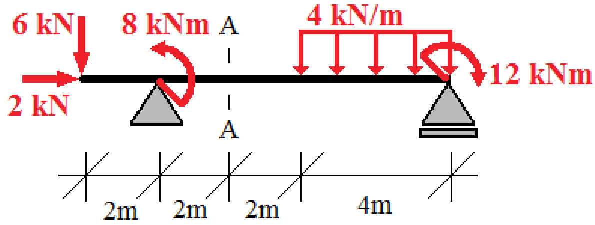
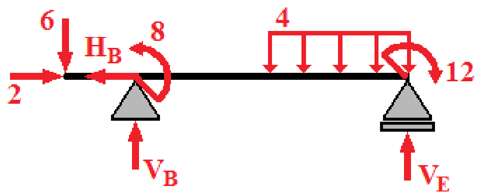
ZADANIE 4.1
Wyznaczyć siły przekrojowe w przekroju A-A belki jak na rysunku.



Przed wyznaczeniem sił przekrojowych należy wyznaczyć całkowite obciążenie belki – siły czynne są zadane, siły bierne – reakcje podporowe – wyznaczamy z równań równowagi:

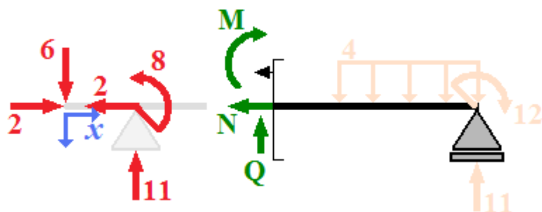
$$\Sigma X=0: \quad 2-H_B=0 \quad \Rightarrow \quad H_B=2$$
$$\Sigma M_B=0: \quad 6\cdot 2+8-4\cdot 4\cdot 6-12+V_E\cdot 8=0 \quad \Rightarrow \quad V_E=11$$
$$\Sigma Y=0: \quad -6+V_B-4\cdot 4+V_E=0 \quad \Rightarrow \quad V_B=11$$



Siły wewnętrzne wyznaczymy redukując układ sił z jednej bądź drugiej strony rozpatrywanego przekroju. Za każdym razem musimy otrzymać ten sam wynik. Z reguły redukujemy układ mniejszy. Dla porównania skorzystajmy z obydwu możliwości.

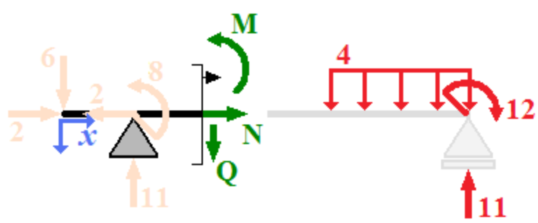
Redukując układ sił z **lewej** strony – normalna zewnętrzna powierzchni cięcia jest skierowana **przeciwnie** do osi x lokalnego układu współrzędnych – dodatnie zwroty sił przekrojowych są **przeciwne** do zwrotów osi lokalnego układu współrzędnych.

$$N=-2+2=0$$
$$Q=-6+11=5$$
$$M=-6\cdot 4-8+11\cdot 2=-10$$



Redukując układ sił z **prawej** strony – normalna zewnętrzna powierzchni cięcia jest skierowana **zgodnie** z osią x lokalnego układu współrzędnych – dodatnie zwroty sił przekrojowych są **zgodne** ze zwrotami osi lokalnego układu współrzędnych.

$$N=0$$
$$Q=4\cdot 4-V_C=5$$
$$M=-4\cdot 4\cdot 4-12+11\cdot 6=-10$$

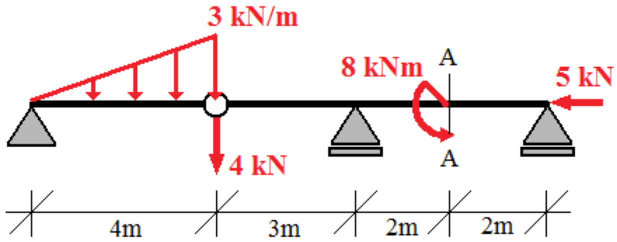


Siły przekrojowe w przekroju A-A belki są równe:

- siła osiowa $N=0\,\text{kN}$
- siła poprzeczna $Q=5\,\text{kN}$
- moment zginający $M=-10\,\text{kNm}$

ZADANIE 4.2

Wyznaczyć siły przekrojowe w przekroju A-A belki jak na rysunku.



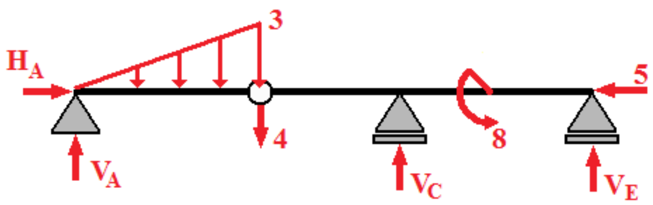
Przed wyznaczeniem sił przekrojowych należy wyznaczyć całkowite obciążenie belki – siły czynne są zadane, siły bierne – reakcje podporowe – wyznaczamy z równań równowagi. Ponieważ w konstrukcji występuje przegub, mamy do dyspozycji dodatkowe równania zerowania się momentów względem przegubu od obciążenia z jednej lub z drugiej strony:

$$\Sigma X=0:\quad H_A-5=0 \quad\Rightarrow\quad H_A=5$$

$$\Sigma M_P^L=0:\quad -V_A\cdot 4+\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4\right)=0 \quad\Rightarrow\quad V_A=2$$

$$\Sigma M_C=0:\quad -V_A\cdot 7+\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4+3\right)+4\cdot 3+8+V_E\cdot 4=0 \quad\Rightarrow\quad V_E=-8$$

$$\Sigma Y=0:\quad V_A-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3-4+V_C+V_E=0 \quad\Rightarrow\quad V_C=16$$

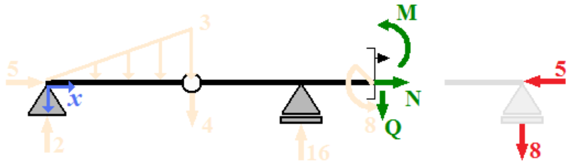


Nie można wyznaczyć sił przekrojowych dokładnie w punkcie przyłożenia obciążenia skupionego (w rzeczywistości występuje tam pomijana w obecnych obliczeniach koncentracja naprężeń) – można jednak redukować układ sił w przekroju dowolnie bliskim punktu przyłożenia obciążenia skupionego, bądź z jednej, bądź z drugiej strony tego punktu. Z rysunku wynika, że rzecz dotyczy przekroju z prawej strony punktu przyłożenia momentu skupionego.

Siły wewnętrzne wyznaczymy redukując układ sił z jednej bądź drugiej strony rozpatrywanego przekroju. Za każdym razem musimy otrzymać ten sam wynik. Z reguły redukujemy układ mniejszy. Dla porównania skorzystajmy z obydwu możliwości.

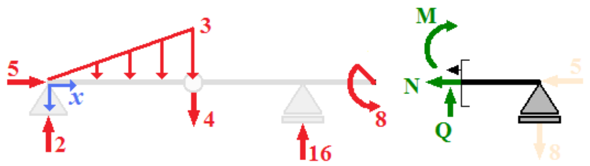
Redukując układ sił z **prawej** strony – normalna zewnętrzna powierzchni cięcia jest skierowana **zgodnie** z osią *x* lokalnego układu współrzędnych – dodatnie zwroty sił przekrojowych są **zgodne** ze zwrotami osi lokalnego układu współrzędnych.

$$N=-5$$
$$Q=8$$
$$M=-8\cdot 2=-16$$



Redukując układ sił z **lewej** strony – normalna zewnętrzna powierzchni cięcia jest skierowana **przeciwnie** do osi x lokalnego układu współrzędnych – dodatnie zwroty sił przekrojowych są **przeciwne** do zwrotów osi lokalnego układu współrzędnych.

$$N = -5$$
$$Q = 2 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 - 4 + 16 = 8$$
$$M = 2\cdot 9 - \left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 4 + 5\right) - 4\cdot 5 + 16\cdot 2 - 8 = -16$$

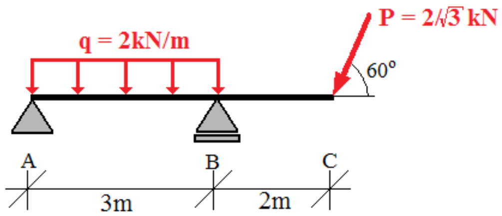


Siły przekrojowe w przekroju A-A belki są równe:

- siła osiowa $N = -5\,\mathrm{kN}$
- siła poprzeczna $Q = 8\,\mathrm{kN}$
- moment zginający $M = -16\,\mathrm{kNm}$

ZADANIE 4.3

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce jak na rysunku.

