

NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

Naprężenia główne w płaskim stanie naprężenia:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maksymalne naprężenie styczne (leżące w płaszczyźnie prostopadłej do pośredniego naprężenia głównego, działające na kierunkach pod kątem 45° do kierunków maksymalnego i minimalnego naprężenia głównego):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Kąt zawarty między **kierunkiem naprężenia maksymalnego** i kierunkiem osi x wyjściowego układu współrzędnych:

$$\varphi = \arctg \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \arctg \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Wzory transformacyjne dla płaskiego stanu naprężenia – składowe tensora naprężenia w układzie współrzędnych obróconym o kąt φ względem układu wyjściowego:

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma'_{yy} = \sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau'_{xy} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \tau_{xy} \end{cases}$$

Uogólnione prawo Hooke'a:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_{11} + \lambda (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & \tau_{23} &= 2\mu \varepsilon_{23} \\ \sigma_{22} &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_{22} + \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) & \tau_{13} &= 2\mu \varepsilon_{13} \\ \sigma_{33} &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_{33} + \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) & \tau_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

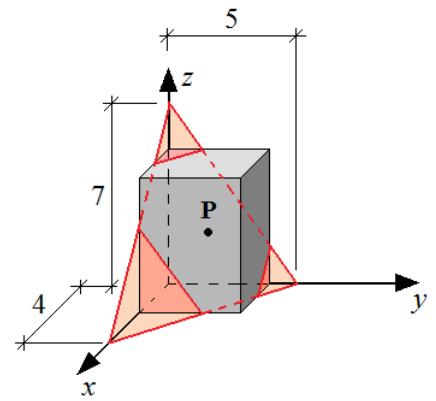
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})] & \tau_{23} &= \frac{1}{2G} \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})] & \tau_{13} &= \frac{1}{2G} \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})] & \tau_{12} &= \frac{1}{2G} \varepsilon_{12} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}] \quad i, j = 1, 2, 3$$

ZADANIE 7.1

W ustalonym punkcie ciała **P** stan naprężenia jest opisany w zadanym układzie współrzędnych (x,y,z) tensorem:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 120 & -20 & 0 \\ -20 & -110 & 30 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Wyznaczyć wektor naprężenia przy cięciu płaszczyzną przechodzącą przez **P** jak na rysunku obok - wyznaczyć jego składową normalną i styczną. Wyznaczyć ekstremalne naprężenia normalne oraz maksymalne naprężenie styczne.



Płaszczyznę cięcia opisuje równanie: $f(x, y, z): \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} - 1 = 0$

Normalna do powierzchni cięcia: $\mathbf{n} = \text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7} \right]$

Wektor unormowany: $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = [0,713; 0,570; 0,407]$

Wektor naprężenia dla zadanej płaszczyzny cięcia:

$$\mathbf{p}_v = \sigma \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 120 & -20 & 0 \\ -20 & -110 & 30 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,713 \\ 0,570 \\ 0,407 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74,162 \\ 60,715 \\ 17,114 \end{bmatrix} \quad p_v = |\mathbf{p}_v| = 97,362$$

Składowa normalna: $\sigma_v = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{v} = 0,713 \cdot 74,162 + 0,570 \cdot 60,715 + 0,407 \cdot 17,114 = 94,496$

$$\sigma_v = \sigma_v \cdot \mathbf{v} = 94,496 \cdot \begin{bmatrix} 0,713 \\ 0,570 \\ 0,407 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67,385 \\ 53,908 \\ 38,506 \end{bmatrix}$$

Składowa styczna: $\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = 23,449$

$$\tau_v = \mathbf{p}_v - \sigma_v = \begin{bmatrix} 6,778 \\ 6,807 \\ -21,391 \end{bmatrix}$$

Naprężenia główne wyznaczymy jako pierwiastki równania wiekowego, którego współczynniki stanowią następujące niezmienniki tensora naprężenia:

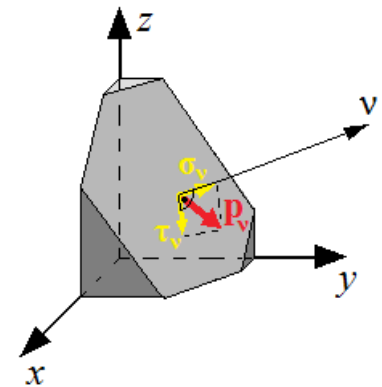
$$I_1 = 120 - 110 + 0 = 10$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 120 & -20 \\ -20 & -110 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -110 & 30 \\ 30 & 0 \end{vmatrix} = -14500 \quad I_3 = \begin{vmatrix} 120 & -20 & 0 \\ -20 & -110 & 30 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} = -108000$$

Rozwiązania równania wiekowego: $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 121,783 \\ \sigma_2 = 7,439 \\ \sigma_3 = -119,221 \end{cases}$

Naprężenia ekstremalne: $\sigma_{max} = \sigma_1 = 121,783 \text{ MPa}$
 $\sigma_{min} = \sigma_3 = -119,221 \text{ MPa}$

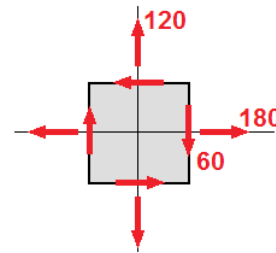
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 120,502 \text{ MPa}$$



ZADANIE 7.2

Dany jest płaski stan naprężenia, który w przyjętym układzie współrzędnych opisuje tensor

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 & -60 \\ -60 & 120 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$



Wyznaczyć naprężenia główne oraz kierunki naprężeń głównych a następnie wyznaczyć składowe stanu naprężenia w układzie nachylonym pod kątem 35° do układu wyjściowego. Wyznaczyć składowe tensora naprężenia w układzie występowania ekstremalnych wartości naprężeń stycznych. zilustrować uzyskane wyniki. Zadanie rozwiązać zarówno analitycznie, jak i graficznie (przy użyciu kół Mohra).

