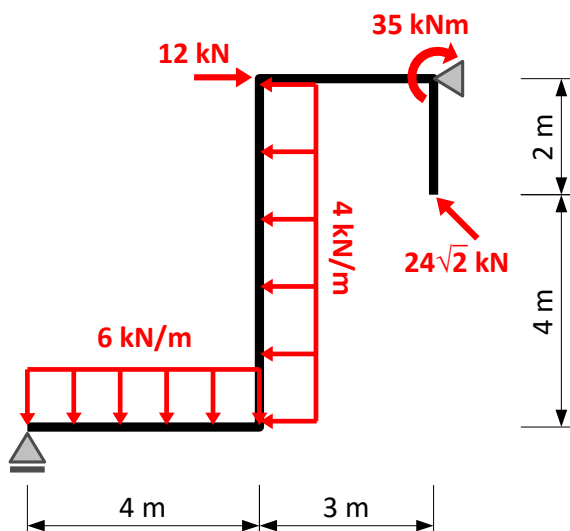


ZADANIE 1

Wyznacz rozkład sił przekrojowych w ramie jak na rysunku, sprawdź równowagę węzłów wewnętrznych oraz sporządź wykresy rozkładu sił przekrojowych.



ROZWIĄZANIE:

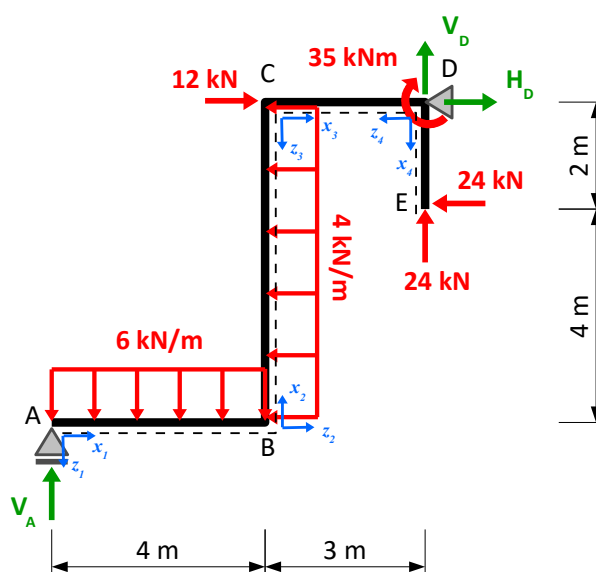
Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: -4 \cdot 6 + 12 - 24 + H_D = 0 \Rightarrow H_D = 36 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_D = 0: -V_A \cdot 7 + 6 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 6 \cdot 3 - 35 - 24 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = -5 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0: V_A - 6 \cdot 4 + 24 + V_D = 0 \Rightarrow V_D = 5 \text{ kN}$$

Oznaczamy punkty charakterystyczne oraz lokalny układ współrzędnych dla każdego pręta prostego. Zwrot osi z lokalnego układu współrzędnych wskazuje położenie „spodów”.



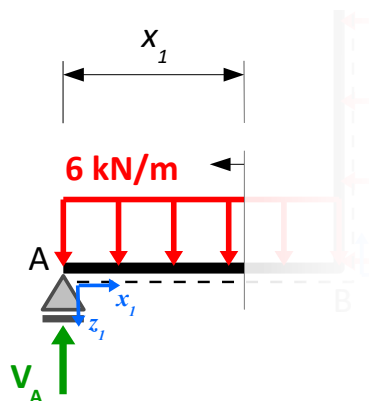
Wyznaczamy siły przekrojowe na przedziale AB. Dokonujemy myślowego cięcia w dowolnym punkcie przedział – położenie tego punktu oznaczamy zmienną x liczoną od punktu zaczepienia lokalnego układu współrzędnych. Możemy zredukować układ sił bądź z lewej, bądź z prawej strony punktu przecięcia – decydujemy się na układ mniejszy, z lewej strony:

$$AB: x_1 \in (0; 4)$$

$$\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ Q(x_1) = V_A - 6 \cdot x_1 = -5 - 6x_1 \\ M(x_1) = V_A \cdot x_1 - 6 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -5x_1 - 3x_1^2 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

$$Q = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{6} \notin AB \Rightarrow \text{brak ekstremum}$$



	A	B
x_1	0	4
N	0	0
Q	-5	-29
M	0	-68

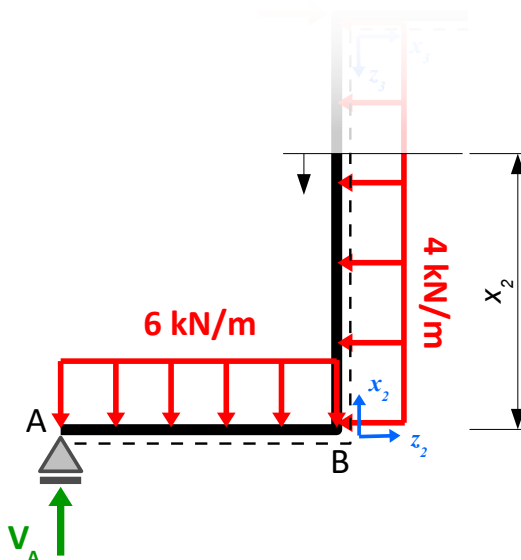
Przedział BC – redukcja układu na dole:

$$BC: x_2 \in (0; 6)$$

$$\begin{cases} N(x_2) = -V_A + 6 \cdot 4 = 29 \\ Q(x_2) = 4 \cdot x_2 \\ M(x_2) = 4 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} + V_A \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2x_2^2 - 68 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

$$Q = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \in BC \Rightarrow \text{istnieje ekstremum } M(0) = -68$$