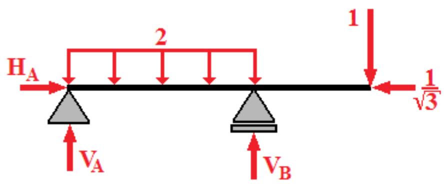


1. Rozłożenie sił ukośnych na składowe i wyznaczanie reakcji:

$$\Sigma X = 0: \quad H_D - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_D = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

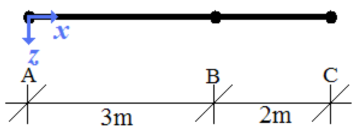
$$\Sigma M_A = 0: \quad -2\cdot 3\cdot 1{,}5 + 3\cdot V_B - 5\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{14}{3}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 2\cdot 3 + V_B - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = \frac{7}{3}$$



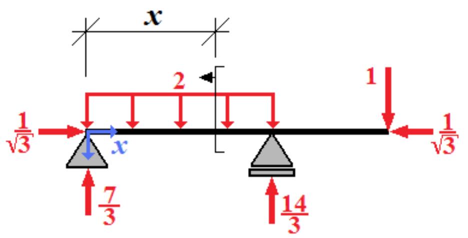
Sprawdzenie: $\Sigma M_C = 0\,?$ $\quad -V_A\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 3{,}5 - V_B\cdot 2 = 0$ OK!

2. Oznaczenie punktów charakterystycznych oraz przyjęcie lokalnego układu współrzędnych na całym pręcie:



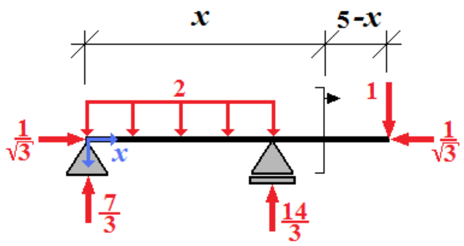
3. Wyznaczanie sił przekrojowych – redukcja do rozpatrywanego punktu układu sił zewnętrznych przyłożonych do odciętej części ciała.

Przedział AB – patrzymy w **lewo** – normalna powierzchni cięcia skierowana jest zewnętrzna **przeciwnie** do osi x – dodatnie zwroty sił przekrojowych są **przeciwne** do zwrotów osi lokalnego układu współrzędnych



$$\begin{cases} N(x) = -H_A = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ Q(x) = +V_A - q\cdot x = \dfrac{7}{3} - 2x \\ M(x) = +V_A\cdot x - q\cdot x\cdot\dfrac{x}{2} = \dfrac{7}{3}x - 2x\cdot\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Przedział BC – patrzymy w **lewo** – normalna zewnętrzna powierzchni cięcia skierowana jest **zgodnie** z osią x - dodatnie zwroty sił przekrojowych są **zgodne** do zwrotów osi lokalnego układu współrzędnych



$$\begin{cases} N(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ Q(x) = +1 \\ M(x) = -1\cdot(5-x) \end{cases}$$

W poszukiwaniu ekstremum lokalnego rozkładu momentów zginających pod obciążeniem ciągłym na przedziale AB (wierzchołka paraboli będącej wykresem tego rozkładu) badamy miejsca zerowe rozkładu sił poprzecznych (pochodnej rozkładu momentów):

Przedział AB:

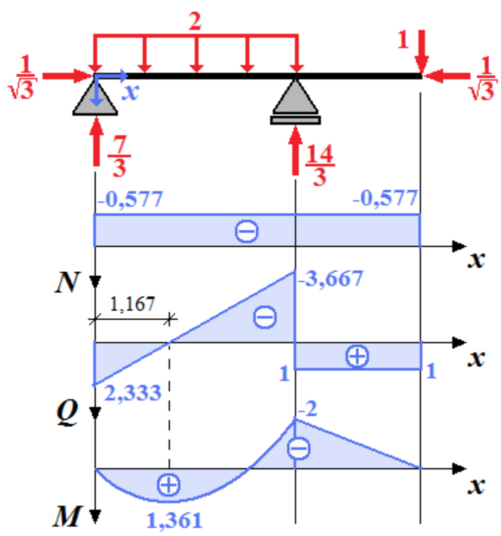
$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{3} - 2x_e = 0 \;\Rightarrow\; x_e = \frac{7}{6}; \qquad M(x_e) = \frac{49}{36} \approx 1{,}361$$

Wartości sił przekrojowych na krańcach przedziałów:

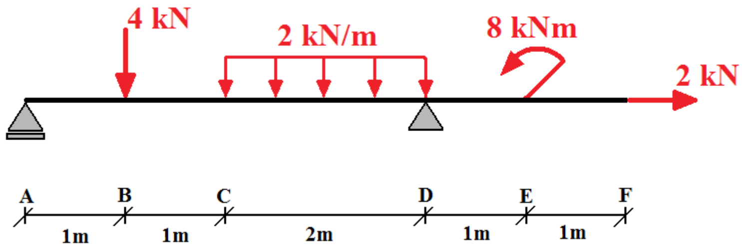
	Przedział AB		Przedział BC	
	A	B	B	C
x	0	3	3	5
N(x)	-0,577	-0,577	-0,577	-0,577
Q(x)	2,333	-3,667	1	1
M(x)	0	-2	-2	0

4. Szkicowanie wykresu

- Przedział AB: obciążenie ciągłe – wykres Q jest liniowy, wykres M jest parabolą
- Przedział BC: brak obciążenia ciągłego – wartości na krańcach przedziału łączymy liniami prostymi.



ZADANIE 4.4
Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce jak na rysunku.

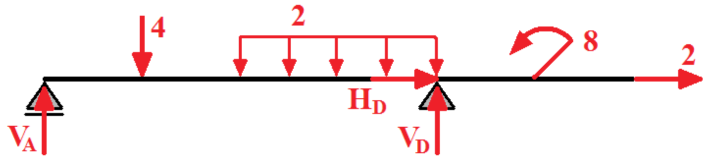


1. Wyznaczanie reakcji:

$\Sigma X=0$: $\quad H_D+2=0 \quad \Rightarrow \quad H_D=-2$

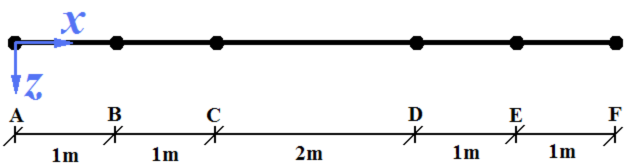
$\Sigma M_D=0$: $\quad -V_A\cdot 4+4\cdot 3+2\cdot 2\cdot 1+8=0 \quad \Rightarrow \quad V_A=6$

$\Sigma Y=0$: $\quad V_A-4-2\cdot 2+V_D=0 \quad \Rightarrow \quad V_D=2$



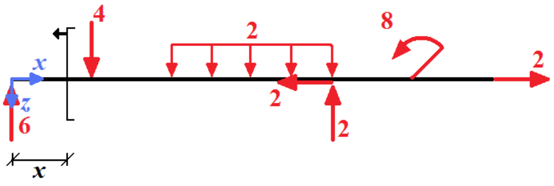
Sprawdzenie: $\Sigma M_B=0\,?$ $\qquad -V_A\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2+V_D\cdot 3+8=0$ OK!

2. Oznaczenie punktów charakterystycznych oraz przyjęcie lokalnego układu współrzędnych na całym pręcie:



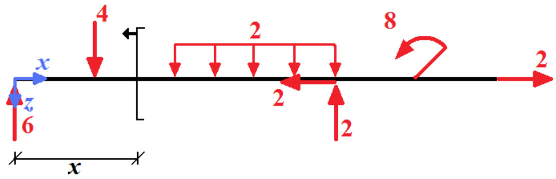
3. Wyznaczanie sił przekrojowych – redukcja do rozpatrywanego punktu układu sił zewnętrznych przyłożonych do odciętej części ciała.