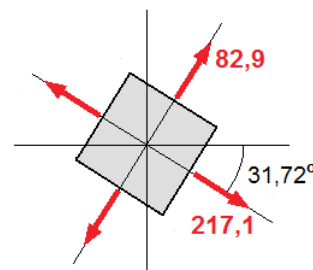
ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE – WZORY TRANSFORMACYJNE:

Wartości i kierunki własne tensora naprężenia:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 217,082 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 82,918 \quad \text{MPa}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{max} - \sigma_{yy}} = -31,717^\circ$$



Tensor naprężenia w układzie osi własnych: $\sigma = \begin{bmatrix} 217,082 & 0 \\ 0 & 82,918 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$

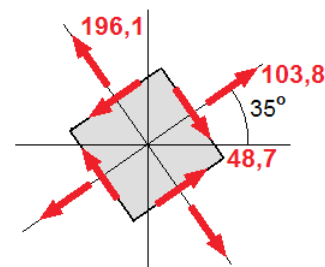
Składowe tensora naprężenia w układzie współrzędnych obróconym o 35° względem układu wyjściowego:

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = 180 \cos^2 35^\circ + 120 \sin^2 35^\circ + (-60) \sin 70^\circ = 103,879 \\ \sigma'_{yy} = \sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = 180 \sin^2 35^\circ + 120 \cos^2 35^\circ - (-60) \sin 70^\circ = 196,121 \\ \tau'_{xy} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} (120 - 180) \sin 70^\circ - 60 \cos 70^\circ = -48,712 \end{cases}$$

Zapis macierzowy:

$$\text{Macierz obrotu o } 35^\circ: \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,819 & 0,574 \\ -0,574 & 0,819 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \sigma \mathbf{R}^T &= \begin{bmatrix} 0,819 & 0,574 \\ -0,574 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 & -60 \\ -60 & 120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,819 & -0,574 \\ 0,574 & 0,819 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 103,879 & -48,712 \\ -48,712 & 196,121 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}] \end{aligned}$$



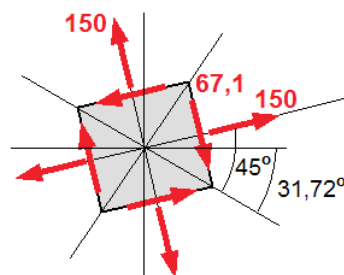
Składowe tensora naprężenia w układzie współrzędnych obróconym o 45° względem układu osi własnych - jest to orientacja występowania ekstremalnych wartości naprężeń stycznych:

$$\begin{cases} \sigma''_{xx} = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = 217,082 \cos^2 45^\circ + 82,918 \sin^2 45^\circ = 150 \\ \sigma''_{yy} = \sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = 217,082 \sin^2 45^\circ + 82,918 \cos^2 45^\circ = 150 \\ \tau''_{xy} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \tau_{xy} = \frac{1}{2} (82,918 - 217,082) \sin 90^\circ = -67,082 \end{cases}$$

Zapis macierzowy:

Macierz obrotu o 45°: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

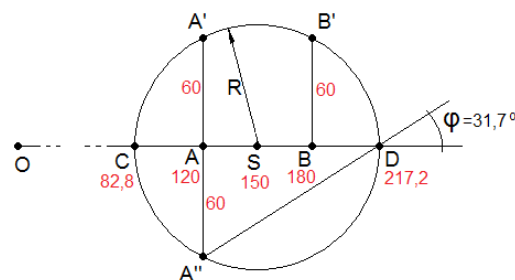
$$\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 217,082 & 0 \\ 0 & 82,918 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -67,082 \\ -67,082 & 150 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$



Maksymalne naprężenie styczne: $|\tau_{max}| = \frac{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}{2} = 67,082 \text{ [MPa]}$

ROZWIĄZANIE GRAFICZNE - KOŁO MOHRA:

Na osi poziomej zaznaczamy punkty A i B odpowiadające kolejno $\sigma_{22} = 120 \text{ MPa}$ oraz $\sigma_{11} = 180 \text{ MPa}$. Przyjmujemy, że odległość między tymi punktami na kartce jest równa 10 cm. Na liniach pionowych przechodzących przez A i B odkreślamy miary naprężeń stycznych i zaznaczamy punkty A' , A'' i B' - długość tych odcinków znajdujemy z proporcji:



$$\begin{aligned} |\sigma_{11} - \sigma_{22}| = 60 \text{ MPa} & \quad - \quad 10 \text{ cm} \\ |\sigma_{12}| = 60 \text{ MPa} & \quad - \quad x \end{aligned} \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Z punktu S pomiędzy A i B , odpowiadającego naprężeniu $0,5 \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 150 \text{ MPa}$, kreślimy okrąg przechodzący przez punkty A' , A'' , B' . Mierzymy promień uzyskanego okręgu: $R = 11,2 \text{ cm}$. Miarę naprężenia dla tej długości znajdujemy z proporcji:

$$\begin{aligned} 60 \text{ MPa} & \quad - \quad 10 \text{ cm} \\ x & \quad - \quad 11,2 \text{ cm} \end{aligned} \Rightarrow x = 67,2 \text{ MPa}$$

Punkty przecięcia się okręgu z osią poziomą C i D określają wartości naprężeń głównych.

$$|OD| = |OS| + R \rightarrow \sigma_1 = 150 + 67,2 = 217,2 \text{ [MPa]}$$

$$|OC| = |OS| - R \rightarrow \sigma_2 = 150 - 67,2 = 82,8 \text{ [MPa]}$$

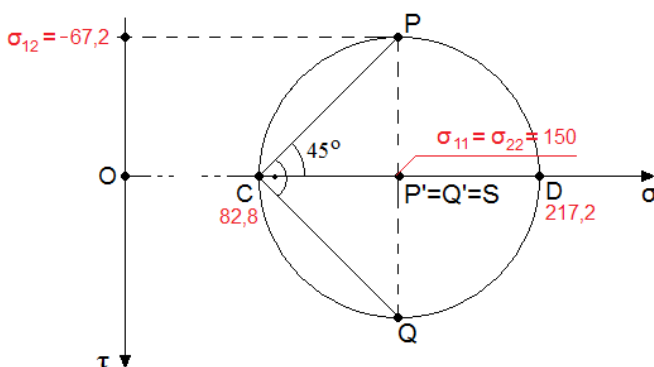
Kąt między prostą $A''D$ a osią poziomą określa orientację kierunku naprężenia maksymalnego. Tangens tego kąta odczytujemy jako równy:

$$\text{tg } \varphi = \frac{|AA''|}{|AD|} = \frac{10 \text{ cm}}{16,2 \text{ cm}} = 0,617 \Rightarrow \varphi = \text{arctg}(0,617) = 0,553 \text{ rad} = 31,7^\circ$$

Mając gotowe koło Mohra, możemy znaleźć składowe tensora naprężenia w dowolnym układzie współrzędnych nachylonym pod zadaniem kątem do **kierunków naprężeń głównych**. W tym celu kreślimy od punktu C prostą nachyloną do osi poziomej pod zadaniem kątem oraz drugą prostą, prostopadłą do niej. Punkty przecięcia tych prostych z kołem oznaczamy odpowiednio przez P i Q . Współrzędne poziome tych punktów (oznaczone przez P i Q) są równe odpowiednio składowym σ_{11} i σ_{22} w nowym układzie współrzędnych, zaś pionowa współrzędna P odpowiada składowej σ_{12} .

