cr} A$$

HIPOTEZA TETMAJERA – JASIŃSKIEGO

Jest to najprostsza z hipotez, która zakłada, że maksymalną wartością naprężenia krytycznego jest granica plastyczności R_e (tj. dla nieskończonego krępego pręta, dla $\lambda=0$, wyboczenie pojawia się w chwili uplastycznienia przekroju), zaś zależność $\sigma_{cr}(\lambda)$ dla $\lambda \in (0, \lambda_{gr})$ jest liniowa:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{cr}^{TJ}(\lambda) = a - b \cdot \lambda \\ \sigma_{cr}^{TJ}(\lambda=0) = R_e \\ \sigma_{cr}^{TJ}(\lambda=\lambda_{gr}) = R_H \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = R_e \\ b = \frac{(R_e - R_H)}{\lambda_{gr}} \end{cases}$$

HIPOTEZA JOHNSONA – OSTENFELDA

Jest to hipoteza w dużej mierze analogiczna do hipotezy Tetmajera-Jasińskiego, zakładająca jednak, że zależność $\sigma_{cr}(\lambda)$ zadana jest funkcją kwadratową:

$$\sigma_{cr}^{JO}(\lambda) = a - b \cdot \lambda^2$$

Warunki na określenie wartości stałych a i b określa się dwójako:

- Żądając, aby maksymalnym dopuszczalnym naprężeniem była granica plastyczności R_e i wymagając ciągłości $\sigma_{cr}(\lambda)$ w $\lambda = \lambda_{gr}$ (tj. aby parabola Johnsona-Ostfelda i hiperbola Eulera miały w tym punkcie tę samą wartość) otrzymujemy:

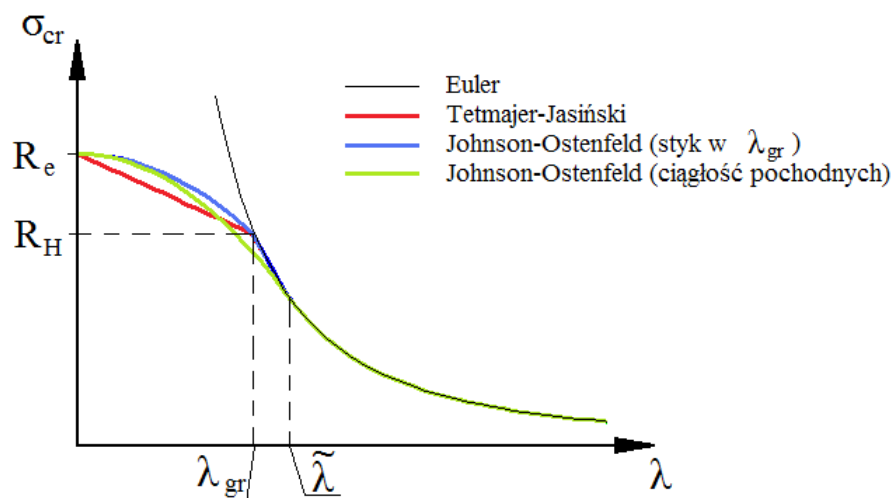
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{cr}^{JO}(\lambda=0) = R_e \\ \sigma_{cr}^{JO}(\lambda=\lambda_{gr}) = R_H \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = R_e \\ b = \frac{(R_e - R_H)}{\lambda_{gr}^2} \end{cases}$$

- Żądając, aby maksymalnym dopuszczalnym naprężeniem była granica plastyczności R_e i wymagając ciągłości $\sigma_{cr}(\lambda)$ i jej pochodnej na granicy styku paraboli Johnsona-Ostfelda i hiperboli Eulera otrzymujemy:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{cr}^{JO}(\lambda=0) = R_e \\ \sigma_{cr}^{JO}(\lambda=\tilde{\lambda}) = \sigma_{cr}(\lambda=\tilde{\lambda}) \\ \left. \frac{d\sigma_{cr}^{JO}}{d\lambda} \right|_{\tilde{\lambda}} = \left. \frac{d\sigma_{cr}}{d\lambda} \right|_{\tilde{\lambda}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = R_e \\ b = \frac{R_e^2}{4\pi^2 E} \\ \tilde{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{2E}{R_e}} \end{cases}$$