	B	C
x_2	0	6
N	29	29
Q	0	24
M	-68	4

Przedział CD – redukcja układ sił z prawej strony

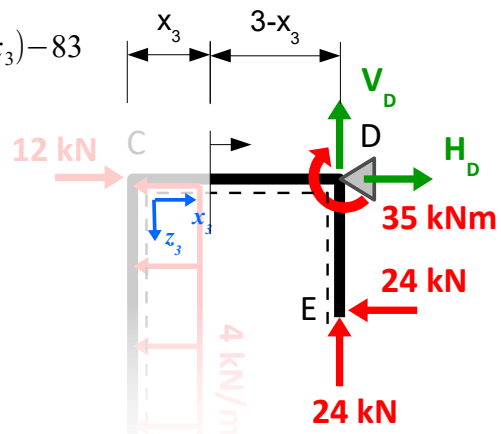
$$CD: x_3 \in (0 ; 3)$$

$$N(x_3) = H_D - 24 = 12$$

$$Q(x_3) = -V_D - 24 = -29$$

$$M(x_3) = V_D(3-x_3) + 24(3-x_3) - 35 - 24 \cdot 2 = 29(3-x_3) - 83$$

	C	D
x_3	0	3
N	12	12
Q	-29	-29
M	4	-83



Przedział DE – redukcja układu sił na dole

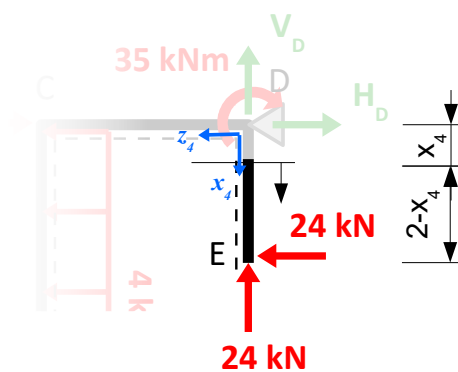
$$DE: x_4 \in (0 ; 2)$$

$$N(x_4) = -24$$

$$Q(x_3) = 24$$

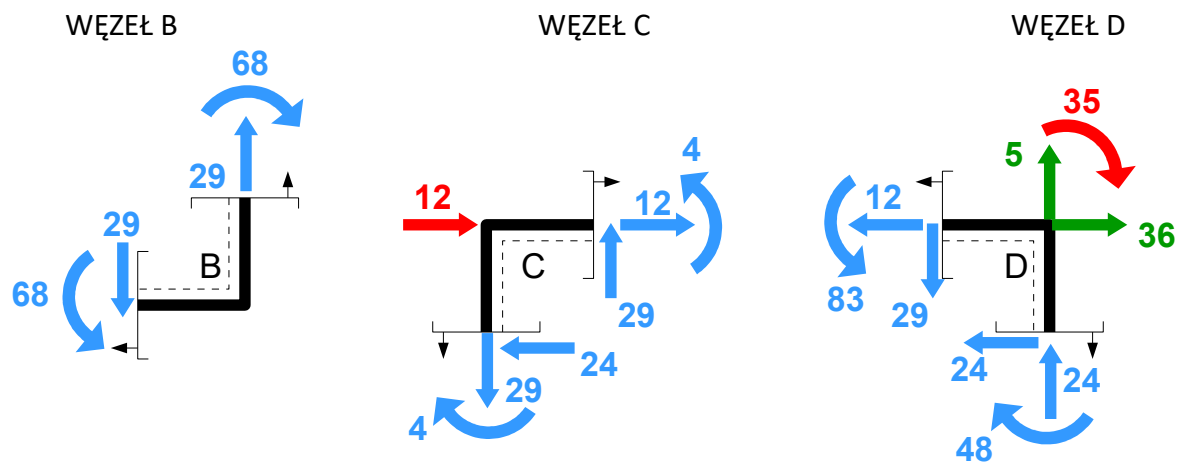
$$M(x_3) = -24(2-x_4)$$

	D	E
x_4	0	2
N	-24	-24
Q	24	24
M	-48	0



Sprawdzenie równowagi węzłów:

Przykładamy do węzła lewostronne i prawostronne wartości sił osiowych, poprzecznych i momentów zginających nadając im odpowiednie zwroty zgodnie z zasadami znakowania sił przekrojowych. Przykładamy ponadto zewnętrzne skupione obciążenie węzła.



WĘZEŁ B:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = -29 + 29 = 0$$

$$\sum M = 68 - 68 = 0$$

WĘZEŁ C:

$$\sum X = -24 + 12 + 12 = 0$$

$$\sum Y = -29 + 29 = 0$$

$$\sum M = 4 - 4 = 0$$

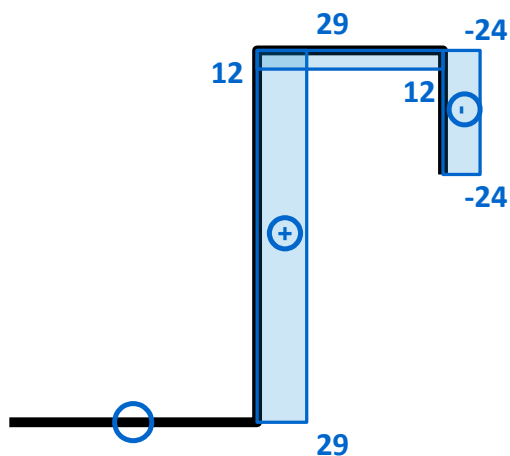
WĘZEŁ D:

$$\sum X = -12 - 24 + 36 = 0$$

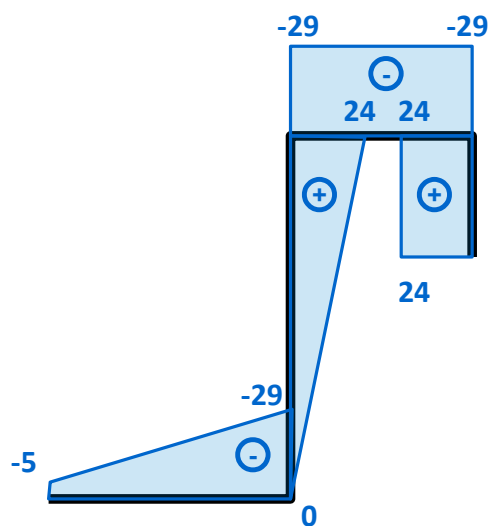
$$\sum Y = -29 + 24 + 5 = 0$$

$$\sum M = 83 - 35 - 48 = 0$$

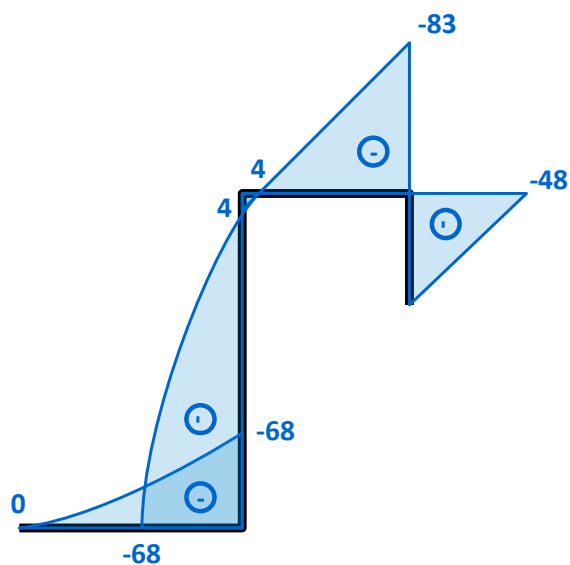
Wykres rozkładu siły osiowej:



Wykres rozkładu siły poprzecznej:

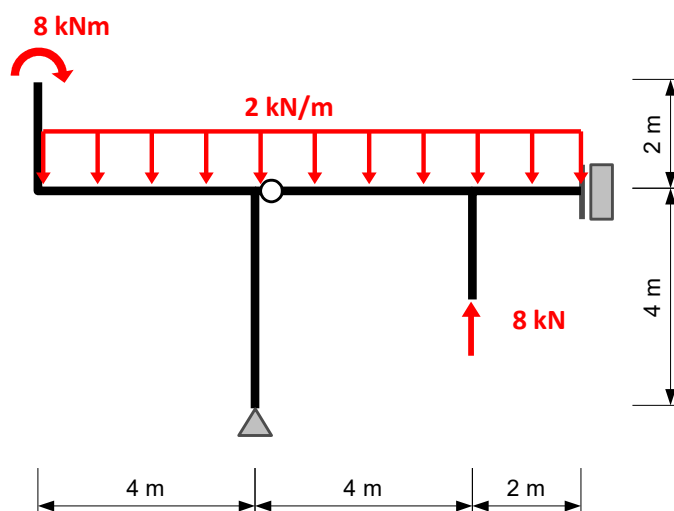


Wykres rozkładu momentu zginającego:



ZADANIE 2

Wyznacz rozkład sił przekrojowych w ramie jak na rysunku, sprawdź równowagę węzłów wewnętrznych oraz sporządź wykresy rozkładu sił przekrojowych.



ROZWIĄZANIE:

Wyznaczamy reakcje podporowe:

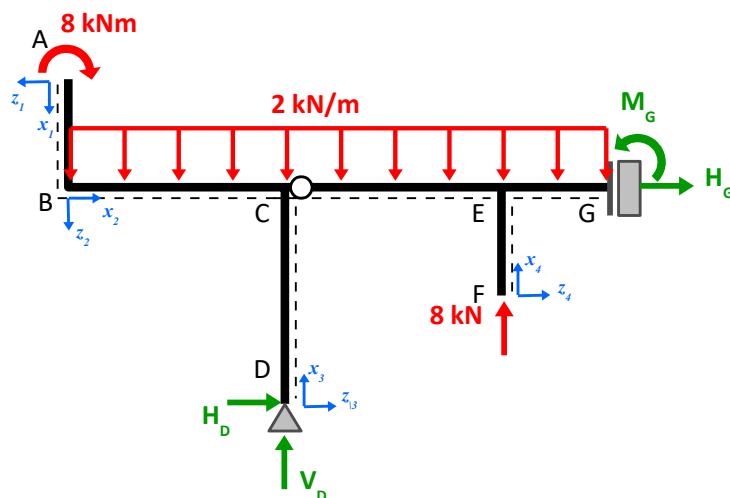
$$\Sigma Y = 0: V_D - 2 \cdot 10 + 8 = 0 \Rightarrow V_D = 12 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = 0: -8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + H_D \cdot 4 = 0 \Rightarrow H_D = -2 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0: H_D + H_G = 0 \Rightarrow H_G = 2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: -2 \cdot 6 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + M_G = 0 \Rightarrow M_G = 4 \text{ kNm}$$

Oznaczamy punkty charakterystyczne oraz lokalny układ współrzędnych dla każdego pręta prostego. Zwrot osi z lokalnego układu współrzędnych wskazuje położenie „spodów”.