Składowe tensora naprężenia w układzie nachylonym pod kątem 45° do osi głównych

Punkty przecięcia prostej kreślonej z C pod kątem 45° z kołem Mohra leżą na pionowej jego średnicy. Stąd rzuty P i Q pokrywają się ze środkiem koła S , któremu odpowiada wartość 150 MPa, współrzędna pionowa zaś ma miarę promienia koła, która odpowiada wartości $67,2$ MPa.



Składowe tensora naprężenia w układzie nachylonym pod kątem 35° do osi wyjściowego układu współrzędnych

Osie nowego układu współrzędnych są nachylone pod kątem:

$$35^\circ - \varphi = 35^\circ + 31,717^\circ = 66,717^\circ$$

Mierzymy odcinki:

$$|PP'| = 8,1 \text{ cm} \rightarrow 60 \text{ MPa} \cdot \frac{8,1 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 48,6 \text{ MPa}$$

$$|P'S| = |SQ'| = 7,7 \text{ cm} \rightarrow 60 \text{ MPa} \cdot \frac{7,7 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 46,2 \text{ MPa}$$

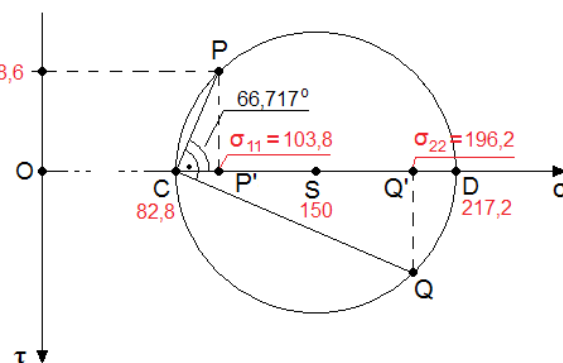
Naprężenia normalne:

$$|OP'| = |OS| - |SP'| \rightarrow \sigma_{11} = 150 - 46,2 = 103,8 \text{ MPa}$$

$$|OQ'| = |OS| + |SQ'| \rightarrow \sigma_{22} = 150 + 46,2 = 196,2 \text{ MPa}$$

Naprężenia styczne:

$$\sigma_{12} = -48,6 \text{ MPa}$$



ZADANIE 7.3

Materiał:

Moduł Younga: $E = 210 \text{ GPa}$

Współczynnik Poissona: $\nu = 0,2$

Moduł Kirchhoffa: $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 87,5 \text{ GPa}$

Stan naprężenia: $\sigma = \begin{bmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \text{ MPa}$

Wyznaczyć:

- naprężenie hydrostatyczne i dewiatorowe
- aksjator i dewiator naprężenia
- niezmienniki tensora i jego dewiatora
- kąt Lodego
- naprężenia główne i kierunki naprężeń głównych
- macierz przejścia z układu (x,y,z) do układu osi głównych
- ekstremalne naprężenia styczne
- naprężenia oktaedryczne
- Stan odkształcenia odpowiadający zadanemu stanowi naprężenia dla podanych stałych materiałowych ciała izotropowego.

NAPRĘŻENIE HYDROSTATYCZNE I DEWIATOROWE

Naprężenie hydrostatyczne:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 100 \quad [\text{MPa}]$$

Naprężenie dewiatorowe:

$$q = \sqrt{\frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sqrt{3750} = 25\sqrt{6} \approx 61,237 \quad [\text{MPa}]$$

AKSJATOR I DEWIATOR NAPRĘŻENIA

Aksjator (część kulista) naprężenia:

$$\mathbf{A}_\sigma = p \mathbf{I} = 100 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

Dewiator naprężenia:

$$\mathbf{D}_\sigma = \mathbf{s} = \sigma - \mathbf{A}_\sigma = \begin{bmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 36 & 0 \\ 36 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

Sprawdzenie:

$$|\mathbf{D}_\sigma| = \sqrt{s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2 + 2(s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2)} = \sqrt{2^2 + 23^2 + (-25)^2 + 2 \cdot 36^2} = \sqrt{3750} = q$$

NIEMIENNIKI TENSORA NAPRĘŻENIA I JEGO DEWIATORA I KĄT LODEGO

Pierwszy niezmiennik tensora naprężenia:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 300 \text{ [MPa]}$$

Drugi niezmiennik tensora naprężenia:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 102 & 36 \\ 36 & 123 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 102 & 0 \\ 0 & 75 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 123 & 0 \\ 0 & 75 \end{vmatrix} = 28125 \text{ [MPa}^2\text{]}$$

Trzeci niezmiennik tensora naprężenia:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{vmatrix} = 843750 \text{ [MPa}^3\text{]}$$

Drugi niezmiennik dewiatora naprężenia:

$$J_2 = - \begin{vmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -25 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 23 & 0 \\ 0 & -25 \end{vmatrix} = 1875 \text{ [MPa}^2\text{]}$$

Trzeci niezmiennik dewiatora naprężenia:

$$J_3 = \begin{vmatrix} 2 & 36 & 0 \\ 36 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 31250 \text{ [MPa}^3\text{]}$$

Sprawdzenie:

$$\frac{1}{2} q^2 = \frac{3750}{2} = 1875 = J_2$$

$$-I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 = -28125 + \frac{1}{3} \cdot 300^2 = 1875 = J_2$$

$$I_3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 = 843750 - \frac{1}{3} \cdot 300 \cdot 28125 + \frac{2}{27} \cdot 300^3 = 31250 = J_3$$

Kąt Lodego

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right] = 0^\circ$$

NAPRĘŻENIA I KIERUNKI NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH

Równanie charakterystyczne:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^3 - 300 \sigma^2 + 28125 \sigma - 843750 = 0$$

Wyróżnik równania charakterystycznego: $\Delta = \frac{1}{4} J_2^2 - \frac{1}{27} J_3^2 = 0$