W tym drugim przypadku hipotezy JO, to nie smukłość graniczna λ_{gr} jest minimalną wartością smukłości pręta, dla której można stosować wzór Eulera, lecz pewna wartość $\tilde{\lambda}$ określona powyżej – nie ma ona konkretnej interpretacji fizycznej.

Zależności $\sigma_{cr}(\lambda)$ dla każdej z hipotez i ich porównanie z teoretyczną krzywą Eulera przedstawione są na wykresie poniżej.

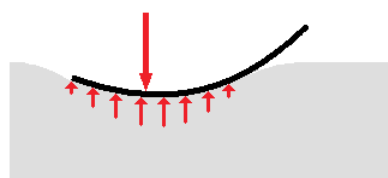


BELKA NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM TYPU WINKLERA

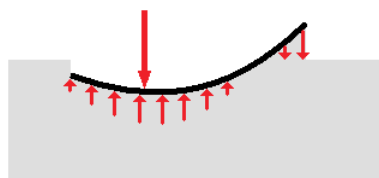
Jednym ze zjawisk, które można opisać dzięki uwzględnieniu wpływu deformacji układu na rozkład sił przekrojowych jest interakcja belki ze sprężystym podłożem, na którym spoczywa. W ogólności jest to zagadnienie bardzo trudne – jak każde z tzw. zagadnień kontaktowych. Można jednak rozwiązać ten problem w przybliżony sposób stosując model **podłoża sprężystego typu Winklera** – model ten zakłada, że opór podłoża jest wprost proporcjonalny to przemieszczenia, jakiego ono doznaje:

$$q_g(x) = a \cdot w(x) \quad ,$$

przy czym współczynnik proporcjonalności jest iloczynem odporu gruntu c [MPa/m] i szerokości podstawy belki b . Model ten ma jedną istotną wadę – zakłada, że więzy między belką a gruntem są symetryczne, tj. belka odrywająca się od podłoża przyciągana jest do niego proporcjonalnie do miary tego przemieszczenia. Jednakże w przypadku belek długich i obciążonych w sposób nie powodujący istotnie nierównomiernego osiadania (szyny, ławy fundamentowe), model ten może dać dobre oszacowanie.



Rzeczywiste zachowanie podłoża



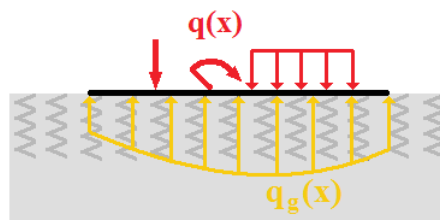
Model Winklera

Równanie belki spoczywającej na podłożu Winklera uzyskujemy ze zwykłego równania belki, dodając do gęstości obciążenia zewnętrznego zwrócony przeciwie opór gruntu $q_{całk}(x) = q(x) - q_g(x)$. Stąd otrzymujemy:

$$w^{IV} + z^4 \cdot w = \frac{q(x)}{EI}, \quad z = \sqrt[4]{\frac{c \cdot b}{EI}}$$

gdzie:

c – odpór gruntu [MPa/m]
 b – szerokość belki [m]



Jest to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu o stałych współczynnikach. Pierwiastkami równania charakterystycznego są dwie pary sprzężonych rozwiązań zespolonych $r_{1/2} = \frac{z}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$, $r_{3/4} = \frac{z}{\sqrt{2}}(-1 \pm i)$, co daje nam całkę ogólną postaci:

$$w_{og} = e^{\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[C_1 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right] + e^{-\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[C_3 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_4 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

Stałe całkowania wyznaczamy na podstawie odpowiednich (kinematycznych i statycznych) warunków brzegowych.