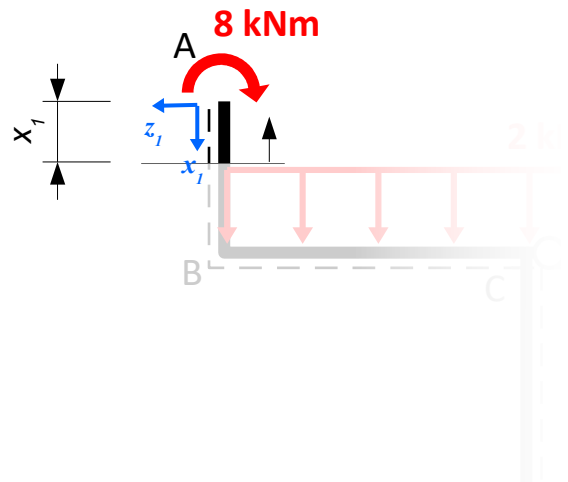


Przedział AB – redukcja układu sił na górze:

$$AB: x_1 \in (0; 2)$$

$$\begin{cases} N(x_1) = 0 \\ Q(x_1) = 0 \\ M(x_1) = 8 \end{cases}$$

	A	B
x_1	0	2
N	0	0
Q	0	0
M	8	8



Przedział BC – redukcja układu sił z lewej strony:

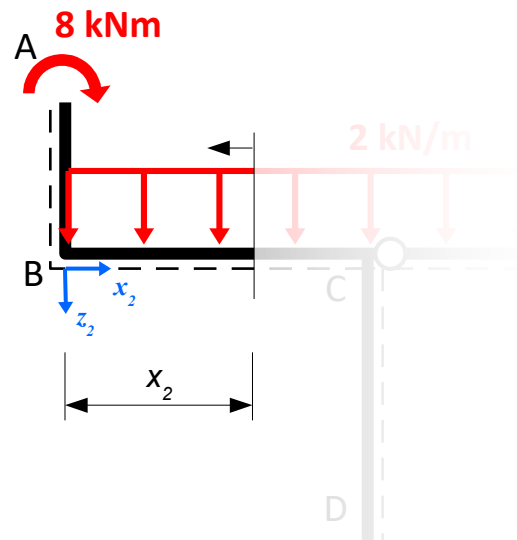
$$BC: x_2 \in (0; 4)$$

$$\begin{cases} N(x_2) = 0 \\ Q(x_2) = -2 \cdot x_2 \\ M(x_2) = 8 - 2 \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} = 8 - x_2^2 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

$$Q = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \in BC \Rightarrow \text{istnieje ekstremum } M(0) = 8$$

	B	C
x_2	0	4
N	0	0
Q	0	-8
M	8	-8

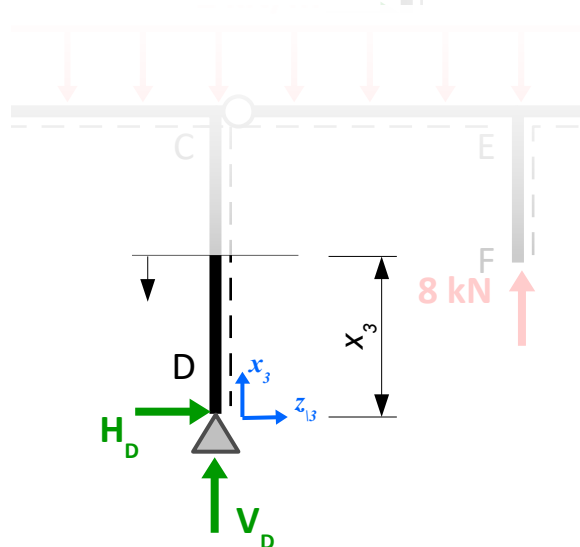


Przedział DC – redukcja układu sił na dole:

$$DC: x_3 \in (0; 4)$$

$$\begin{cases} N(x_3) = -V_D = -12 \\ Q(x_3) = -H_D = 2 \\ M(x_3) = -H_D \cdot x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

	D	C
x_3	0	4
N	-12	-12
Q	2	2
M	0	8



Przedział CE – redukcja układu sił z prawej strony:

$$CE: x_2 \in (4; 8)$$

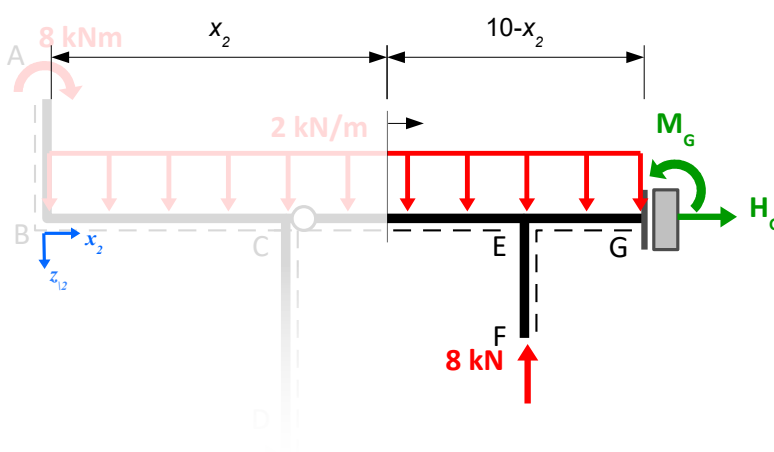
$$\begin{cases} N(x_2) = H_G = 2 \\ Q(x_2) = 2(10 - x_2) - 8 \\ M(x_2) = M_G - 2(10 - x_2) \frac{(10 - x_2)}{2} + 8(8 - x_2) = \\ = 4 - (10 - x_2)^2 + 8(8 - x_2) \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

$$Q = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \in CE \Rightarrow$$

istnieje ekstremum $M(6) = 4$

	C	E
x_2	4	8
N	2	2
Q	4	-4
M	0	0

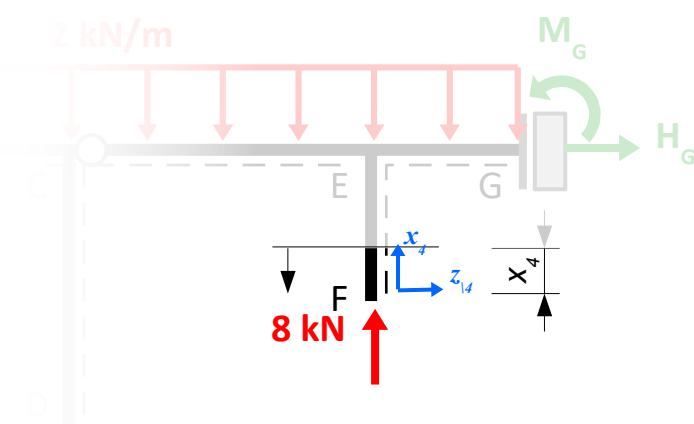


Przedział FE – redukcja układu sił z prawej strony:

$$FE: x_4 \in (0; 2)$$

$$\begin{cases} N(x_4) = -8 \\ Q(x_4) = 0 \\ M(x_4) = 0 \end{cases}$$

	F	E
x_4	0	2
N	-8	-8
Q	0	0
M	0	0



Przedział EG – redukcja układu sił z prawej strony:

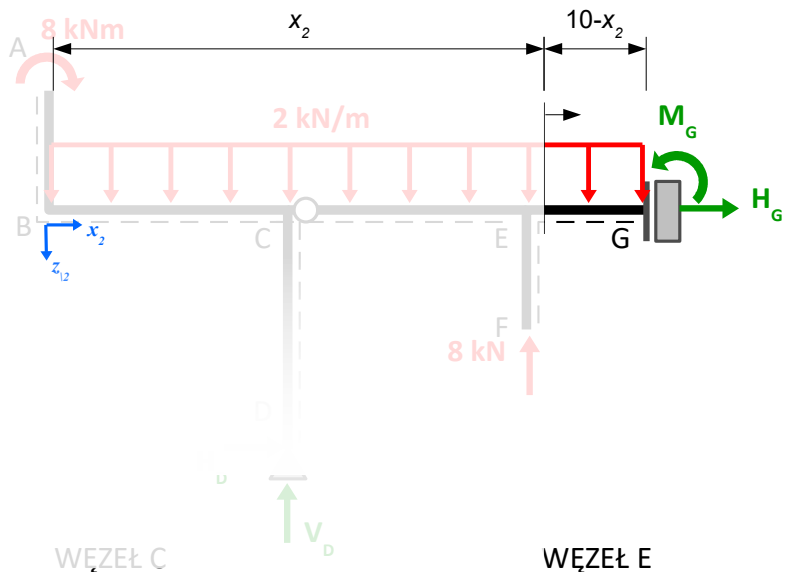
$$EG: x_2 \in (8 ; 10)$$

$$\begin{cases} N(x_2) = H_G = 2 \\ Q(x_2) = 2(10-x_2) \\ M(x_2) = M_G - 2(10-x_2) \frac{(10-x_2)}{2} = \\ = 4 - (10-x_2)^2 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

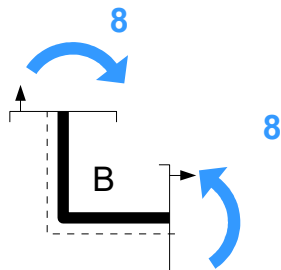
$$Q = 0 \Rightarrow x_2 = 10 \in EG \Rightarrow \text{istnieje ekstremum } M(0) = 4$$

	E	G
x_2	8	10
N	2	2
Q	4	0
M	0	4

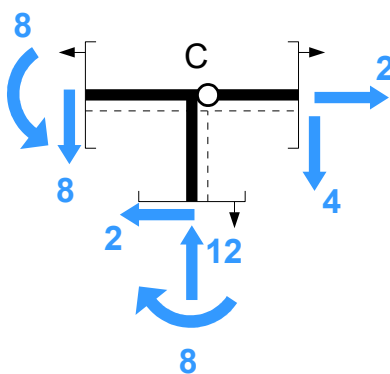


Sprawdzenie równowagi węzłów

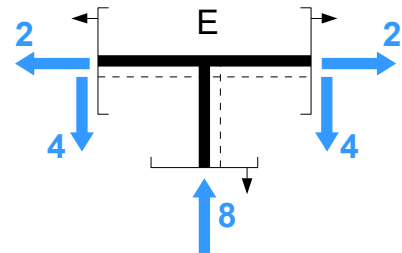
WĘZŁ B



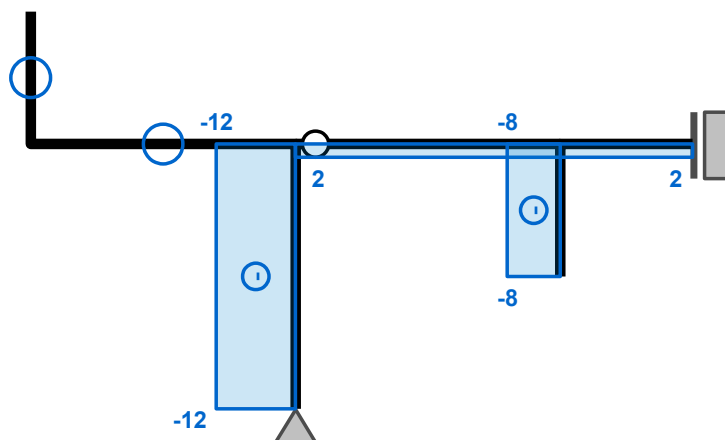
WĘZŁ C



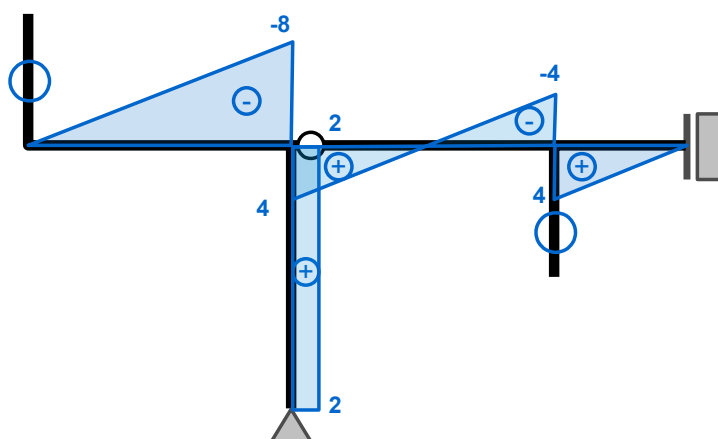
WĘZŁ E



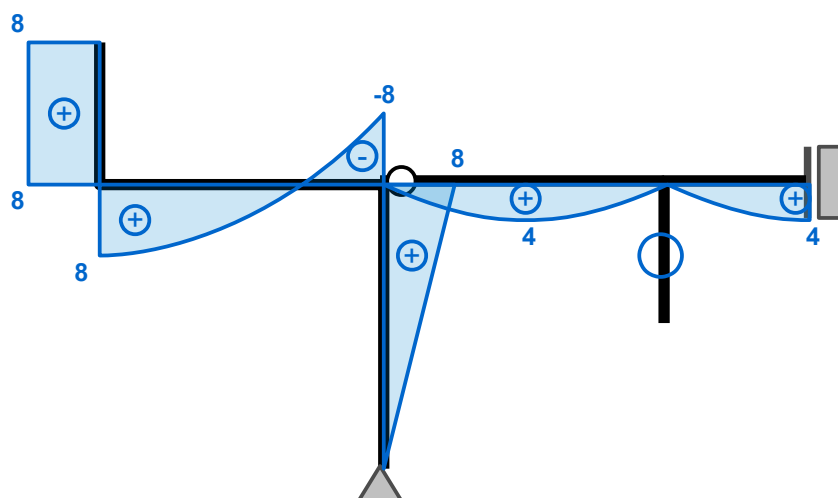
Wykres rozkładu siły osiowej:



Wykres rozkładu siły poprzecznej:

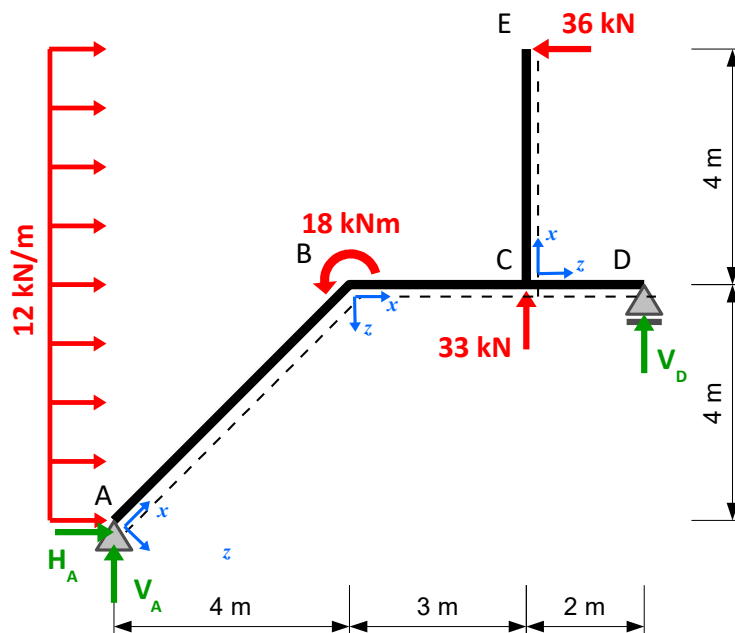


Wykres rozkładu momentu zginającego:



ZADANIE 3

Wyznacz rozkład sił przekrojowych w ramie jak na rysunku, sprawdź równowagę węzła, w którym pręt ukośny łączy się z prętem poziomym oraz sporządź wykresy rozkładu sił przekrojowych.