$\Delta = 0 \wedge J_3 \neq 0 \Rightarrow$ równanie ma jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedynczy:

$$\sigma_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} + p = 150 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} + p = 75 \text{ MPa}$$

Naprężenia główne:

$$\sigma_1 = 150, \quad \sigma_2 = 75, \quad \sigma_3 = 75 \text{ [MPa]}$$

Wektor własny odpowiadający pierwszemu naprężeniu głównemu:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_1 \mathbf{I}) \mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 102-150 & 36 & 0 \\ 36 & 123-150 & 0 \\ 0 & 0 & -75-150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -48n_1 + 36n_2 = 0 \\ 36n_1 - 27n_2 = 0 \\ -75n_3 = 0 \end{cases}$$

Niewiadoma $n_3=0$. Równania na pozostałe niewiadome tworzą układ równań tożsamościowych - wyznacznik główny macierzy współczynników jest równy 0 zaś największy niezerowy minor ma rząd 2, zatem rozwiązanie zależy od $3-2=1$ parametrów. Przyjmujemy jedną z niewiadomych, np. n_1 , za parametr i wykorzystujemy dowolne równanie aby wyliczyć drugą niewiadomą.

$$n_2 = \frac{36}{27} n_1 \quad \text{albo} \quad n_2 = \frac{48}{36} n_1 \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{4}{3} n_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_1 = \left[n_1, \frac{4}{3} n_1, 0 \right]$$

Unormowany wektor własny: $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|} = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right]$

Wektor własny odpowiadający drugiemu i trzeciemu naprężeniu głównemu:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_2 \mathbf{I}) \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 102-75 & 36 & 0 \\ 36 & 123-75 & 0 \\ 0 & 0 & 75-75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 27n_1 + 36n_2 = 0 \\ 36n_1 + 45n_2 = 0 \\ 0n_3 = 0 \end{cases}$$

Równania tworzą układ równań tożsamościowych - wyznacznik główny macierzy współczynników jest równy 0 a największy niezerowy minor ma rząd 1, zatem rozwiązanie zależy od $3-1=2$ parametrów. Składowa n_3 może być dowolna - przyjmijmy ją jako jeden z parametrów rozwiązania. Pozostałe dwa równania również tworzą układ tożsamościowy. Przyjmijmy n_1 za drugi z parametrów równania i wykorzystujemy jedno z pozostałych równań aby wyznaczyć drugą niewiadomą:

$$n_2 = -\frac{27}{36} n_1 \quad \text{albo} \quad n_2 = -\frac{36}{48} n_1 \quad \Rightarrow \quad n_2 = -\frac{3}{4} n_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_2 = \left[n_1, -\frac{3}{4} n_1, n_3 \right]$$

Podwójnej wartości własnej odpowiadają dwa wektory własne - mogą to być dowolne wektory odpowiadające dowolnej kombinacji parametrów n_1 i n_3 . Przyjmijmy:

$$n_1=1, \quad n_3=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_2^{(1)} = \left[1, -\frac{3}{4}, 0 \right] \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{n}_2^{(1)}}{|\mathbf{n}_2^{(1)}|} = \left[\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0 \right]$$

$$n_1=0, \quad n_3=1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_2^{(2)} = [0, 0, 1] \quad \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{n}_2^{(2)}}{|\mathbf{n}_2^{(2)}|} = [0, 0, 1]$$

Łatwo sprawdzić, że wektory te są parami prostopadłe.

Macierz przejścia do nowego układu współrzędnych: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rzeczywiście:

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 & 36 & 0 \\ 36 & 123 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

EKSTREMALNE NAPRĘŻENIA STYCZNE

Macierze obrotu o 45° wokół kolejnych osi przyjętego układu współrzędnych – tutaj układu osi głównych:

$$\mathbf{R}_{e_1}^{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{e_2}^{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{e_3}^{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Tensor naprężenia w układzie obróconym o 45° wokół pierwszej osi głównej

$$\mathbf{R}_{e_1}^{45} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{R}_{e_1}^{45})^T = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \quad |\tau_1| = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} = 0 \quad \text{MPa}$$

Tensor naprężenia w układzie obróconym o 45° wokół drugiej osi głównej

$$\mathbf{R}_{e_2}^{45} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{R}_{e_2}^{45})^T = \begin{bmatrix} 112,5 & 0 & 37,5 \\ 0 & 75 & 0 \\ 37,5 & 0 & 112,5 \end{bmatrix} \quad |\tau_2| = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = 37,5 \quad \text{MPa}$$

Tensor naprężenia w układzie obróconym o 45° wokół trzeciej osi głównej

$$\mathbf{R}_{e_3}^{45} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{R}_{e_3}^{45})^T = \begin{bmatrix} 112,5 & 37,5 & 0 \\ 37,5 & 112,5 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \quad |\tau_3| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = 37,5 \quad \text{MPa}$$

NAPRĘŻENIA OKTAEDRYCZNE:

Normalna zewnętrzna płaszczyzny równo nachylonej do wszystkich kierunków naprężeń głównych w układzie współrzędnych, którego osie pokrywają się z kierunkami głównymi ma postać:

$$\mathbf{v} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

W tym samym układzie współrzędnych tensor naprężenia ma postać diagonalną. Wektor naprężenia odpowiadający tej płaszczyźnie cięcia:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{150}{\sqrt{3}} \\ \frac{75}{\sqrt{3}} \\ \frac{75}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

Naprężenie (długość wektora naprężenia):

$$p = |\mathbf{p}| = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{150}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{75}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{75}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{11250} \approx 106,066 \quad [\text{MPa}]$$

Składowa normalna:

$$\sigma_{oct} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} [150, 75, 75] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{150+75+75}{3} = 100 \quad [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{oct} = \sigma_m = p$$

Składowa styczna:

$$\tau_{oct} = \sqrt{p^2 - \sigma_{oct}^2} = \sqrt{11250 - 10000} = \sqrt{1250} = 33,355 \quad [\text{MPa}]$$

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{3750}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} q$$

STAN ODKSZTAŁCENIA

W dowolnym układzie współrzędnych:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{210 \cdot 10^9} [1,2 \cdot 102 - 0,2 \cdot (102 + 123 + 75)] \cdot 10^6 = 0,000297$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{210 \cdot 10^9} [1,2 \cdot 123 - 0,2 \cdot (102 + 123 + 75)] \cdot 10^6 = 0,000417$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{210 \cdot 10^9} [1,2 \cdot 75 - 0,2 \cdot (102 + 123 + 75)] \cdot 10^6 = 0,000143$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} = \frac{36 \cdot 10^6}{2 \cdot 87,5 \cdot 10^9} = 0,000206 \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} = 0 \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,297 & 0,206 & 0 \\ 0,206 & 0,417 & 0 \\ 0 & 0 & 0,143 \end{bmatrix} \quad [\%]$$

W układzie osi głównych:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_1 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{210 \cdot 10^9} [1,2 \cdot 150 - 0,2 \cdot (150 + 75 + 75)] \cdot 10^6 = 0,000571$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{210 \cdot 10^9} [1,2 \cdot 75 - 0,2 \cdot (150 + 75 + 75)] \cdot 10^6 = 0,000143$$

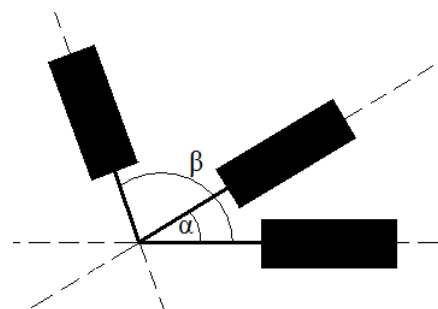
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{210 \cdot 10^9} [1,2 \cdot 75 - 0,2 \cdot (150 + 75 + 75)] \cdot 10^6 = 0,000143$$

W przypadku ciał izotropowych tensory odkształcenia i naprężenia są współosiowe, tzn. mają te same kierunki główne - odkształcenia postaciowe są w takim razie równe 0

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,571 & 0 & 0 \\ 0 & 0,143 & 0 \\ 0 & 0 & 0,143 \end{bmatrix} \quad [\%]$$

ZADANIE 7.4

Na powierzchnię materiału przyklejono rozetkę tensometryczną złożoną z trzech tensometrów, przy czym kąty między kierunkiem pierwszego i dwóch kolejnych są równe odpowiednio α i β . Materiał poddano obciążeniu. Wyznaczyć płaski stan odkształcenia znając odczyty ε_0 , ε_α i ε_β z wszystkich tensometrów.



Każdy z tensometrów wyznacza składową odkształcenia ε_{11} w układzie współrzędnych, którego pierwsza oś pokrywa się z kierunkiem tensometru. Przyjmujemy, że pierwsza oś podstawowego przyjętego układu współrzędnych pokrywa się z kierunkiem przyklejenia pierwszego tensometru.

Płaski stan odkształcenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \quad - \text{pomierzone} \\ \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22} \quad - \text{niewiadome} \end{array}$$

Stan naprężenia w układzie obróconym o α

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{22} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon'_{22} = \varepsilon_{11} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{22} \cos^2 \alpha - \varepsilon_{12} \sin 2\alpha \\ \varepsilon'_{12} = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{12} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Stan naprężenia w układzie obróconym o β

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon''_{11} & \varepsilon''_{12} \\ \varepsilon''_{12} & \varepsilon''_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \varepsilon''_{11} = \varepsilon_{11} \cos^2 \beta + \varepsilon_{22} \sin^2 \beta + \varepsilon_{12} \sin 2\beta = \varepsilon_\beta \\ \varepsilon''_{22} = \varepsilon_{11} \sin^2 \beta + \varepsilon_{22} \cos^2 \beta - \varepsilon_{12} \sin 2\beta \\ \varepsilon''_{12} = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2} \sin 2\beta + \varepsilon_{12} \cos 2\beta \end{cases}$$

Z pomiarów tensometrycznych uzyskujemy wartości $\varepsilon_{11} = \varepsilon_0$, $\varepsilon'_{11} = \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon''_{11} = \varepsilon_\beta$, które zgodnie ze wzorami transformacyjnymi możemy wyrazić przez składowe stanu odkształcenia w podstawowym przyjętym układzie współrzędnych $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$. Stąd otrzymujemy układ równań na $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon'_{11} = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon''_{11} = \varepsilon_\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \sin 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha - \varepsilon_0 \cos^2 \alpha \\ \varepsilon_\beta - \varepsilon_0 \cos^2 \beta \end{bmatrix}$$

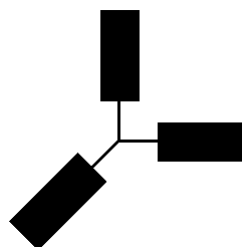
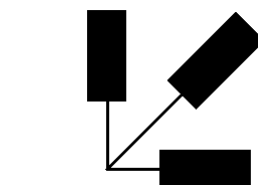
$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \frac{\varepsilon_\alpha \sin 2\beta - \varepsilon_\beta \sin 2\alpha + (\sin 2\alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin 2\beta) \varepsilon_0}{\sin^2 \alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \sin^2 \beta} \\ \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_\beta \sin^2 \alpha - \varepsilon_\alpha \sin^2 \beta + (\cos^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) \varepsilon_0}{\sin^2 \alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \sin^2 \beta} \end{cases}$$

PRZYKŁADY:

Rozetki prostokątne:

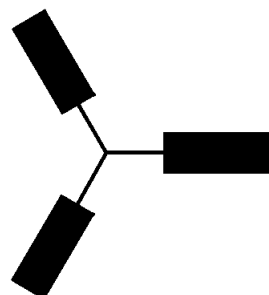
$$\begin{matrix} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 90^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_\alpha - \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_\beta) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \alpha = 90^\circ \\ \beta = 225^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_\beta - \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_\alpha) \end{cases}$$



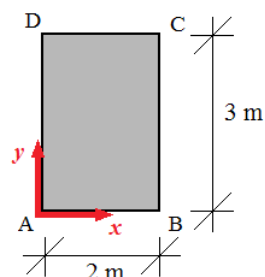
Rozetka równoramienna

$$\begin{matrix} \alpha = 120^\circ \\ \beta = 240^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{3}[2(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - \varepsilon_0] \\ \varepsilon_{12} = \frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



ZADANIE 7.5

Dana jest tarcza prostokątna o wymiarach $2\text{ m} \times 3\text{ m}$, w której stan naprężenia opisany jest w układzie współrzędnych jak na rysunku tensorem naprężenia:



$$\sigma = \begin{bmatrix} 3xy-1 & -2x \\ -2x & 2x+3y \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Wyznaczyć obciążenie tarczy – siły masowe oraz obciążenie powierzchniowe jej brzegu.

Siły masowe:

Siły masowe, będące wewnętrznym obciążeniem punktów tarczy, wyznaczamy na podstawie równań równowagi Naviera, które spełniać muszą składowej tensora naprężenia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \Rightarrow 3y + 0 + b_x = 0 \Rightarrow b_x = -3y \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y &= 0 \Rightarrow -2 + 3 + b_y = 0 \Rightarrow b_y = -1 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned}$$

Wartości w narożach tarczy

$A(0,0)$

$$b_x(A) = 0, \quad b_y(A) = -1 \Rightarrow b(A) = \sqrt{b_x^2(A) + b_y^2(A)} = 1$$

$B(2,0)$

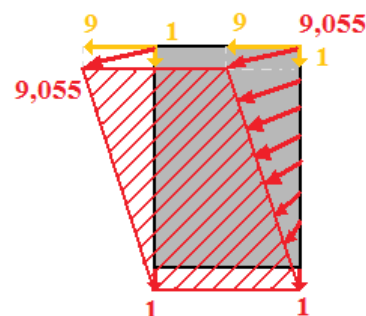
$$b_x(B) = 0, \quad b_y(B) = -1 \Rightarrow b(B) = \sqrt{b_x^2(B) + b_y^2(B)} = 1$$

$C(2,3)$

$$b_x(C) = -9, \quad b_y(C) = -1 \Rightarrow b(C) = \sqrt{b_x^2(C) + b_y^2(C)} = 9,055$$

$D(0,3)$

$$b_x(D) = -9, \quad b_y(D) = -1 \Rightarrow b(D) = \sqrt{b_x^2(D) + b_y^2(D)} = 9,055$$

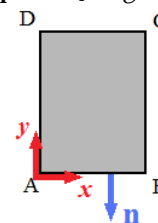


Obciążenie brzegowe:

Dla każdego brzegu określamy zależności między współrzędnymi x i y na tym brzegu, które podstawiamy do tensora naprężenia, oraz wyznaczamy normalną zewnętrzną \mathbf{n} tego brzegu. Wektor obciążenia brzegowego \mathbf{q} wyznaczamy z zależności $\mathbf{q} = \sigma \cdot \mathbf{n}$. Znak wyznaczonych składowych wektora obciążenia określa jego zwrot w globalnym układzie współrzędnych.

Brzeg AB: $x \in (0; 2)$, $y = 0$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{AB} = [0; -1]$

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{AB} = \mathbf{q}_{AB} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2x \\ -2x & 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x^{(AB)} \\ q_y^{(AB)} \end{bmatrix}$$



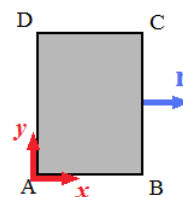
- Składowa x wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- Składowa y wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- Wartości na końcach:

$$A(0,0): \quad q_x^{(AB)}(A) = 0, \quad q_y^{(AB)}(A) = 0$$

$$B(2,0): \quad q_x^{(AB)}(B) = 4, \quad q_y^{(AB)}(B) = -4$$

Brzeg BC: $x=2, y \in (0;3)$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{BC}=[1;0]$

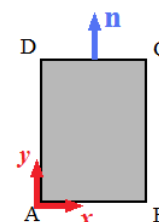
$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{BC} = \mathbf{q}_{BC} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6y-1 & -4 \\ -4 & 4+3y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y-1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x^{(BC)} \\ q_y^{(BC)} \end{bmatrix}$$



- **Składowa x** wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- **Składowa y** wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- Wartości na końcach:
 $B(2,0): q_x^{(BC)}(B) = -1, q_y^{(BC)}(B) = -4$
 $C(2,3): q_x^{(BC)}(C) = 17, q_y^{(BC)}(C) = -4$

Brzeg CD: $x \in (0;2), y=3$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{CD}=[0;1]$

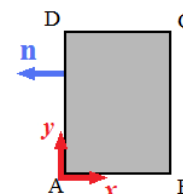
$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{CD} = \mathbf{q}_{CD} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9x-1 & -2x \\ -2x & 2x+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ 2x+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x^{(CD)} \\ q_y^{(CD)} \end{bmatrix}$$



- **Składowa x** wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- **Składowa y** wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- Wartości na końcach:
 $C(2,3): q_x^{(CD)}(C) = -4, q_y^{(CD)}(C) = 13$
 $D(0,3): q_x^{(CD)}(D) = 0, q_y^{(CD)}(D) = 9$

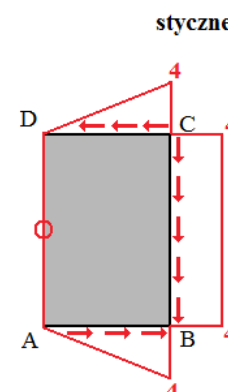
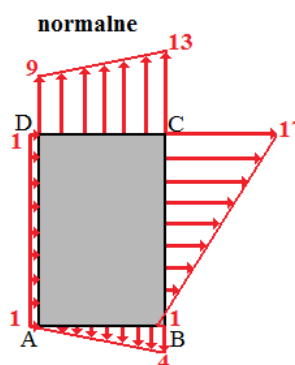
Brzeg DA: $x=0, y \in (0;3)$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{DA}=[-1;0]$

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{DA} = \mathbf{q}_{DA} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x^{(DA)} \\ q_y^{(DA)} \end{bmatrix}$$



- **Składowa x** wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **normalną**.
- **Składowa y** wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową **styczną**.
- Wartości na końcach:
 $D(0,3): q_x^{(DA)}(D) = 1, q_y^{(DA)}(D) = 0$
 $A(0,0): q_x^{(DA)}(A) = 1, q_y^{(DA)}(A) = 0$

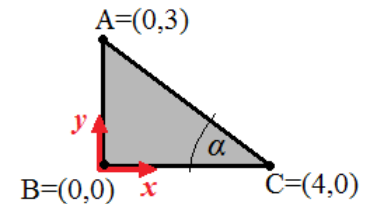
obciążenie brzegowe



ZADANIE 7.6

Dana jest płaska tarcza trójkątna jak na rysunku. Wyznaczyć obciążenie tarczy, jeśli rozkład stanu naprężenia panującego wewnątrz tej tarczy opisuje pole tensorowe:

$$\sigma(x, y) = \begin{bmatrix} 3x - 4y & 2xy + 1 \\ 2xy + 1 & 4 - 2x \end{bmatrix} \quad [\text{Pa}]$$



Siły masowe:

Wartość sił masowych stanowiących obciążenie wewnątrz tarczy wyznaczamy z równań równowagi Naviera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \Rightarrow 3 + 2x + b_x = 0 \Rightarrow b_x = -3 - 2x \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y &= 0 \Rightarrow 2y + b_y = 0 \Rightarrow b_y = -2y \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned}$$

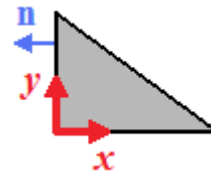
Wartości w narożach tarczy:

$$\begin{aligned} b_x(x_A; y_A) &= -3, & b_x(x_B; y_B) &= -3, & b_x(x_C; y_C) &= -11 \\ b_y(x_A; y_A) &= -6, & b_y(x_B; y_B) &= 0, & b_y(x_C; y_C) &= 0 \end{aligned}$$

Obciążenie brzegowe:

Brzeg AB: $x=0, y \in (0;3)$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{AB} = [-1; 0]$

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{AB} = \mathbf{q}_{AB} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4y & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{AB}^{(x)} \\ q_{AB}^{(y)} \end{bmatrix}$$



- Składowa x wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową normalną. Wartości na końcach brzegu:

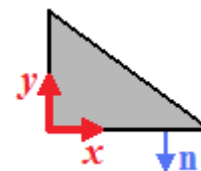
$$q_{AB}^{(x)}(x_A; y_A) = 12, \quad q_{AB}^{(x)}(x_B; y_B) = 0$$

- Składowa y wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową styczną. Wartości na końcach brzegu:

$$q_{AB}^{(y)}(x_A; y_A) = -1, \quad q_{AB}^{(y)}(x_B; y_B) = -1$$

Brzeg BC: $x \in (0,4), y=0$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{BC} = [0; -1]$

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{BC} = \mathbf{q}_{BC} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x & 1 \\ 1 & 4 - 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2xy - 1 \\ 2x - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{BC}^{(x)} \\ q_{BC}^{(y)} \end{bmatrix}$$



- Składowa y wektora obciążenia jest równoległa do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową normalną. Wartości na końcach brzegu:

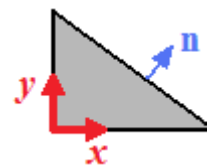
$$q_{BC}^{(x)}(x_B; y_B) = -1, \quad q_{BC}^{(x)}(x_C; y_C) = -1$$

- Składowa x wektora obciążenia jest prostopadła do normalnej zewnętrznej brzegu jest więc składową styczną. Wartości na końcach brzegu:

$$q_{BC}^{(y)}(x_B; y_B) = -4, \quad q_{BC}^{(y)}(x_C; y_C) = 4$$

Brzeg CA: $x \in (0; 4)$, $y = 3 - \frac{3}{4}x$ **normalna zewnętrzna:** $\mathbf{n}_{CA} = [\sin \alpha; \cos \alpha] = \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right]$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{CA} = \mathbf{q}_{CA} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x - 4\left(3 - \frac{3}{4}x\right) & 2x\left(3 - \frac{3}{4}x\right) + 1 \\ 2x\left(3 - \frac{3}{4}x\right) + 1 & 4 - 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}(-3x^2 + 21x - 16) \\ \frac{1}{10}(-9x^2 + 20x + 38) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x^{(CA)} \\ q_y^{(CA)} \end{bmatrix}$$



Składowa normalna do brzegu: $q_{CA}^{(n)} = \mathbf{q}_{CA} \cdot \mathbf{n}_{CA} = \frac{2}{25}(-18x^2 + 83x - 10)$

(zwrot dodatni zgodny z normalną zewnętrzną)

Wartości na końcach brzegu: $q_{CA}^{(n)}(x_C; y_C) = 2,72$, $q_{CA}^{(n)}(x_A; y_A) = -0,8$

Miejsca zerowe: $q_{CA}^{(n)} = 0 \Rightarrow x_1 = 0,124$, $x_2 = 4,487$ $x_2 \notin CA$

Poszukiwanie ekstremum:

$$\frac{d q_{CA}^{(n)}}{d x} = \frac{2}{25}(-36x + 83) = 0 \Rightarrow x = 2,306, \quad q_{CA}^{(n)}(2,306) = 6,854$$

Składowa styczna do brzegu - ponieważ obliczana jest jako różnica geometryczna wektora obciążenia i jego składowej normalnej, zatem podanie jedynie długości składowej stycznej nie uwzględnia jej zwrotu. Wyznaczamy więc całą składową styczną (wektor):

$$\mathbf{q}_{CA}^{(s)} = \mathbf{q}_{CA} - q_{CA}^{(n)} \mathbf{n}_{CA} = \frac{21x^2 - 276x + 370}{250} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

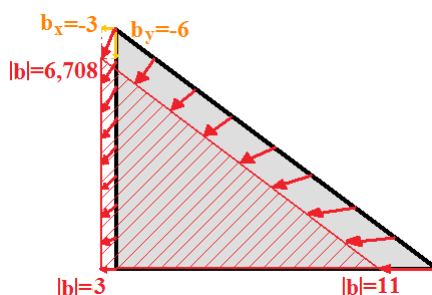
Wartości na końcach brzegu: $\mathbf{q}_{CA}^{(s)}(x_C; y_C) = \begin{bmatrix} 6,368 \\ -4,776 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{q}_{CA}^{(s)}| = 7,96$

(zwroty zgodne z osiami ukł. wsp.) $\mathbf{q}_{CA}^{(s)}(x_A; y_A) = \begin{bmatrix} -5,98 \\ 4,44 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{q}_{CA}^{(s)}| = 7,4$

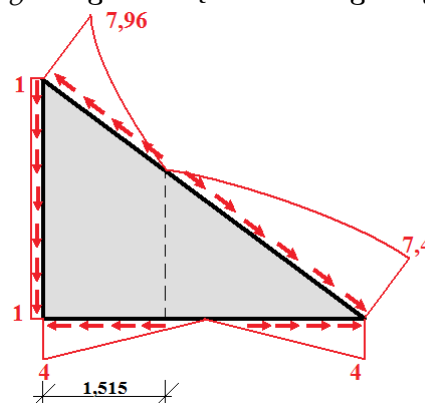
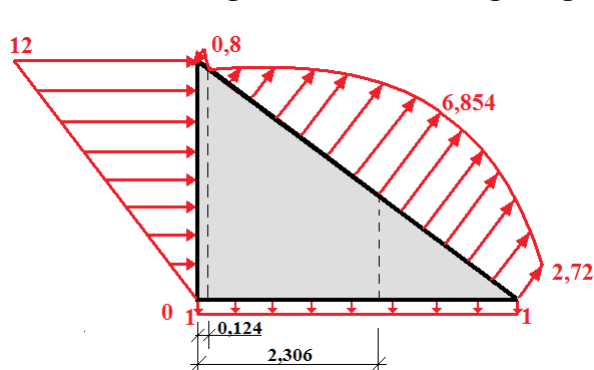
Miejsca zerowe: $\mathbf{q}_{CA}^{(s)} = \mathbf{0} \Leftrightarrow 21x^2 - 276x + 370 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,515$, $x_2 = 11,628$ $x_2 \notin CA$

Poszukiwanie ekstremum: $\frac{d \mathbf{q}_{CA}^{(s)}}{d x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{2}{25}(42x - 276) = 0 \Rightarrow x = 6,571 \notin CA$

Rozkład sił masowych:



Rozkład normalnego obciążenia brzegowego: Rozkład stycznego obciążenia brzegowego:



ZADANIE 7.7

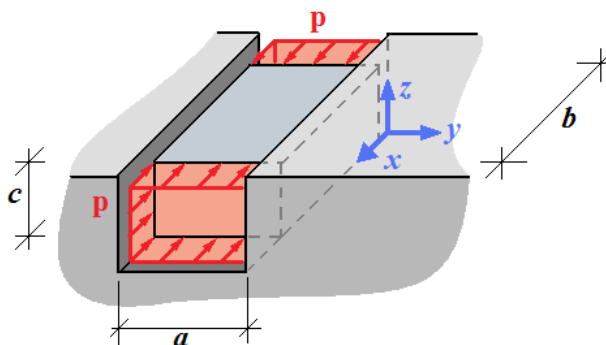
Prostopadłościenny blok o wymiarach a , b , c wykonany z izotropowego materiału liniowo sprężystego umieszczony został w nieodkształcalnym korytku i poddany został naprężeniu ściskającemu p , jak to przedstawiono na rysunku. Wyznaczyć stan naprężenia i odkształcenia wewnątrz bloku, wymiary geometryczne po deformacji, dylatację (I niezmiennik stanu odkształcenia) oraz rzeczywistą względną zmianę objętości. Wyznaczyć ekstremalne naprężenia styczne. Założyć, że tarcie między ściankami bloku i korytka jest pomijalnie małe. Przyjąć:

$$a = 10 \text{ mm}, \quad b = 15 \text{ mm}, \quad c = 6 \text{ mm}$$

$$\text{Moduł Younga:} \quad E = 70 \text{ GPa}$$

$$\text{Współczynnik Poissona:} \quad \nu = 0,35$$

$$\text{Gęstość obciążenia:} \quad p = 180 \text{ MPa}$$



Z warunków zadania otrzymujemy:

- Brak więzów ograniczających ruch na kierunku x i równomiernie rozłożone obciążenie ściskające na przeciwległych ściankach prostopadłych do x : $\sigma_{xx} = -p$, $\epsilon_{xx} \neq 0$
- Brak obciążenia i swobodne przemieszczanie się na kierunku z : $\sigma_{zz} = 0$, $\epsilon_{zz} \neq 0$
- Odkształcenie na kierunku y zablokowane przez ścianki nieodkształcalnego korytka, na których powstają siły reakcji generujące naprężenie ściskające σ_{yy} : $\epsilon_{yy} = 0$, $\sigma_{yy} \neq 0$
- Brak tarcia \rightarrow brak naprężeń stycznych $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0$ skąd (na podstawie prawa Hooke'a) $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{xy} = 0$.

Znając naprężenia normalne σ_{xx} i σ_{zz} oraz odkształcenie ϵ_{yy} , nieznane naprężenie σ_{yy} , jakie powstaje wskutek oporu, jaki stawiają rozszerzającemu się poprzecznie wskutek ściskania blokowi ścianki sztywnego korytka, obliczyć możemy na podstawie uogólnionego prawa Hooke'a dla ciała izotropowego:

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \quad \Rightarrow \quad \sigma_{yy} = [E \epsilon_{yy} + \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] = -\nu p = -63 \text{ MPa}$$

W ten sposób znane są już wszystkie składowe tensora naprężenia:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \text{sym} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -\nu p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180 & 0 & 0 \\ 0 & -63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

Tensor naprężenia jest w postaci diagonalnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest opisany w układzie swoich osi własnych. Wyznaczone naprężenia są zatem naprężeniami głównymi. Na tej podstawie wyznaczamy ekstremalne naprężenia styczne:

$$\sigma_{max} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = -180 \text{ MPa}$$

$$|\tau_{max}| = \frac{|\sigma_{max} - \sigma_{min}|}{2} = 90 \text{ MPa}$$

Nieznane odkształcenia liniowe ε_{xx} i ε_{zz} wyznaczamy na podstawie związków prawa Hooke'a:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{p}{E} (\nu^2 - 1) = -2,256\%$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{p}{E} \nu(\nu + 1) = 1,215\%$$

Tensor odkształcenia:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sym} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{E} (\nu^2 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{E} \nu(\nu + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,256 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,215 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad [-]$$

Wymiary bloku w konfiguracji aktualnej (odkształconej)

$$a' = a + a \varepsilon_{yy} = a(1 + \varepsilon_{yy}) = a = 10 \text{ mm}$$

$$b' = b + b \varepsilon_{zz} = b(1 + \varepsilon_{zz}) = 14,96616 \text{ mm}$$

$$c' = c + c \varepsilon_{xx} = c(1 + \varepsilon_{xx}) = 6,00729 \text{ mm}$$

Objętość początkowa: $V = abc = 900 \text{ mm}^3$

Objętość po deformacji: $V' = a' b' c' = 899,0606 \text{ mm}^3$

Rzeczywista względna zmiana objętości: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = -1,044\%$

Porównanie z dylatacją, I niezmiennikiem stanu odkształcenia:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{V' - V}{V} = \frac{a' b' c' - abc}{abc} = \frac{a(1 + \varepsilon_{xx}) b(1 + \varepsilon_{yy}) c(1 + \varepsilon_{zz}) - abc}{abc} = \\ &= (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - 1 = \underbrace{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}_{\theta} + \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} = \\ &= -1,041\% - 0,00274\% = -1,044\% \end{aligned}$$

Dylatacja:

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = -1,041\%$$