Przedział AB – patrzymy w **lewo** – normalna zewnętrzna **przeciwnie** do osi x



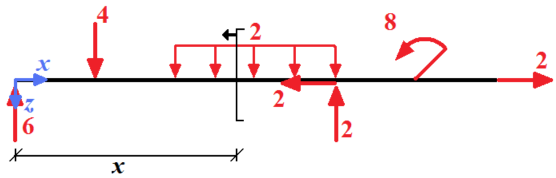
$$\begin{cases} N(x)=0 \\ Q(x)=6 \\ M(x)=6\cdot x \end{cases}$$

Przedział BC – patrzymy w **lewo** – normalna zewnętrzna **przeciwnie** do osi x



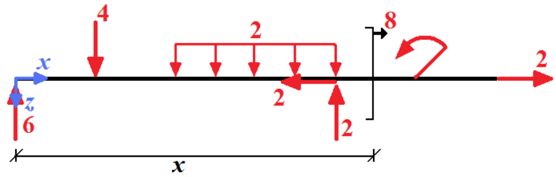
$$\begin{cases} N(x)=0 \\ Q(x)=6-4=2 \\ M(x)=6\cdot x \;-\; 4\cdot(x-1) \end{cases}$$

Przedział CD – patrzymy w **lewo** – normalna zewnętrzna **przeciwnie** do osi x



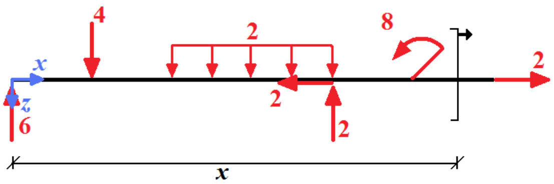
$$\begin{cases} N(x)=0 \\ Q(x)=6-4-2\cdot(x-2) \;=\; -2x+6 \\ M(x)=6\cdot x \;-\; 4\cdot(x-1) \;-\; 2\cdot(x-2)\cdot\dfrac{1}{2}(x-2) \;= \\ \qquad = -x^2+6x \end{cases}$$

Przedział DE – patrzymy w **prawo** – normalna zewnętrzna **zgodnie** z osią x



$$\begin{cases} N(x)=2 \\ Q(x)=0 \\ M(x)=8 \end{cases}$$

Przedział EF – patrzymy w **prawo** – normalna zewnętrzna **zgodnie** z osią x



$$\begin{cases} N(x)=2 \\ Q(x)=0 \\ M(x)=0 \end{cases}$$

W poszukiwaniu ekstremum lokalnego rozkładu momentów zginających pod obciążeniem ciągłym na przedziale AB (wierzchołka paraboli będącej wykresem tego rozkładu) badamy miejsca zerowe rozkładu sił poprzecznych (pochodnej rozkładu momentów):

Przedział CD:

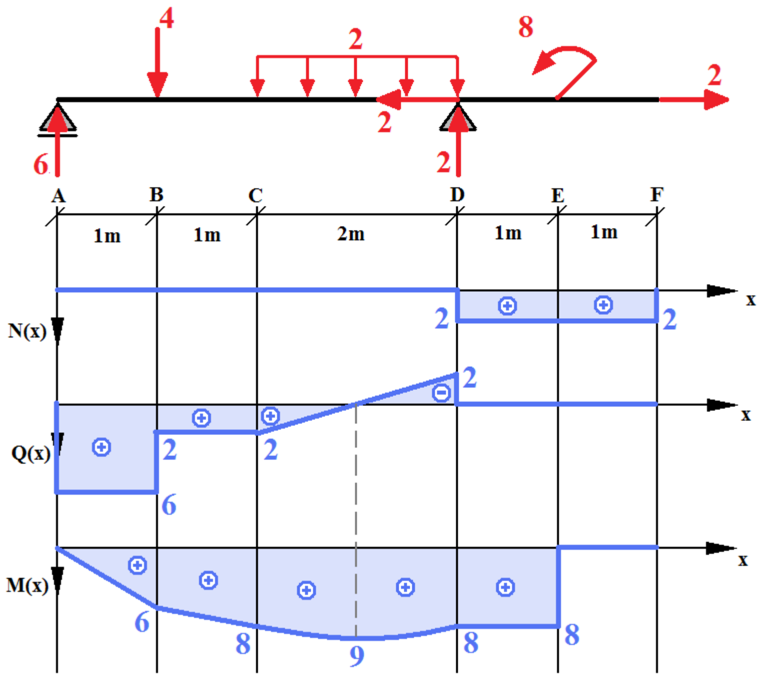
$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x+6=0 \;\Rightarrow\; x=3\,; \qquad M(x=3)=9$$

Wartości sił przekrojowych na krańcach przedziałów:

	Przedział AB		Przedział BC		Przedział CD		Przedział DE		Przedział EF	
	A	B	B	C	C	D	D	E	E	F
x	0	1	1	2	2	4	4	5	5	6
N(x)	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2
Q(x)	6	6	2	2	2	-2	0	0	0	0
M(x)	0	6	6	8	8	8	8	8	8	0

4. Szkicowanie wykresu:

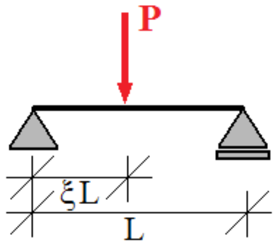
- Przedział AB: brak obciążenia ciągłego – wartości na krańcach przedziału łączymy prostymi
- Przedział BC: brak obciążenia ciągłego – wartości na krańcach przedziału łączymy prostymi
- Przedział CD: obciążenie ciągłe – wykres Q jest liniowy, wykres M jest parabolą
- Przedział DE: brak obciążenia ciągłego – wartości na krańcach przedziału łączymy prostymi
- Przedział EF: brak obciążenia ciągłego – wartości na krańcach przedziału łączymy prostymi

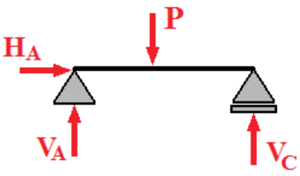


ZADANIE 4.5

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce swobodnie podpartej obciążonej siłą skupioną.

$\xi \in (0\ ;\ 1)$





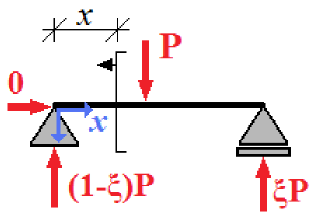
Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$
$$\Sigma M_A = 0: \quad \Rightarrow \quad -P \cdot \xi L + V_C \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = \xi P$$
$$\Sigma Y = 0: \quad \Rightarrow \quad V_A - P + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = P - V_C = (1-\xi) P$$

Siły przekrojowe:

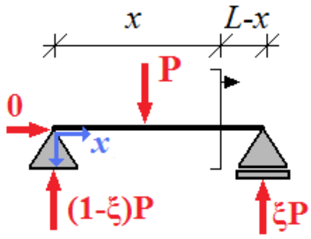
Przedział AB: $x \in (0\ ;\ \xi L)$ (redukcja układu sił z lewej strony)

$$\begin{cases} N = -H_A = 0 \\ Q = V_A = (1-\xi) P \\ M = V_A \cdot x = (1-\xi) P x \end{cases}$$



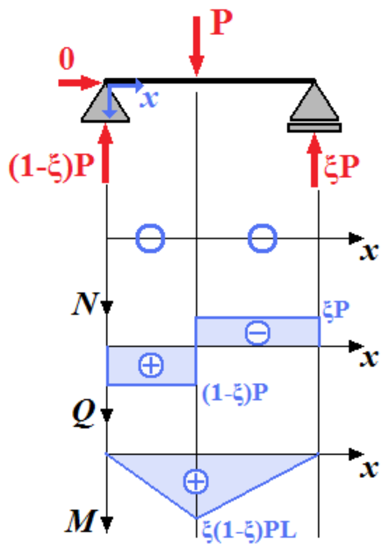
Przedział BC: $x \in (\xi L\ ;\ L)$ (redukcja układu sił z prawej strony)

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = -V_B = -\xi P \\ M = V_B \cdot (L-x) = \xi P (L-x) \end{cases}$$



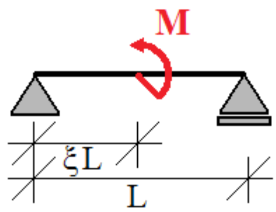
Obliczamy wartości sił przekrojowych w punktach charakterystycznych i sporządzamy wykresy. Na przedziałach charakterystycznych nie ma obciążenia ciągłego – wartości na ich krańcach łączymy więc liniami prostymi.

	AB		BC	
	A	B	B	C
x	0	*ξL*	*ξL*	*L*
N	0	0	0	0
Q	*(1-ξ)P*	*(1-ξ)P*	*ξP*	*ξP*
M	0	*(1-ξ) ξ PL*	*(1-ξ) ξ PL*	0

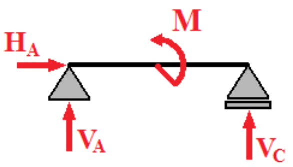


ZADANIE 4.6

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce swobodnie podpartej obciążonej momentem skupionym.