**ROZWIĄZANIE:**

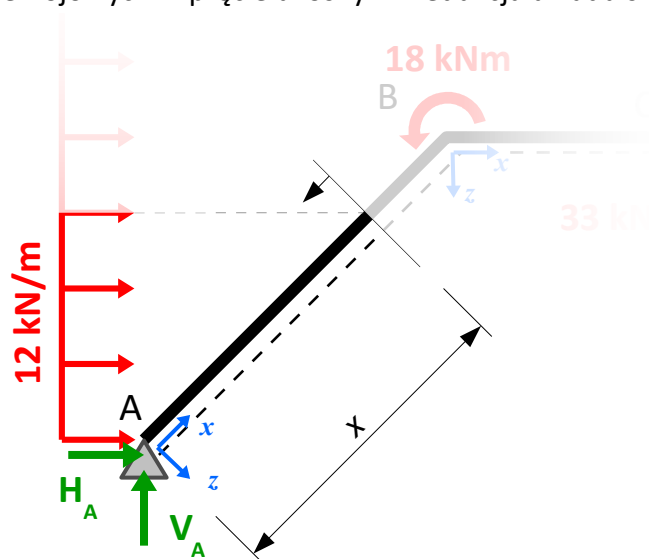
Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: H_A + 12 \cdot 8 - 36 = 0 \Rightarrow H_A = -60 \text{ kN}$$

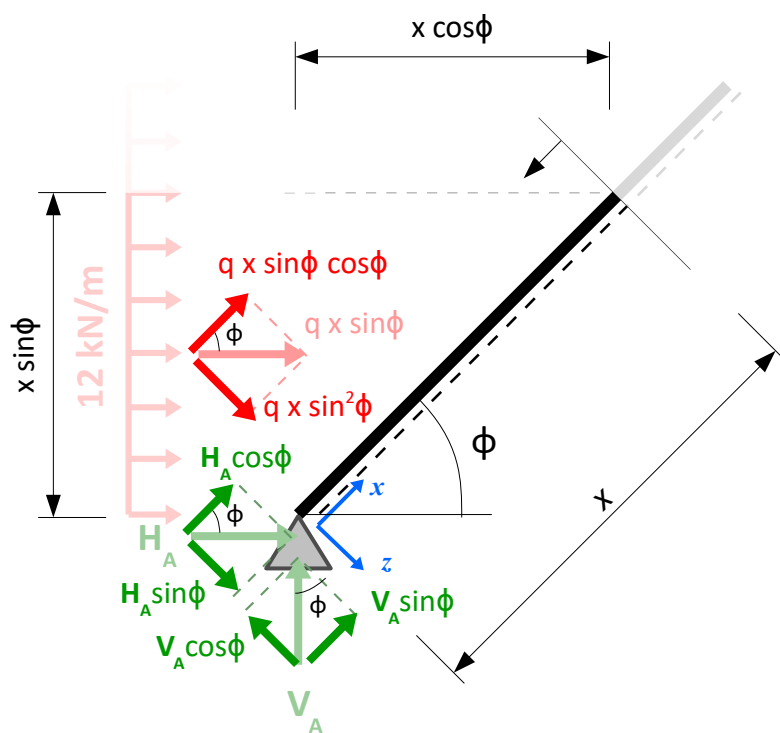
$$\Sigma M_A = 0: -12 \cdot 8 \cdot 4 + 18 + 33 \cdot 7 + 36 \cdot 8 + V_D \cdot 9 = 0 \Rightarrow V_D = -17 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0: V_A + 33 + V_D = 0 \Rightarrow V_A = -16 \text{ kN}$$

Przedział AB – Rozkład sił przekrojowych w pręcie ukośnym. Redukcja układu sił na dole.



Rozkładamy wszystkie obciążenia na składowe równoległe i prostopadłe do osi pręta:



$$AB: x \in (0 ; 4\sqrt{2}) \quad / \quad 4\sqrt{2} \approx 5,657$$

$$\begin{cases} N(x) = -H_A \cos \phi - V_A \sin \phi - q x \sin \phi \cos \phi & = \frac{76}{\sqrt{2}} - 6x \\ Q(x) = -H_A \sin \phi + V_A \cos \phi - q x \sin^2 \phi & = \frac{44}{\sqrt{2}} - 6x \\ M(x) = -H_A x \sin \phi + V_A x \cos \phi - q x \sin \frac{\phi \cdot x \sin \phi}{2} & = \frac{44}{\sqrt{2}} x - 3x^2 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

$$Q = 0 \Rightarrow x = \frac{11\sqrt{2}}{3} \approx 5,185 \in AB \Rightarrow \text{istnieje ekstremum}$$

$$M\left(\frac{11\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{242}{3} \approx 80,667$$

	A	B
x	0,000	5,657
N	53,740	19,799
Q	31,113	-2,828
M	0,000	80,000

Przedział BC – redukcja układu sił z prawej strony:

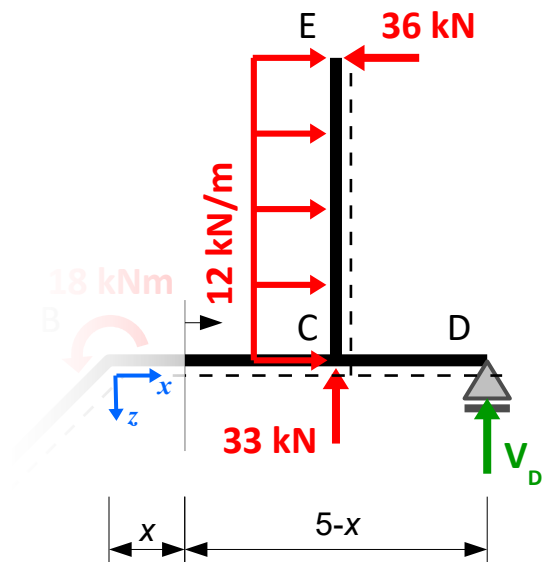
$$BC: x \in (0; 3)$$

$$N(x) = -36 + 12 \cdot 4 = 12$$

$$Q(x) = -33 - V_D = -16$$

$$M(x) = 33 \cdot (3-x) + V_D \cdot (5-x) + 36 \cdot 4 - 12 \cdot 4 \cdot 2 = 33 \cdot (3-x) - 17 \cdot (5-x) + 48$$

	B	C
x	0	3
N	12	12
Q	-16	-16
M	62	14



Przedział CD – redukcja układu sił z prawej strony:

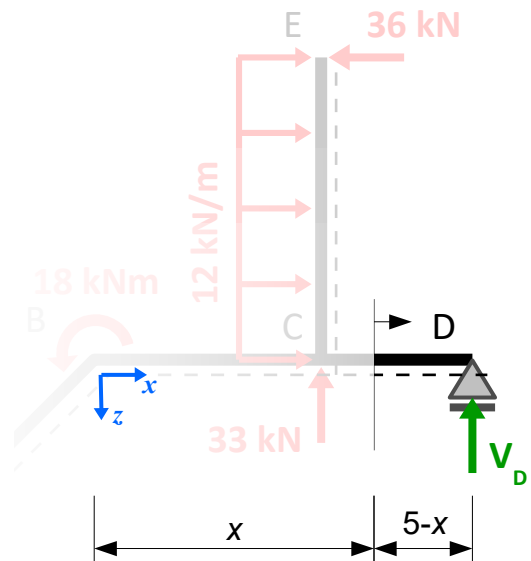
$$CD: x \in (3; 5)$$

$$N(x) = 0$$

$$Q(x) = -V_D = 17$$

$$M(x) = V_D \cdot (5-x) = -17 \cdot (5-x)$$

	C	D
x	3	5
N	0	0
Q	17	17
M	-34	0



Przedział CE – redukcja układu sił na górze:

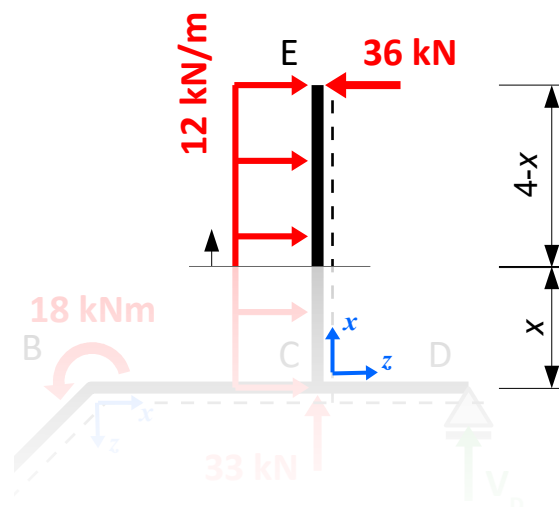
$$CE: x \in (0 ; 4)$$

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = -36 + 12 \cdot (4 - x) \\ M(x) = 36(4 - x) - 12 \cdot (4 - x) \cdot \frac{4 - x}{2} = \\ = 36(4 - x) - 6(4 - x)^2 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum:

$$Q = 0 \Rightarrow x = 1 \in CE \Rightarrow \text{istnieje ekstremum}$$

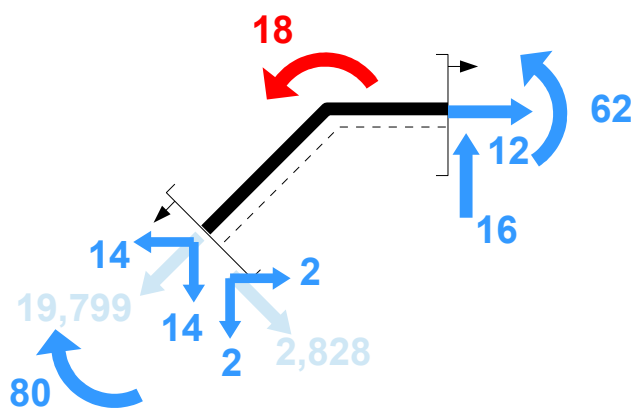
$$M(1) = 54$$



	C	E
x	0	4
N	0	0
Q	12	-36
M	48	0

Równowaga węzła B

Przykładamy do węzła lewostronne i prawostronne wartości sił osiowych, poprzecznych i momentów zginających nadając im odpowiednie zwroty zgodnie z zasadami znakowania sił przekrojowych. Przykładamy ponadto zewnętrzne skupione obciążenie węzła, zaś siły przekrojowe na przecie ukośnym rozkładamy na składowe pionowe i poziome.

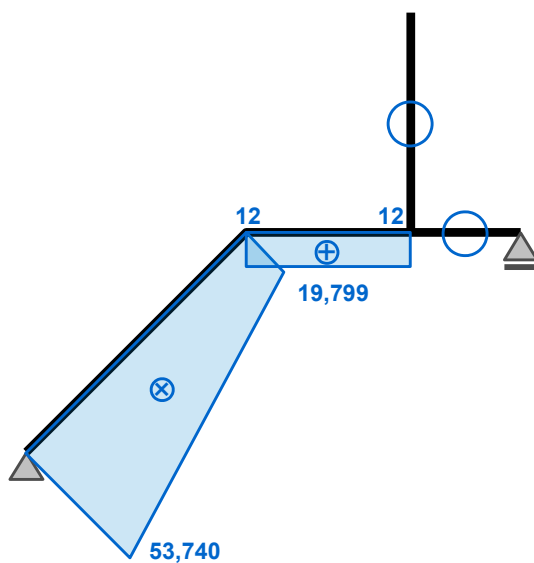


$$\Sigma X = -14 + 2 + 12 = 0$$

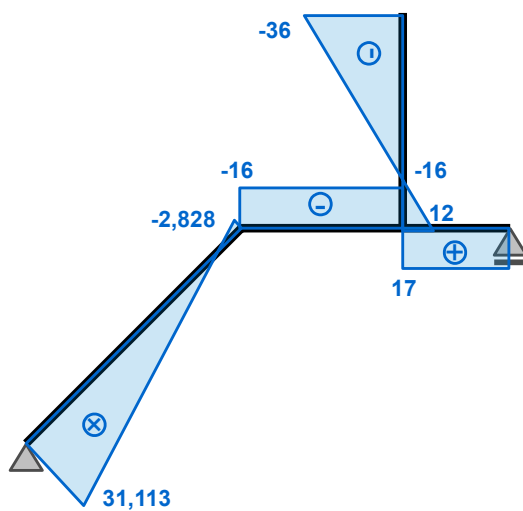
$$\Sigma Y = -14 - 2 + 16 = 0$$

$$\Sigma M = -80 + 18 + 62 = 0$$

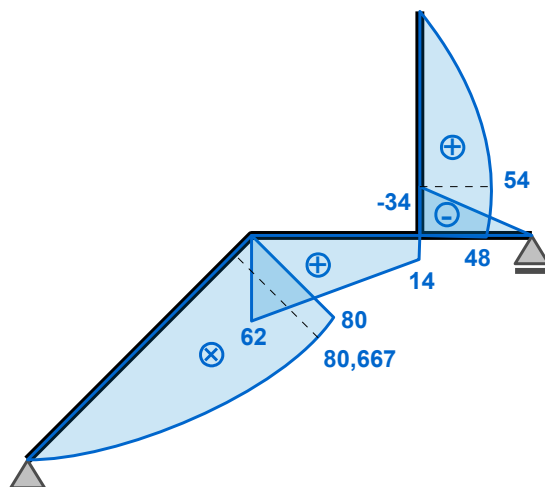
Wykres rozkładu sił osiowych:



Wykres rozkładu sił poprzecznych:

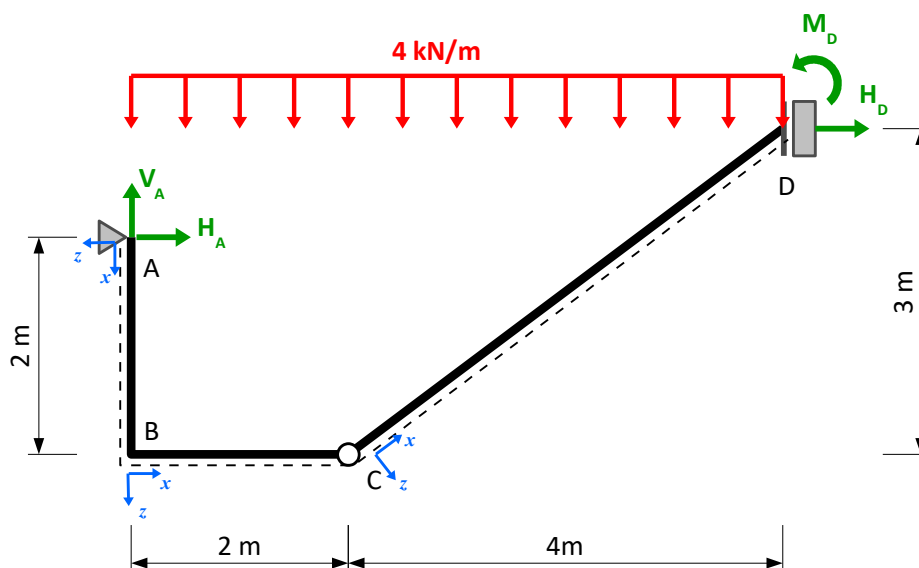


Wykres rozkładu momentów zginających:



ZADANIE 4

Wyznacz rozkład sił przekrojowych w ramie jak na rysunku oraz sporządź odpowiednie wykresy.

**ROZWIĄZANIE:**

Wyznaczamy reakcje podporowe:

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 4 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 24 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^{\leftarrow} = 0: \quad -V_A \cdot 2 - H_A \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = -20 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0: \quad H_A + H_D = 0 \quad \Rightarrow \quad H_D = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_C^{\rightarrow} = 0: \quad M_D - H_D \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_D = 92 \text{ kNm}$$

Przedział AB $x \in (0 ; 2)$ - redukcja układu sił na górze

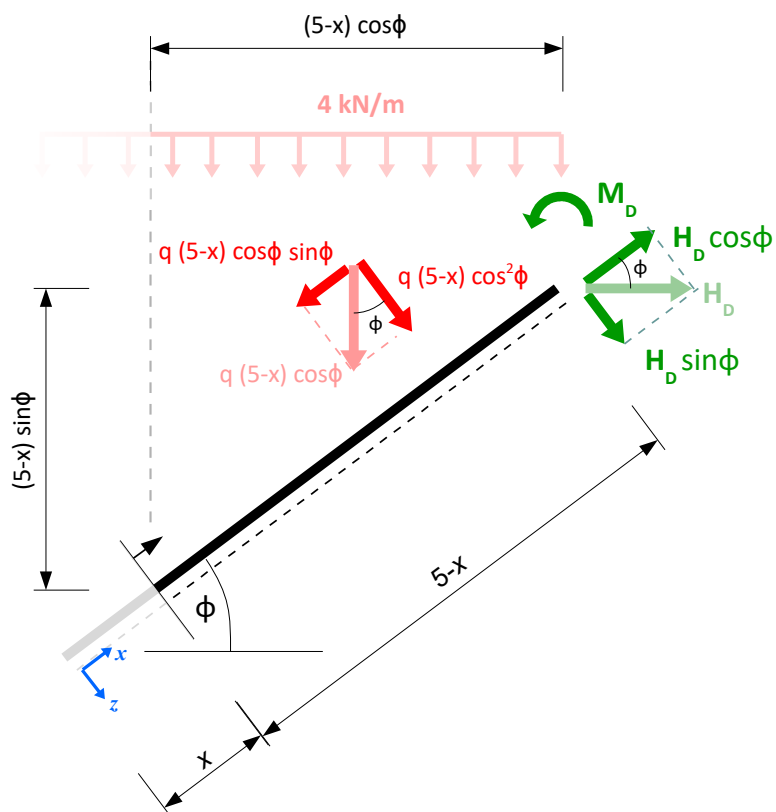
$$\begin{cases} N(x) = V_A = 24 \\ Q(x) = H_A = -20 \\ M(x) = H_A \cdot x = -20x \end{cases}$$

Przedział BC $x \in (0 ; 2)$ - redukcja układu sił z lewej strony

$$\begin{cases} N(x) = -H_A = 20 \\ Q(x) = V_A - 4x = 24 - 4x \\ M(x) = V_A \cdot x - 4 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + H_A \cdot 2 = -2x^2 + 24x - 40 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum: $Q = 0 \Rightarrow x = 6 \notin BC \Rightarrow$ brak ekstremum.

Przedział CD $x \in (0 ; 5)$ - redukcja układu sił z prawej strony

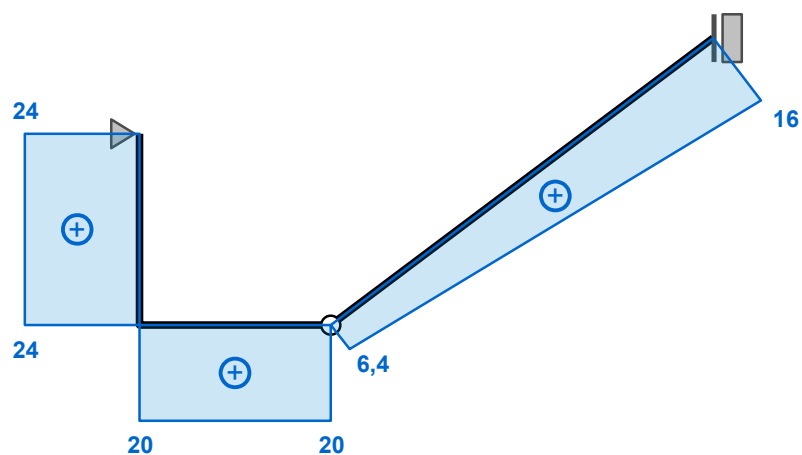


$$\cos \phi = \frac{4}{5} \quad \sin \phi = \frac{3}{5}$$

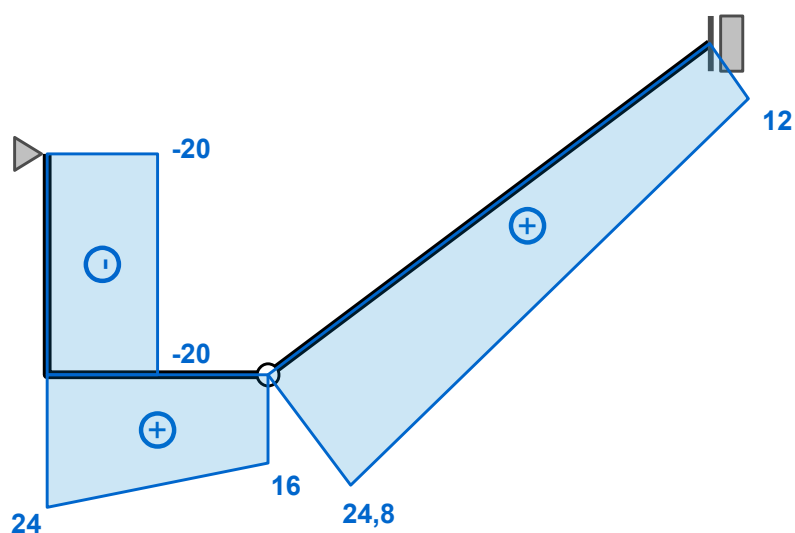
$$\begin{cases} N(x) = -q(5-x)\cos\phi\sin\phi + H_D\cos\phi = -\frac{48}{25}(5-x) + 16 \\ Q(x) = q(5-x)\cos^2\phi + H_D\sin\phi = \frac{64}{25}(5-x) + 12 \\ M(x) = M_D - q(5-x)\cos\phi \cdot \frac{(5-x)\cos\phi}{2} - H_D \cdot (5-x)\sin\phi = 92 - \frac{32}{25}(5-x)^2 - 12(5-x) \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum: $Q = 0 \Rightarrow x = \frac{155}{16} \approx 9,688 \notin CD \Rightarrow$ brak ekstremum.