$\xi \in (0\ ;\ 1)$



Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

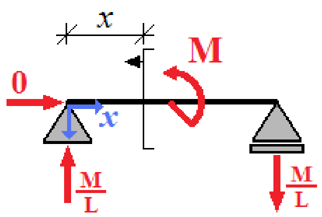
$$\Sigma M_A = 0: \quad \Rightarrow \quad M + V_C \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = -\frac{M}{L}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad \Rightarrow \quad V_A + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = -V_C = \frac{M}{L}$$

Siły przekrojowe:

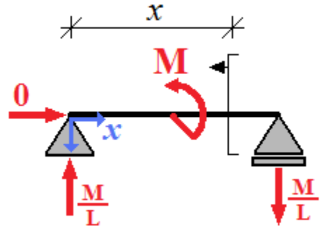
Przedział AB: $x \in (0\ ;\ \xi L)$ (redukcja układu sił z lewej strony)

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = V_A = \dfrac{M}{L} \\ M = V_A \cdot x = \dfrac{M}{L} x \end{cases}$$



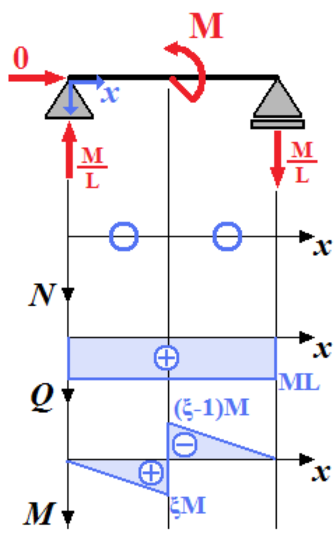
Przedział BC: $x \in (\xi L\ ;\ L)$ (redukcja układu sił z lewej strony)

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = V_A = \dfrac{M}{L} \\ M = V_A \cdot x - M = \dfrac{M}{L} \cdot x - M = M\left(\dfrac{x}{L} - 1\right) \end{cases}$$



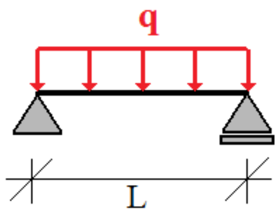
Obliczamy wartości sił przekrojowych w punktach charakterystycznych i sporządzamy wykresy. Na przedziałach charakterystycznych nie ma obciążenia ciągłego – wartości na ich krańcach łączymy więc liniami prostymi.

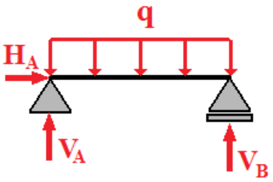
	AB		BC	
	A	B	B	C
x	0	ξL	ξL	L
N	0	0	0	0
Q	M/L	M/L	M/L	M/L
M	0	ξM	$(\xi-1)\,M$	0



ZADANIE 4.7

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce swobodnie podpartej obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym.





Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

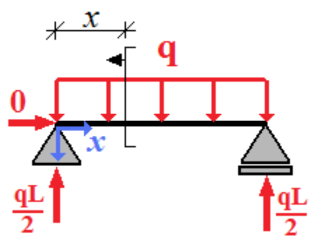
$$\Sigma M_A = 0: \quad \Rightarrow \quad -q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + V_B \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = \frac{qL}{2}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad \Rightarrow \quad V_A - q \cdot L + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = q \cdot L - V_C = \frac{qL}{2}$$

Siły przekrojowe:

$x \in (0\ ;\ L)$ (redukcja układu sił z lewej strony)

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = V_A - q \cdot x = \dfrac{qL}{2} - q \cdot x \\ M = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{qL}{2} \cdot x - \dfrac{q x^2}{2} \end{cases}$$



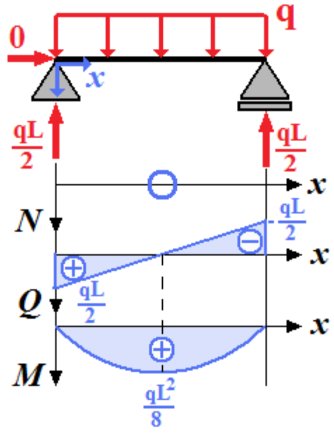
Obliczamy wartości sił przekrojowych w punktach charakterystycznych i sporządzamy wykresy. Występuje obciążenie ciągłe, rozłożone równomiernie – wartości siły osiowej i siły poprzecznej na krańcach przedziałów charakterystycznych łączymy liniami prostymi. Wykres momentów zginających jest parabolą.

	AB	
	A	B
x	0	ξL
N	0	0
Q	$qL/2$	$-qL/2$
M	0	0

W poszukiwaniu ekstremum lokalnego rozkładu momentów zginających (wierzchołka paraboli będącej wykresem tego rozkładu) badamy miejsca zerowe rozkładu sił poprzecznych (pochodnej rozkładu momentów):

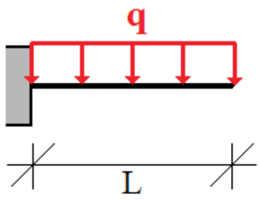
$$\left.\frac{dM}{dx}\right|_{x_e} = Q(x_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{qL}{2} - q x_e = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{L}{2}$$

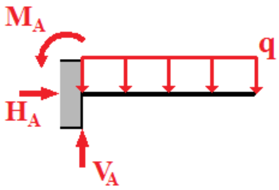
$$M_{ekstr} = M(x_e) = \frac{qL^2}{8}$$



ZADANIE 4.8

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce wspornikowej obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym.





Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

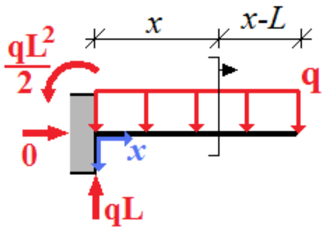
$$\Sigma M_A = 0: \quad \Rightarrow \quad -q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{qL^2}{2}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad \Rightarrow \quad V_A - q \cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = qL$$

Siły przekrojowe:

$x \in (0\ ;\ L)$ (redukcja układu sił z prawej strony)

$$\begin{cases} N == 0 \\ Q = q \cdot (L-x) \\ M = q(L-x) \cdot \dfrac{(L-x)}{2} = \dfrac{q}{2}(L-x)^2 \end{cases}$$



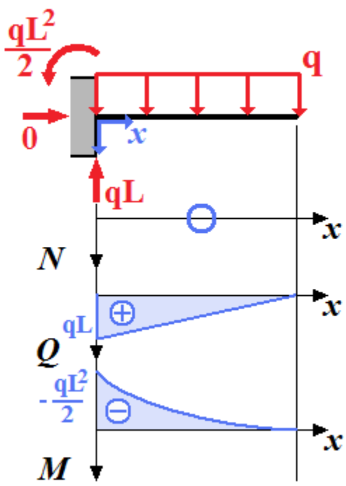
Obliczamy wartości sił przekrojowych w punktach charakterystycznych i sporządzamy wykresy. Występuje obciążenie ciągłe, rozłożone równomiernie – wartości siły osiowej i siły poprzecznej na krańcach przedziałów charakterystycznych łączymy liniami prostymi. Wykres momentów zginających jest parabolą.

	AB	
	A	B
x	0	L
N	0	0
Q	qL	0
M	$-qL^2/2$	0

W poszukiwaniu ekstremum lokalnego rozkładu momentów zginających (wierzchołka paraboli będącej wykresem tego rozkładu) badamy miejsca zerowe rozkładu sił poprzecznych:

$$Q(x_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad qL - qx_e = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = L$$

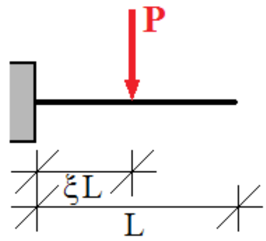
$$M_{ekstr} = M(x_e) = 0$$

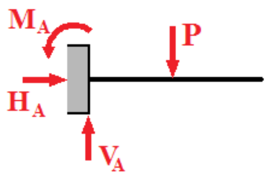


ZADANIE 4.9

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce wspornikowej obciążonej siłą skupioną.

$\xi \in (0\ ;\ 1)$





Reakcje podporowe:

$\Sigma X = 0: \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$

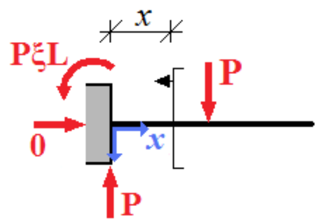
$\Sigma M_A = 0: \quad \Rightarrow \quad M_A - P \cdot \xi L = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = P \xi L$

$\Sigma Y = 0: \quad \Rightarrow \quad V_A - P = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = P$

Siły przekrojowe:

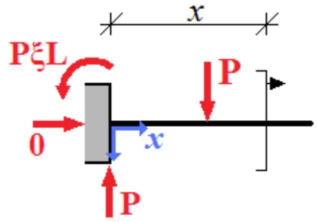
$x \in (0\ ;\ \xi L)$ (redukcja układu sił z lewej strony)

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = V_A = P \\ M = -M_A + V_A \cdot x = -P \xi L + P x \end{cases}$$



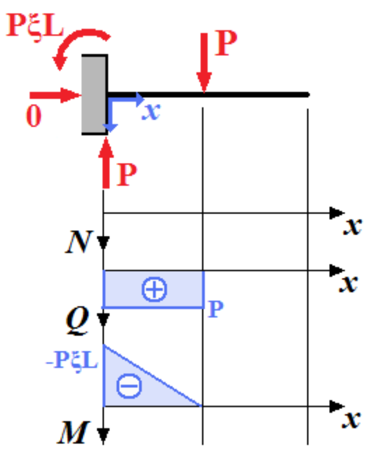
$x \in (\xi L\ ;\ L)$ (redukcja układu sił z prawej strony)

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$



Obliczamy wartości sił przekrojowych w punktach charakterystycznych i sporządzamy wykresy. Brak obciążenia ciągłego – wartości sił przekrojowych na krańcach przedziałów charakterystycznych łączymy liniami prostymi.

	AB		BC	
	A	B	B	C
x	0	ξL	ξL	L
N	0	0	0	0
Q	P	P	0	0
M	$-P\xi L$	0	0	0



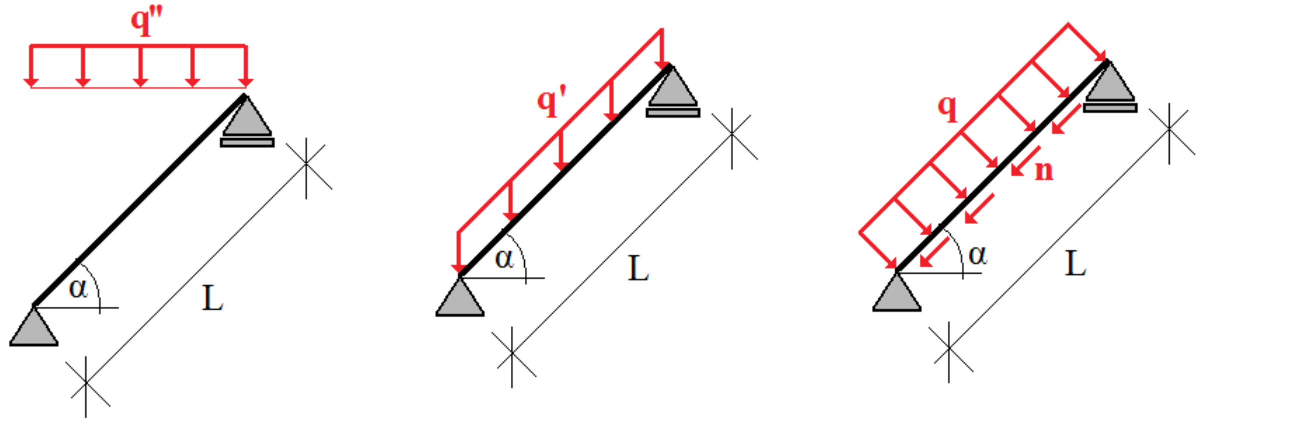
ZADANIE 4.10

Przeanalizować rozkład sił przekrojowych w swobodnie podpartej belce ukośnej, obciążonej równomiernym obciążeniem ciągłym.

W praktyce można się spotkać z trzema szczególnymi przypadkami równomiernego obciążenia ciągłego na pręcie ukośnym:

a) Obciążenie ciągłe rzutowane (np. obciążenie śniegiem)
b) Obciążenie ciągłe na długości pręta (np. ciężar własny)
c) Obciążenie ciągłe na długości pręta poprzeczne (np. obciążenie wiatrem) i podłużne

a) b) c)

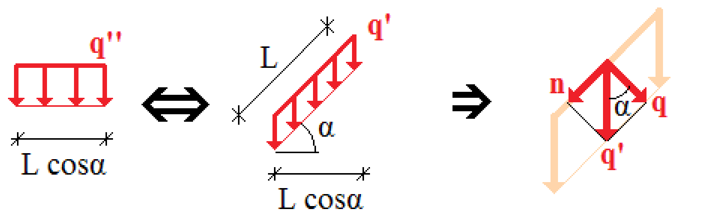


Przypadki te są mogą być statycznie równoważne, o ile tylko wypadkowe każdego z tych układów sił zewnętrznych są sobie równe. Porównując sumy układów oraz rozkładając obciążenie na kierunki wzdłuż i poprzecznie do osi pręta otrzymujemy:

$$q''\cdot L\cos\alpha = q'\cdot L \quad \Rightarrow \quad q' = q''\cos\alpha \qquad q'' = \frac{q'}{\cos\alpha}$$

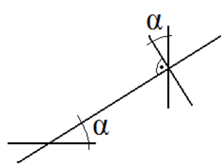
$$q = q'\cos\alpha = q''\cos^2\alpha$$

$$n = q'\sin\alpha = q''\cos\alpha\sin\alpha$$

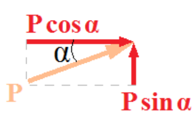


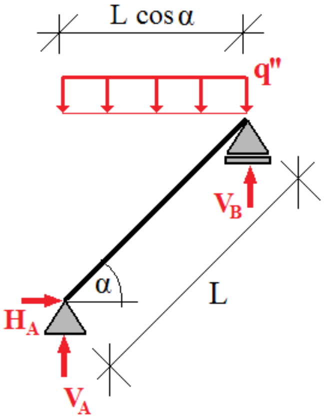
Rozkładając siłę bądź wypadkową na prostopadłe składowe (normalną i poprzeczną) warto zapamiętać dwie proste zasady ułatwiające samą technikę obliczeń:

- Jeśli **między poziomem a pewnym kierunkiem** dany jest pewien kąt, to ten sam kąt jest **między pionem a kierunkiem prostopadłym** do danego.



- Rozkładając siłę na składowe, składowa **przyległa do kąta** jest równa wypadkowej mnożonej przez **cosinus** kąta (składowa przeciwległa – przez sinus).





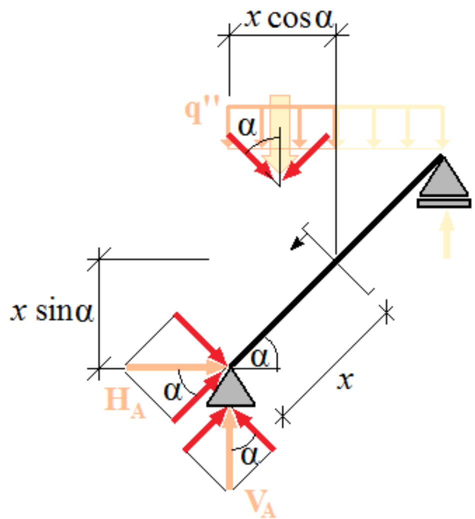
Belka obciążona śniegiem

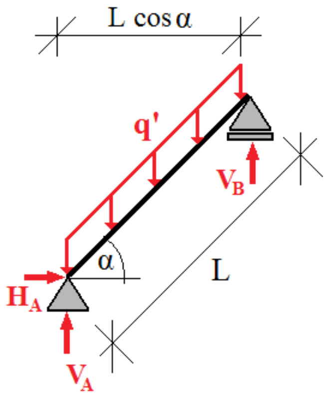
$$\Sigma X = H_A = 0$$

$$\Sigma M_A = -q'' L\cos\alpha \cdot \frac{L\cos\alpha}{2} + V_B L\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{1}{2} q'' L\cos\alpha$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B - q'' L\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{2} q'' L\cos\alpha$$

$$\begin{cases} N = & -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha + q''\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\sin\alpha = \\ & = (q''\cos\alpha\sin\alpha)\cdot\left(x - \frac{L}{2}\right) \\ Q = & V_A\cos\alpha - H_A\sin\alpha - q''\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\cos\alpha = \\ & = (q''\cos^2\alpha)\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right) \\ M = & V_A\cdot(x\cdot\cos\alpha) - H_A\cdot(x\cdot\sin\alpha) - q''\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{x\cdot\cos\alpha}{2} = \\ & = \frac{q''\cos^2\alpha}{2}\cdot x\cdot(L-x) \end{cases}$$





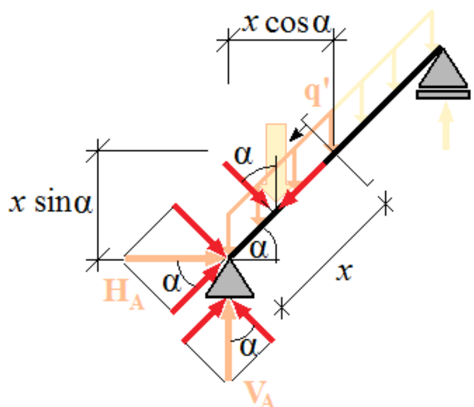
Belka pod ciężarem własnym

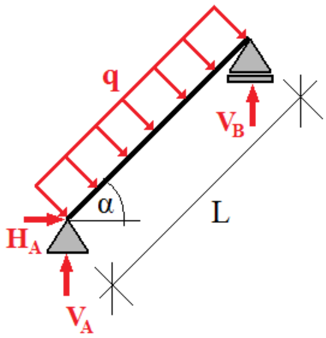
$$\Sigma X = H_A = 0$$

$$\Sigma M_A = -q' L\cdot\frac{L\cos\alpha}{2} + V_B L\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{1}{2} q' L$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B - q' L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{1}{2} q' L$$

$$\begin{cases} N = & -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha + q'\cdot x\cdot\sin\alpha = \\ & = (q'\sin\alpha)\cdot\left(x - \frac{L}{2}\right) \\ Q = & V_A\cos\alpha - H_A\sin\alpha - q'\cdot x\cdot\cos\alpha = \\ & = (q'\cos\alpha)\cdot\left(\frac{L}{2} - x\right) \\ M = & V_A\cdot(x\cdot\cos\alpha) - H_A\cdot(x\cdot\sin\alpha) - q'\cdot x\cdot\frac{x\cdot\cos\alpha}{2} = \\ & = \frac{q'\cos\alpha}{2}\cdot x\cdot(L-x) \end{cases}$$





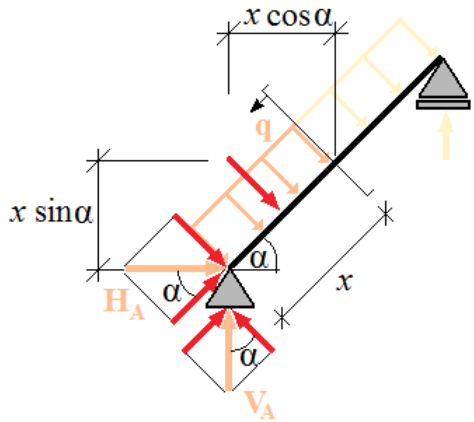
Belka obciążona parciem wiatru

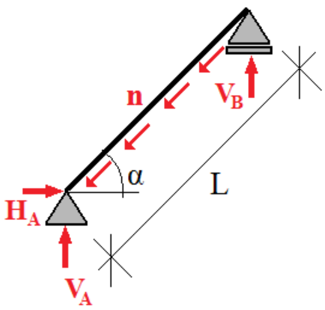
$$\Sigma X = H_A + qL\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = -qL\sin\alpha$$

$$\Sigma M_A = -qL\cdot\frac{L}{2} + V_B L\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{qL}{2\cos\alpha}$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B - qL\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = qL\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

$$\begin{cases} N = -V_A\sin\alpha - H_A\cos\alpha = \dfrac{qL}{2}\operatorname{tg}\alpha \\ Q = V_A\cos\alpha - H_A\sin\alpha - q\cdot x = q\left(\dfrac{L}{2} - x\right) \\ M = V_A\cdot(x\cdot\cos\alpha) - H_A\cdot(x\cdot\sin\alpha) - q\cdot x\cdot\dfrac{x}{2} = \dfrac{q}{2}x(L-x) \end{cases}$$





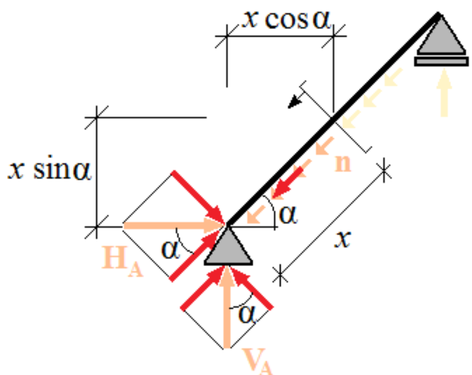
Belka obciążona ciągłym obciążeniem osiowym

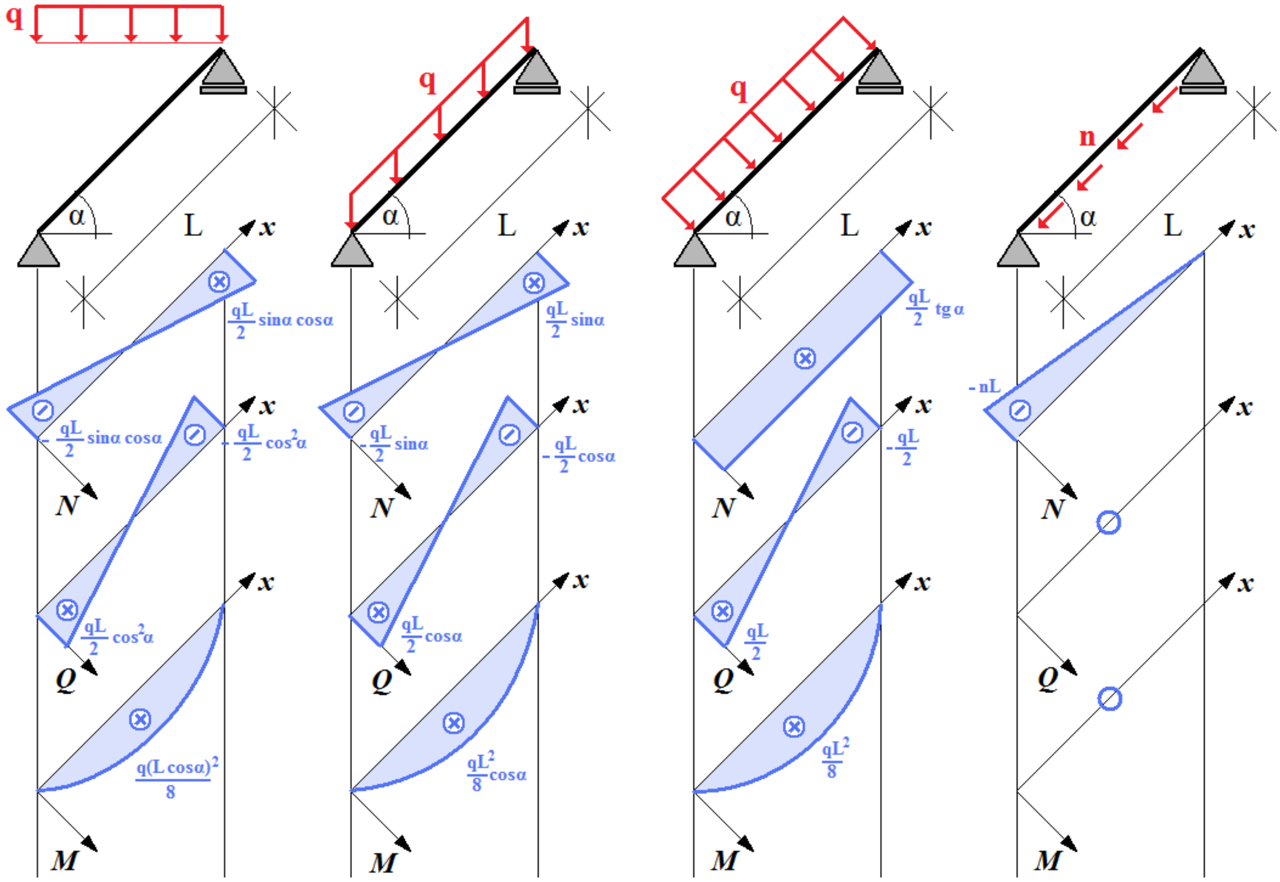
$$\Sigma X = H_A - n\cdot L\cdot\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = nL\cos\alpha$$

$$\Sigma M_A = V_B\cdot L\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_B - n\cdot L\cdot\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = nL\sin\alpha$$

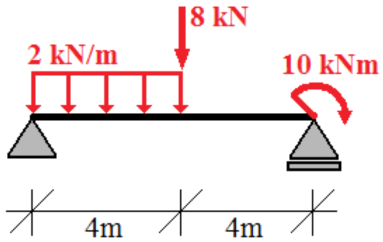
$$\begin{cases} N = -V_A\sin\alpha - H_A\cos\alpha + n\cdot x = n(x-L) \\ Q = V_A\cos\alpha - H_A\sin\alpha = 0 \\ M = V_A\cdot(x\cdot\cos\alpha) - H_A\cdot(x\cdot\sin\alpha) = 0 \end{cases}$$




q
α
L
x
N
Q
M
qL/2 sinα cosα
- qL/2 sinα cosα
qL/2 cos²α
- qL/2 cos²α
q(L cosα)²/8
qL/2 sinα
- qL/2 sinα
- qL/2 cosα
qL/2 cosα
qL²/8 cosα
qL/2 tg α
- qL/2
qL/2
qL²/8
n
- nL

ZADANIE 4.11

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce jak na rysunku poniżej.

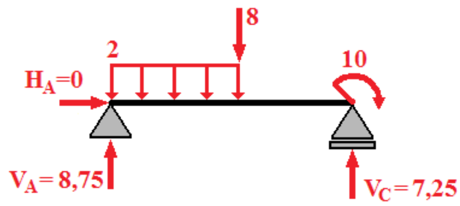


Reakcje podporowe:

$\Sigma X=0: \quad H_A=0$

$\Sigma M_A=0: \quad -2\cdot 4\cdot 2-8\cdot 4-10+V_C\cdot 8=0 \quad \Rightarrow \quad V_C=7{,}25$

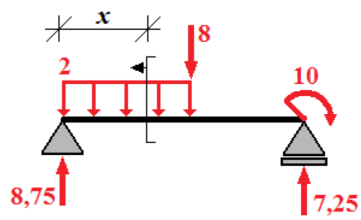
$\Sigma Y=0: \quad V_A-2\cdot 4-8+V_C=0 \quad \Rightarrow \quad V_A=8{,}75$



Siły przekrojowe:

Przedział AB $\quad x\in(0\,;\,4) \quad -$ redukcja układu sił z lewej

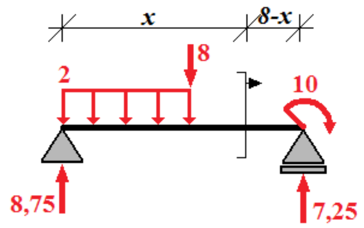
$$\begin{cases} N=-H_A=0 \\ Q=V_A-2\cdot x=8{,}75-2\,x \\ M=V_A\cdot x-2\cdot x\cdot \dfrac{x}{2}=8{,}75\,x-x^2 \end{cases}$$



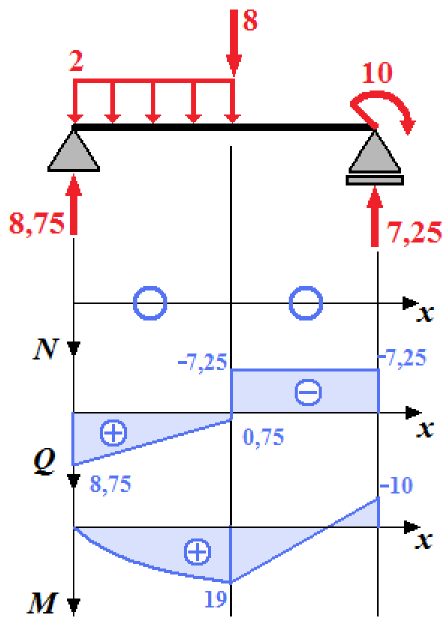
$Q_{AB}=8{,}75-2\,x=0 \quad x_e=4{,}375\notin AB$

Przedział BC $\quad x\in(4\,;\,8) \quad -$ redukcja układu sił z prawej

$$\begin{cases} N==0 \\ Q=-V_C=-7{,}25 \\ M=V_C\cdot(8-x)-10=7{,}25(8-x)-10 \end{cases}$$

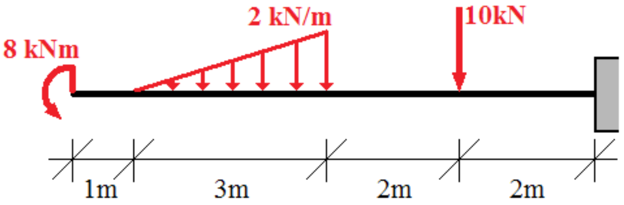


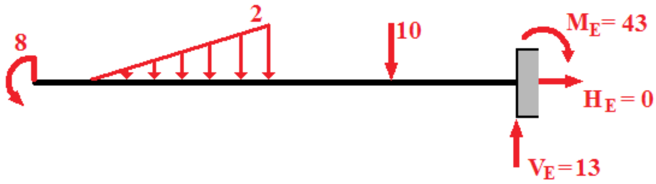
	AB		BC	
	A	B	B	C
x	0	4	4	8
N	0	0	0	0
Q	8,75	0,75	-7,25	-7,25
M	0	19	19	-10



ZADANIE 4.12

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce jak na rysunku poniżej.





Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: \quad H_E = 0$$

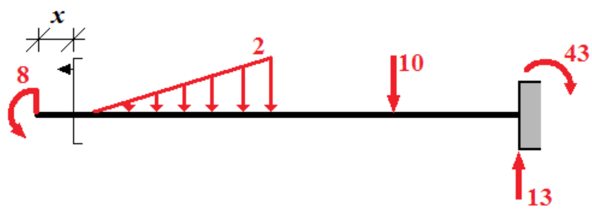
$$\Sigma Y = 0: \quad -\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 - 10 + V_E = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E = 13$$

$$\Sigma M_E = 0: \quad 8 + \left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\right)\cdot\left(4 + \frac{1}{3}\cdot 3\right) + 10\cdot 2 - M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad M_E = 43$$

Siły przekrojowe:

Przedział AB $x \in (0\ ;\ 1)$ – redukcja układu sił z lewej

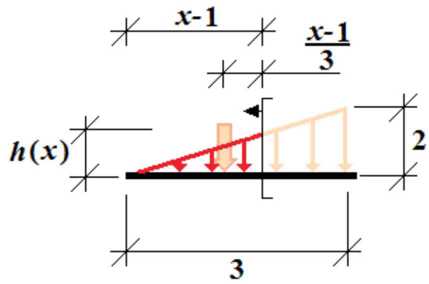
$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = 0 \\ M = -8 \end{cases}$$



Przedział BC $x \in (1\ ;\ 4)$

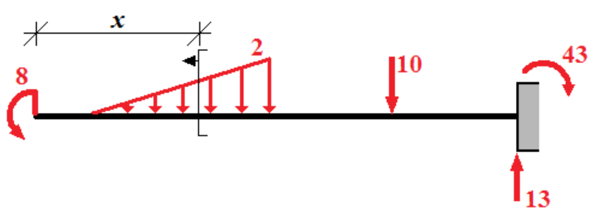
W przypadku obciążenia trójkątnego lub trapezowego z reguły redukujemy układ sił znajdujący się po stronie mniejszej wartości gęstości obciążenia (od strony wierzchołka trójkąta lub mniejszej podstawy trapezu). Korzystając z podobieństwa trójkątów, możemy zapisać gęstość obciążenia w punkcie cięcia i w konsekwencji zapisać wypadkową obciążenia ciągłego i jej moment względem tego punktu:

$$\frac{2}{3} = \frac{h(x)}{(x-1)} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{2}{3}(x-1)$$



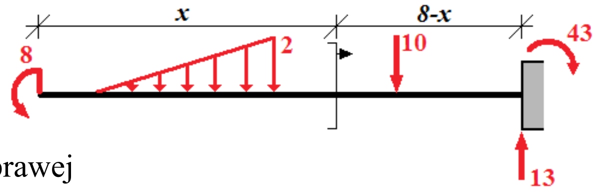
redukcja układu sił z lewej

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot h = -\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2 \\ M = -8 - \frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot h\cdot\frac{1}{3}(x-1) = -8 - \frac{1}{9}\cdot(x-1)^3 \end{cases}$$



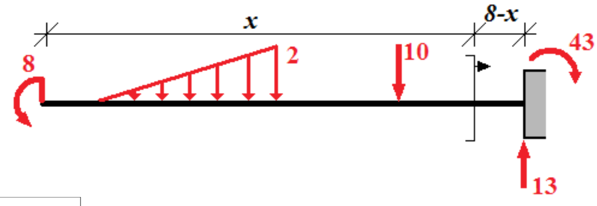
Przedział CD $x \in (4\ ;\ 6)$ – redukcja układu sił z prawej

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = 10 - V_E = -3 \\ M = -10 \cdot (6-x) + V_E \cdot (8-x) - M_E = -10(6-x) + 13(8-x) - 43 \end{cases}$$



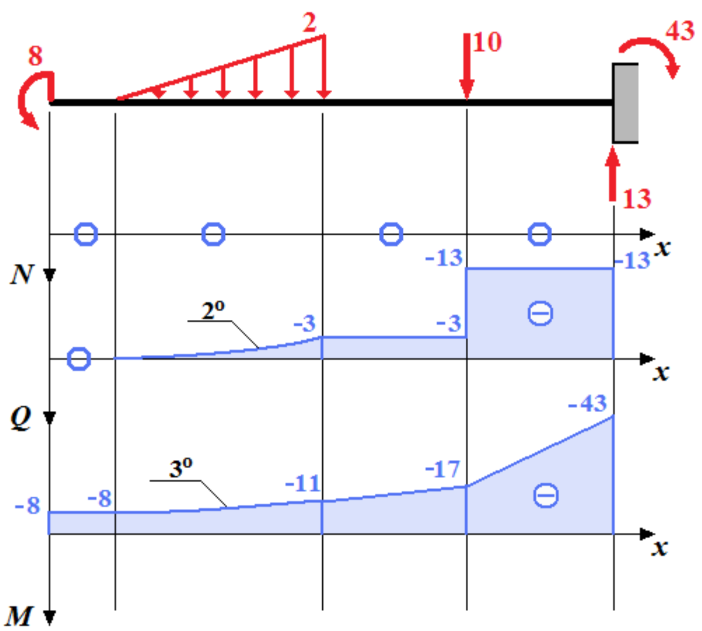
Przedział DE $x \in (6\ ;\ 8)$ – redukcja układu sił z prawej

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = -V_E = -13 \\ M = V_E \cdot (8-x) - M_E = 13(8-x) - 43 \end{cases}$$



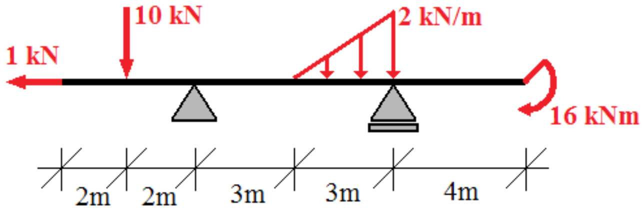
	AB		BC		CD		DE	
	A	B	B	C	C	D	D	E
x	0	1	1	4	4	6	6	8
N	0	0	0	0	0	0	0	0
Q	0	0	0	-3	-3	-3	-13	-13
M	-8	-8	-8	-11	-11	-17	-17	-43

Pod obciążeniem liniowo zmiennym, wykres Q jest parabolą, zaś wykres M jest krzywą trzeciego stopnia. Jeśli gęstość obciążenia rośnie wraz ze wzrostem zmiennej x, to krzywa wykresu Q jest wklęsła (tzn. - przy stosowanej przez nas konwencji rysowania wykresów – wypukłość krzywej skierowana jest w dół).



ZADANIE 4.13

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w belce jak na rysunku poniżej.

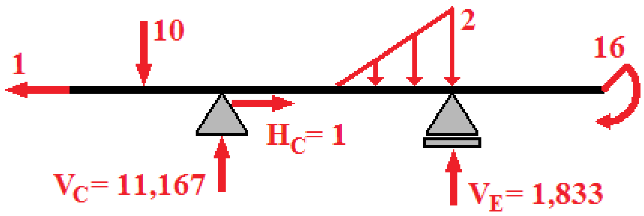


Reakcje podporowe:

$$\Sigma X=0: \quad -1+H_C=0 \quad \Rightarrow \quad H_C=1$$

$$\Sigma M_C=0: \quad 10\cdot 2-\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\right)\cdot\left(3+\frac{2}{3}\cdot 3\right)+V_E\cdot 6-16=0 \quad \Rightarrow \quad V_E=\frac{11}{6}\approx 1{,}833$$

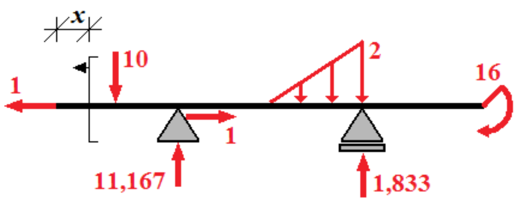
$$\Sigma Y=0: \quad -10+V_C-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2+V_E=0 \quad \Rightarrow \quad V_C=\frac{67}{6}\approx 11{,}167$$



Siły przekrojowe:

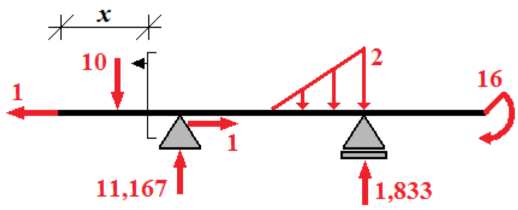
Przedział AB $x\in(0\ ;\ 2)$

$$\begin{cases} N=1 \\ Q=0 \\ M=0 \end{cases}$$



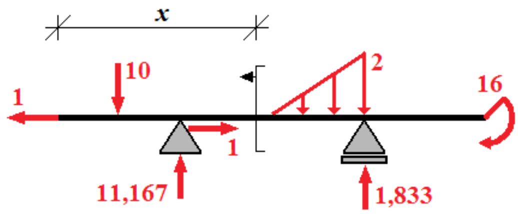
Przedział BC $x\in(2\ ;\ 4)$

$$\begin{cases} N=1 \\ Q=-10 \\ M=-10\cdot(x-2) \end{cases}$$



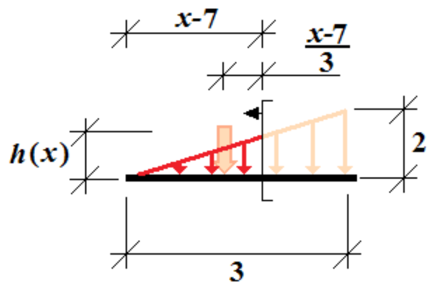
Przedział CD $x\in(4\ ;\ 7)$

$$\begin{cases} N=1-1=0 \\ Q=-10+11{,}167 \\ M=-10\cdot(x-2)+11{,}167(x-4) \end{cases}$$



Przedział DE $x\in(7\;;\;10)$

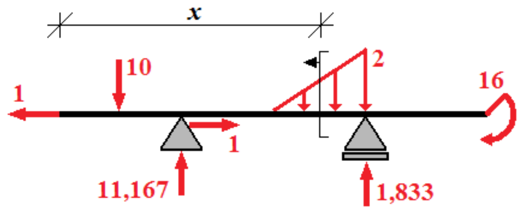
$$\frac{2}{3}=\frac{h(x)}{(x-7)}\quad\Rightarrow\quad h(x)=\frac{2}{3}(x-7)$$



$$\begin{cases}N=1-1=0\\ Q=-10+11{,}167-\frac{1}{2}\cdot(x-7)\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-7)\\ M=-10\cdot(x-2)+11{,}167\cdot(x-4)-\frac{1}{2}\cdot(x-7)\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-7)\cdot\frac{1}{3}(x-7)\end{cases}$$

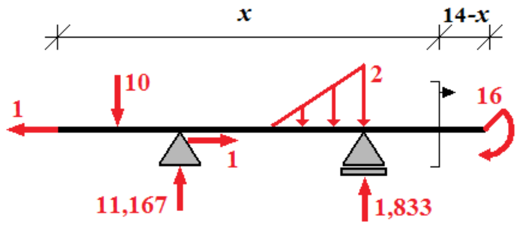
$$Q(x_e)=1{,}167-\frac{1}{3}(x-7)^2=0\quad\Rightarrow\quad x_e=8{,}871\in DE$$

$$M(x_e)=-15{,}043$$



Przedział EF $x\in(10\;;\;14)$

$$\begin{cases}N=0\\ Q=0\\ M=-16\end{cases}$$



	AB		BC		CD		DE		EF	
	A	B	B	C	C	D	D	E	E	F
x	0	2	2	4	4	7	7	10	10	14
N	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Q	0	0	-10	-10	1,167	1,167	1,167	-1,833	0	0
M	0	0	0	-20	-20	-16,5	-16,5	16	-16	-16