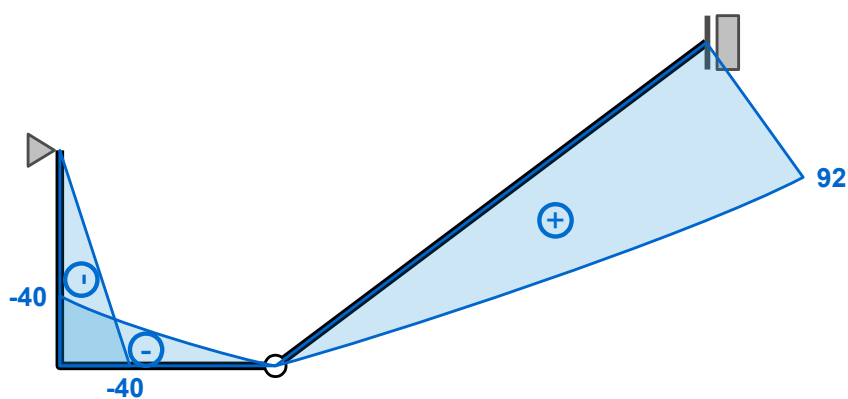
Wykres rozkładu sił osiowych:



Wykres rozkładu sił poprzecznych:

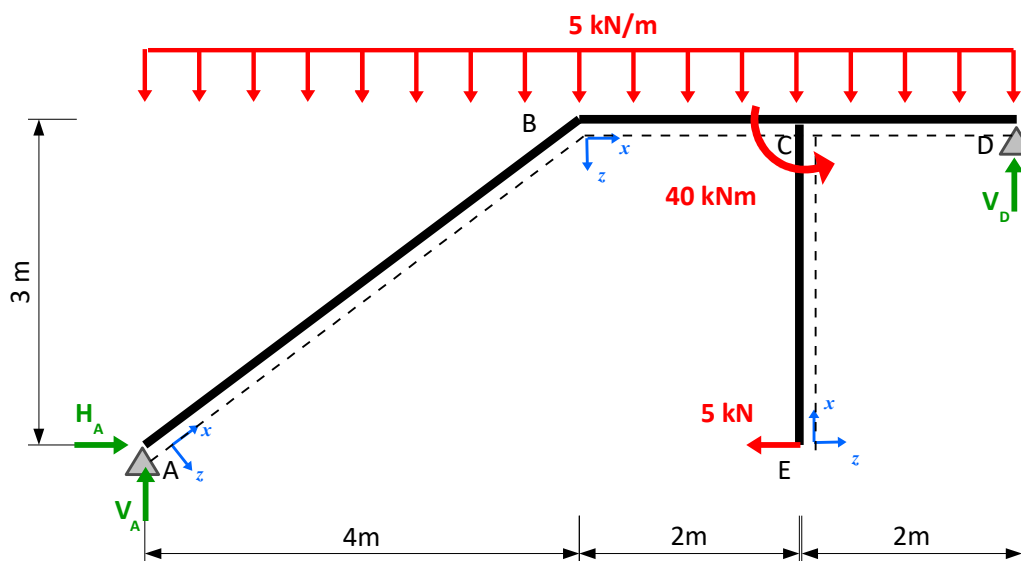


Wykres rozkładu momentów zginających:



ZADANIE 5

Wyznacz rozkład sił przekrojowych w ramie jak na rysunku oraz sporządź odpowiednie wykresy.



ROZWIĄZANIE:

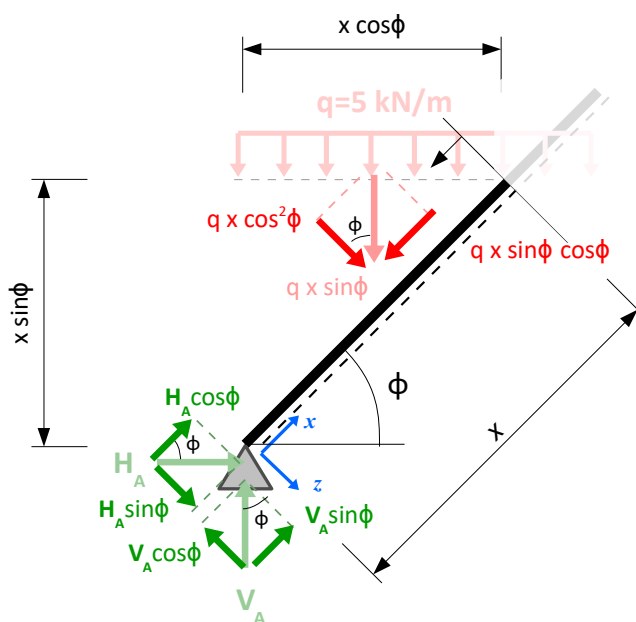
Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 0: H_A - 5 = 0 \Rightarrow H_A = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0: -5 \cdot 8 \cdot 4 + 40 + V_D \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_D = 15 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0: V_A + V_D - 5 \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_A = 25 \text{ kN}$$

Przedział AB $x \in (0; 5)$:



$$\begin{cases} N(x) = -H_A \cos \phi - V_A \sin \phi + q x \sin \phi \cos \phi & = -19 + 2,4 x \\ Q(x) = -H_A \sin \phi + V_A \cos \phi - q x \cos^2 \phi & = 17 - 3,2 x \\ M(x) = -H_A x \sin \phi + V_A x \cos \phi - q x \cos \frac{\phi \cdot x \cos \phi}{2} & = 17 x - 1,6 x^2 \end{cases}$$

$Q=0 \Rightarrow x=5,3125 \notin AB \Rightarrow$ brak ekstremum

Przedział BC $x \in (0; 2)$:

$$\begin{cases} N(x) = -5 \\ Q(x) = -V_D + 5(4-x) = -15 + 5(4-x) \\ M(x) = V_D(4-x) - 5(4-x) \frac{(4-x)}{2} + 40 - 5 \cdot 3 = \\ \quad = 15(4-x) - 2,5(4-x)^2 + 25 \end{cases}$$

$Q=0 \Rightarrow x=1 \notin BC \Rightarrow$ ekstremum momentów w $x=1$: $M(1) = 47,5$

Przedział CD $x \in (2; 4)$:

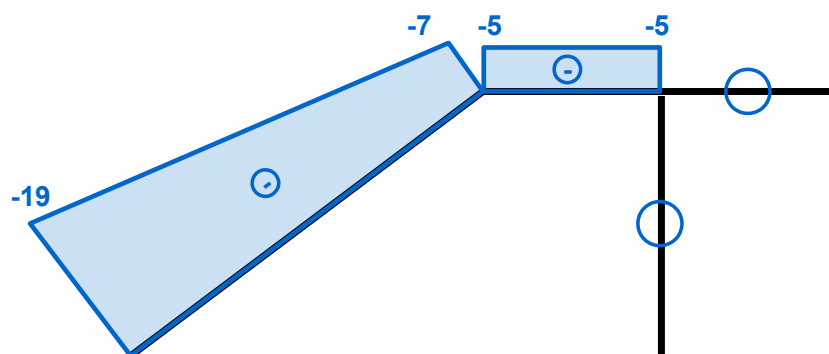
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = -V_D + 5(4-x) = -15 + 5(4-x) \\ M(x) = V_D(4-x) - 5(4-x) \frac{(4-x)}{2} = \\ \quad = 15(4-x) - 2,5(4-x)^2 \end{cases}$$

$Q=0 \Rightarrow x=1 \notin CD \Rightarrow$ brak ekstremum

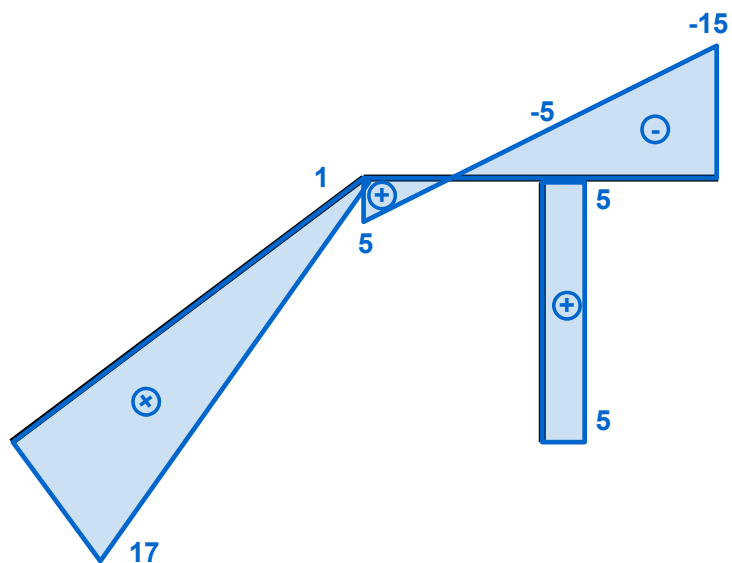
Przedział EC $x \in (0; 3)$:

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = 5 \\ M(x) = 5x \end{cases}$$

Wykres rozkładu sił osiowych:



Wykres rozkładu sił poprzecznych:



Wykres rozkładu momentów zginających:

