NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

Naprężenie normalne: $\sigma = \dfrac{N}{A}$

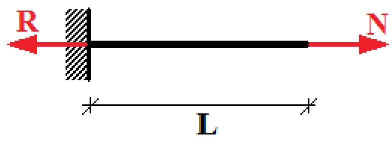
Odkształcenie liniowe: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{N}{EA}$

Całkowite wydłużenie pręta utwierdzonego jednostronnie z przedziałami stałym rozkładem siły osiowej oraz przedziałami stałą sztywnością na rozciąganie:

$$\Delta L = \int_0^L \varepsilon\, dx = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \sum \frac{N_i L_i}{EA_i}$$

ZADANIE 8.1

Wyznaczyć naprężenia rozciągające, przemieszczenie oraz całkowite i względne wydłużenie pręta o przekroju kwadratowym o boku a = 1cm, rozciąganego siłą N = 1 kN.



Materiał – miedź:
Moduł Younga: $E = 120\,\mathrm{GPa}$
Granica plastyczności: $f_d = 70\,\mathrm{MPa}$

Pręt:
długość pręta: $L = 2\,\mathrm{m}$
pole przekroju: $A = a^2 = 1\,\mathrm{cm}^2$

Z równania równowagi (sumy rzutów sił na oś X) znajdujemy reakcję podporową R:
$$\sum X = -R + N = 0 \quad \Rightarrow \quad R = N$$

STAN GRANICZNY NOŚNOŚCI – warunek wytrzymałości:

Dokonując cięcia w punkcie o współrzędnej x wyznaczamy siłę osiową: $N(x) = N$

Naprężenie: $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{1\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 1\cdot 10^7\,\mathrm{Pa} = 10\,\mathrm{MPa} < f_d$

Warunek nośności: $\dfrac{\sigma}{f_d}\cdot 100\,\% \approx 14{,}3\,\%$

STAN GRANICZNY UŻYTKOWALNOŚCI – warunek sztywności:

Odkształcenie: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{N}{EA} = \dfrac{10\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}}{120\cdot 10^9\,\mathrm{Pa}} \approx 0{,}0000833$

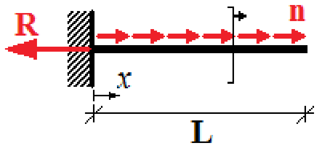
Przemieszczenie: $u(x) = \int \varepsilon\, dx + C = \int \dfrac{N}{EA} dx = \dfrac{N\,x}{E\,A} + C$

Z warunków brzegowych (podporowych) znajdujemy wartość stałej całkowania C:
$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = C = 0$$

Wydłużenie całkowite (całkowite przemieszczenie końca pręta):
$$\Delta L = u(L) = \frac{NL}{EA} = \frac{1\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 2\,\mathrm{m}}{120\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-4}} \approx 0{,}000167\,\mathrm{m} = 0{,}167\,\mathrm{mm}$$

Wydłużenie względne pręta:
$$\frac{\Delta L}{L}\cdot 100\,\% = \frac{N}{EA}\cdot 100\,\% = 0{,}00833\,\%$$

ZADANIE 8.2



Wyznaczyć maksymalne naprężenie rozciągające oraz wydłużenie całkowite w pręcie kołowym utwierdzonym i obciążonym równomiernym obciążeniem rozciągającym o gęstości n.

Dane:

Materiał: **drewno sosnowe** (obciążone wzdłuż włókien)

Moduł Younga: $E = 9\,\text{GPa}$

Wytrzymałość na rozciąganie: $f_d = 40\,\text{MPa}$

Średnica pręta: $D = 10\,\text{cm}$ Pole przekroju: $A = \dfrac{\pi D^2}{4} = 78{,}540\,\text{cm}^2$

Długość pręta: $L = 3\,\text{m}$

Obciążenie: $n = 30\,\text{kN/m}$

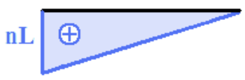
Z równania równowagi sumy rzutów sił na oś X znajdujemy reakcję podporową R:

$$\sum X = -R + n\cdot L = 0 \quad \Rightarrow \quad R = nL$$

STAN GRANICZNY NOŚNOŚCI – warunek wytrzymałości:

Dokonując cięcia w dowolnym punkcie pręta o współrzędnej X wyznaczamy siłę osiową:

$$N(x) = n(L-x)$$



Naprężenie: $$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{n(L-x)}{A}$$

Maksymalna siła rozciągająca występuje w przekroju utwierdzenia: $N_{max} = N(x=0)$

Maksymalne naprężenie: $$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{30\cdot 10^3\,\text{N/m}\cdot 3\,\text{m}}{78{,}540\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 11{,}459\,\text{MPa}$$

Warunek nośności: $$\frac{\sigma_{max}}{f_d}\cdot 100\,\% \approx 28{,}6\,\%$$

STAN GRANICZNY UŻYTKOWALNOŚCI – warunek sztywności:

Odkształcenie: $$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EA} = \frac{n(L-x)}{EA}$$

Przemieszczenie:

$$u(x) = \int \varepsilon\, dx + C = \int \frac{n(L-x)}{EA}\, dx = \frac{n}{EA}\left[Lx - \frac{x^2}{2}\right] + C$$

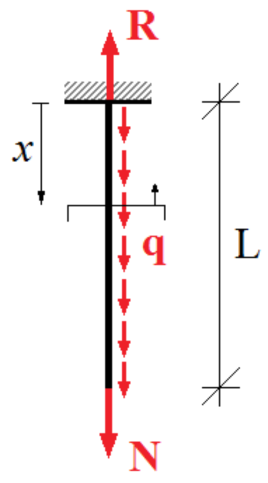
Z warunków brzegowych (podporowych) znajdujemy wartość stałej całkowania C:

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = C = 0$$

Wydłużenie całkowite (całkowite przemieszczenie końca pręta):

$$\Delta L = u(L) = \frac{n}{EA}\left[L^2 - \frac{L^2}{2}\right] = \frac{nL^2}{2EA} = \frac{30\cdot 10^3\,\text{N/m}\cdot 3^2\,\text{m}^2}{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 78{,}540\cdot 10^{-4}} \approx 0{,}00191\,\text{m} = 1{,}91\,\text{mm}$$

ZADANIE 8.3
Wyznaczyć naprężenia maksymalne oraz całkowite wydłużenie pręta jak na rysunku.

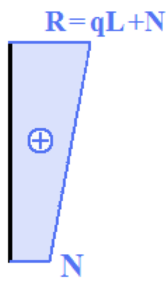


Dane:
Materiał – stal konstrukcyjna St3S:
Wytrzymałość obliczeniowa: $f_d = 215$ MPa
Moduł Younga: $E = 210$ GPa

Długość pręta: $L = 1$ m
Średnica pręta: $D = 2$ cm
Pole przekroju poprzecznego $A = \frac{\pi D^2}{4} \approx 3{,}141$ cm^2

obciążenie – 5096,8 kg skupione, 1019,4 kg rozłożone równomiernie:
Siła skupiona: $N = 50$ kN
Obciążenie ciągłe: $q = 10$ kN/m

STAN GRANICZNY NOŚNOŚCI:



Reakcja utwierdzenia: $R = N + qL$
Siła osiowa w przekroju o współrzędnej x: $N(x) = R - qx = N + q(L-x)$
Naprężenie w punkcie x: $\sigma(x) = \frac{N}{A} = \frac{1}{A}[N + q(L-x)]$
Odkształcenie w punkcie x: $\varepsilon(x) = \frac{\sigma}{E} = \frac{1}{EA}[N + q(L-x)]$

Maksymalne naprężenie występuje w przekroju utwierdzenia:

$$\sigma_{max} = \sigma|_{x=0} = \frac{R}{A} = \frac{N+qL}{A} = \frac{50\cdot 10^3\,\mathrm{N} + 10\cdot 10^3\,\mathrm{N/m}\cdot 1\,\mathrm{m}}{3{,}141\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 191 \quad \mathrm{MPa}$$

Warunek nośności: $\sigma_{max} < f_d$ $\qquad \frac{\sigma_{max}}{f_d} = 88{,}8\,\%$

STAN GRANICZNY UŻYTKOWALNOŚCI:
Przemieszczenie punktów pręta:

$$u(x) = \int \varepsilon(x)\,dx + C = \frac{1}{EA}\int [N + q(L-x)]\,dx = \frac{1}{EA}\left[N x + q\left(L x - \frac{x^2}{2}\right)\right] + C$$

Z warunku brzegowego: $u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Przemieszczenie końca pręta:

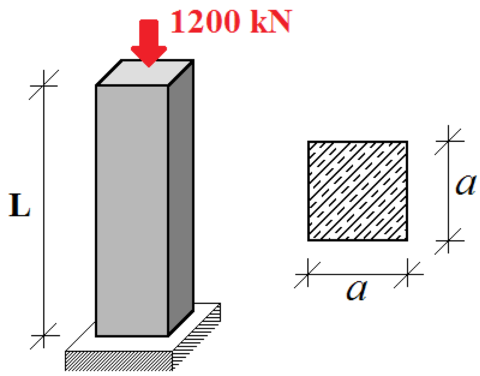
$$u(L) = \frac{NL + \frac{1}{2}qL^2}{EA} = \frac{50\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 1\,\mathrm{m} + 0{,}5\cdot 10\cdot 10^3\,\mathrm{N/m}\cdot 1^2\,\mathrm{m}^2}{210\cdot 10^9\,\mathrm{Pa}\cdot 3{,}141\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 0{,}834\,\mathrm{mm}$$

Wydłużenie względne $\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{u(L)}{L} = 0{,}0834\,\%$

Odkształcenie maksymalne $\varepsilon_{max} = \varepsilon|_{x=0} = \frac{\sigma_{max}}{E} = 0{,}091\,\%$

ZADANIE 8.4

Wyznaczyć minimalne wymiary słupa o wysokości L = 3m o przekroju kwadratowym, obciążonego siłą osiową P = 1200 kN, wykonanego z betonu klasy C30/37 i module Younga $E = 32$ GPa, jeśli dopuszczalne przemieszczenie pionowe wynosi 1,5 mm. Uwzględnić ciężar własny słupa, równy $\gamma = 25\ \text{kN/m}^3$. Cząstkowy współczynnik bezpieczeństwa $\gamma_m = 1{,}2$.



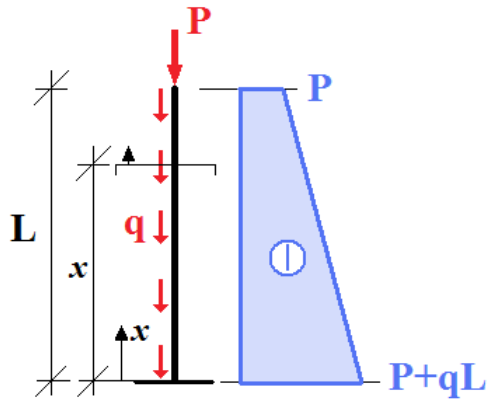
Ciężar własny opisać można obciążeniem pionowym rozłożonym równomiernie po wysokości słupa. Gęstość liniowa tego obciążenia jest równa ciężarowi objętościowemu przemnożonemu przez pole przekroju poprzecznego:

$$q = \gamma \cdot A = \gamma \cdot a^2$$

Rozkład siły osiowej: $N(x) = -P - q(L-x)$

Rozkład naprężeń: $\sigma(x) = \dfrac{N(x)}{A} = -\dfrac{P+q(L-x)}{A}$

Rozkład odkształceń: $\varepsilon(x) = \dfrac{\sigma(x)}{E} = -\dfrac{P+q(L-x)}{EA}$



Warunek nośności:

Maksymalne naprężenie występuje w przekroju utwierdzenia na dole słupa:

$$|\sigma_{max}| = \frac{P+qL}{A} = \frac{P+\gamma a^2 L}{a^2} \leqslant f_{cd} \quad \Rightarrow \quad a \geqslant \sqrt{\frac{P}{f_{cd} - \gamma L}} = 20\,\text{cm}$$

Warunek użytkowalności:

Rozkład przemieszczeń

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x)\,dx = -\int_0^x \frac{P+q(L-x)}{EA}\,dx = -\frac{1}{EA}\left[Px + q\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)\right] + C$$

Z warunku brzegowego: $u(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C=0$

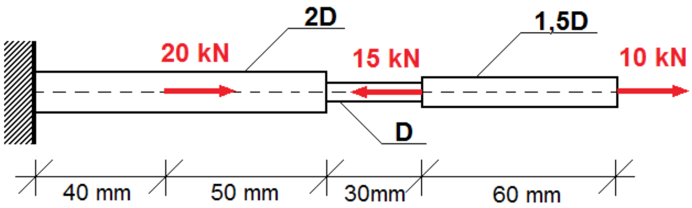
Przemieszczenie końca słupa

$$u(L) = \frac{PL + \frac{1}{2}qL^2}{EA} = \frac{2PL + \gamma a^2 L^2}{2Ea^2} \leqslant u_{dop} \quad \Rightarrow \quad a \geqslant \sqrt{\frac{2PL}{2Eu_{dop} - \gamma L^2}} = 27\,\text{cm}$$

Minimalny wymiar krawędzie przekroju poprzecznego jest równy 27cm.

ZADANIE 8.5

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych oraz rozkład przemieszczeń podłużnych w pręcie o zmiennej średnicy jak na rysunku poniżej. Dobrać minimalną średnicę porównawczą D pręta, jeśli wytrzymałość na rozciąganie $k_r = 200\ \mathrm{MPa}$, moduł Younga $E = 200\ \mathrm{GPa}$, zaś maksymalne dopuszczalne wydłużenie wynosi $u_{dop} = 0{,}1\ \mathrm{mm}$.



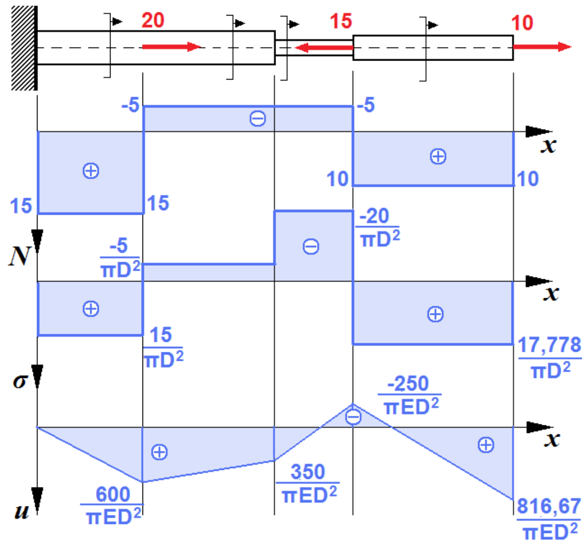
Pola przekrojów na poszczególnych odcinkach wyrażamy przez średnicę porównawczą D:

$$L_1 = 40\,\mathrm{mm} \qquad A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi (2D)^2}{4} = \pi D^2$$

$$L_2 = 50\,\mathrm{mm} \qquad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi (2D)^2}{4} = \pi D^2$$

$$L_3 = 30\,\mathrm{mm} \qquad A_3 = \frac{\pi D_3^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} = 0.25\pi D^2$$

$$L_4 = 60\,\mathrm{mm} \qquad A_4 = \frac{\pi D_4^2}{4} = \frac{\pi (1{,}5D)^2}{4} = 0{,}5625\pi D^2$$



Rozkład sił osiowych:

$$AB:\ x\in(0\ ;\ 0{,}04) \ \Rightarrow\ N(x) = N_1 = 20-15+10 = 15\ \ [\mathrm{kN}]$$
$$BC:\ x\in(0{,}04\ ;\ 0{,}09) \ \Rightarrow\ N(x) = N_2 = -15+10 = -5\ \ [\mathrm{kN}]$$
$$CD:\ x\in(0{,}09\ ;\ 0{,}12) \ \Rightarrow\ N(x) = N_3 = -15+10 = -5\ \ [\mathrm{kN}]$$
$$DE:\ x\in(0{,}12\ ;\ 0{,}18) \ \Rightarrow\ N(x) = N_4 = 10\ \ [\mathrm{kN}]$$

Warunek wytrzymałości:

Rozkład naprężeń:

$$AB:\ \sigma_1 = N_1/A_1 = 15\cdot 10^3/(\pi D^2)$$
$$BC:\ \sigma_2 = N_2/A_2 = -5\cdot 10^3/(\pi D^2)$$
$$CD:\ \sigma_3 = N_3/A_3 = -20\cdot 10^3/(\pi D^2)$$
$$DE:\ \sigma_4 = N_4/A_4 = 17{,}778\cdot 10^3/(\pi D^2)$$

$$\Rightarrow\quad |\sigma_{max}| = \frac{20}{\pi D^2} \leqslant k_r \quad\Rightarrow\quad D \geqslant \sqrt{\frac{20\cdot 10^3}{\pi k_r}} = 5{,}642\,\mathrm{mm}$$

Warunek sztywności:

W dalszej kolejności należy dobrać średnicę z uwagi na konieczność ograniczenia wydłużenia pręta do wartości dopuszczalnej. Całość wyników wygodnie jest notować na bieżąco w tabelce:

	$L_i\ [\mathrm{m}]$	$A_i\ [\mathrm{m}^2]$	$N_i\ [\mathrm{N}]$	$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}\ [\mathrm{Pa}]$	$\Delta u_i = \frac{N_i L_i}{EA_i}\ [\mathrm{m}]$
$AB: x\in(0\ ;\ 0{,}04)$	0,04	πD^2	15000	$15000/(\pi D^2)$	$600/(\pi E D^2)$
$BC: x\in(0{,}04\ ;\ 0{,}09)$	0,05	πD^2	-5000	$-5000/(\pi D^2)$	$-250/(\pi E D^2)$
$CD: x\in(0{,}09\ ;\ 0{,}12)$	0,03	$0{,}25\pi D^2$	-5000	$-20000/(\pi D^2)$	$-600/(\pi E D^2)$
$DE: x\in(0{,}12\ ;\ 0{,}18)$	0,06	$0{,}5625\pi D^2$	10000	$17778/(\pi D^2)$	$1066{,}68/(\pi E D^2)$

Wydłużenie pręta – naprężenia (a więc i odkształcenia) są przedziałami stałe, zatem funkcja rozkładu przemieszczenia, będąca całką z odkształceń, musi być przedziałami liniowo zmienna. Wystarczy zatem znaleźć przemieszczenia na granicach przedziałów:

$$u_B=\frac{N_1 L_1}{E A_1}=\frac{600}{\pi E D^2}$$

$$u_C=\sum_{i=1}^{2}\frac{N_i L_i}{EA_i}=u_B+\frac{N_2 L_2}{E A_2}=\frac{350}{\pi E D^2}$$

$$u_D=\sum_{i=1}^{3}\frac{N_i L_i}{EA_i}=u_C+\frac{N_3 L_3}{E A_3}=-\frac{250}{\pi E D^2}$$

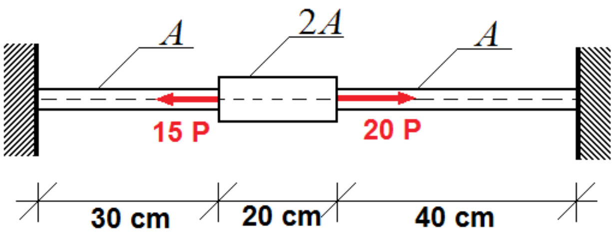
$$u_E=\sum_{i=1}^{4}\frac{N_i L_i}{EA_i}=u_D+\frac{N_4 L_4}{E A_4}=\frac{816{,}67}{\pi E D^2}$$

$$|u_{max}|=\frac{816{,}67}{\pi E D^2}\leqslant u_{dop}\quad\Rightarrow\quad D\geqslant\sqrt{\frac{816{,}67}{\pi E u_{dop}}}=3{,}65\,\mathrm{mm}$$

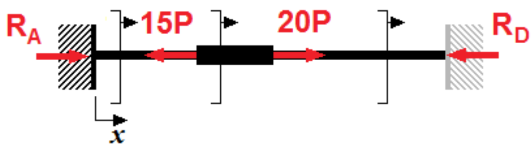
Przyjęto minimalną średnicę porównawczą $D=6$ mm .

ZADANIE 8.6

Wyznaczyć rozkład sił osiowych i naprężeń normalnych w statycznie niewyznaczalnym pręcie rozciąganym jak na rysunku. Dobrać maksymalną wartość parametru obciążenia P, jeśli wytrzymałość na rozciąganie $k_r=200$ MPa , zaś porównawcze pole przekroju $A=10$ cm^2 .



Zadanie statycznie niewyznaczalne – w obydwu utwierdzenia występują siły reakcji – równania statyki dla zagadnienia rozciągania dostarczają zaś tylko jednego równania równowagi. Dwie nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z dodatkowego warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń na podporach. Nieznana siła reakcji wyznaczona być może z warunku zerowania się przemieszczenia końca pręta po oswobodzeniu jednego z jego końców i zastąpieniu np. prawego utwierdzenia nieznaną siłą reakcji.



Rozkład sił osiowych:

$$N(x)=\begin{cases} AB: & x\in(0\ ;\ 0{,}3) & N_1=-15P+20P-R_D \\ BC: & x\in(0{,}3\ ;\ 0{,}5) & N_2=20P-R_D \\ CD: & x\in(0{,}5\ ;\ 0{,}9) & N_3=-R_D \end{cases}$$

Całkowite przemieszczenie oswobodzonego końca pręta

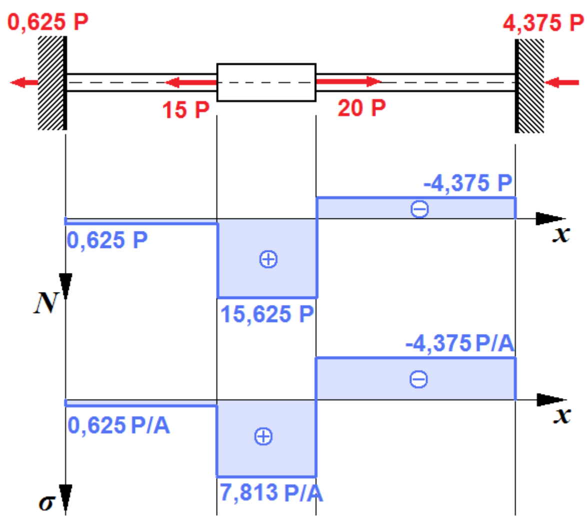
$$\Delta L=\sum_i \frac{N_i L_i}{E A_i}=\frac{(-R_D+20P-15P)\cdot 0{,}3}{EA}+\frac{(-R_D+20P)\cdot 0{,}2}{2\,EA}+\frac{(-R_D)\cdot 0{,}4}{EA}=0$$

$$\frac{1}{EA}\left[-R_D\left(0{,}3+0{,}2\cdot\frac{1}{2}+0{,}4\right)+(20-15)P\cdot 0{,}3+20P\cdot 0{,}2\cdot\frac{1}{2}\right]=0 \quad\Rightarrow\quad R_D=4{,}375\ \ [\mathrm{kN}]$$

Z równania równowagi – sumy rzutów sił na oś x – otrzymujemy:

$$\Sigma X = R_A-15P+20P-R_D=0 \quad\Rightarrow\quad R_A=-0{,}625\,P$$

Rozkład sił osiowych i naprężeń normalnych:



$$N(x)=\begin{cases} AB: & N_1=0{,}625\,P \\ BC: & N_2=15{,}625\,P \\ CD: & N_3=-4{,}375\,P \end{cases}$$

$$\sigma(x)=\begin{cases} AB: & \sigma_1=0{,}625\,P/A \\ BC: & \sigma_2=7{,}813\,P/A \\ CD: & \sigma_3=-4{,}375\,P/A \end{cases}$$

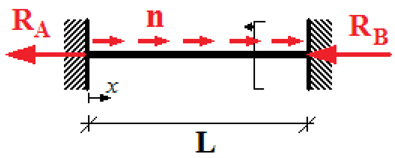
	L_i [m]	A_i [m^2]	N_i [N]	$\sigma_i=\frac{N_i}{A_i}$ [Pa]
$AB: x\in(0\ ;\ 0{,}03)$	0,03	$A=10\cdot 10^{-4}$	0,625 P	0,625 P/A
$BC: x\in(0{,}03\ ;\ 0{,}05)$	0,02	$2A=20\cdot 10^{-4}$	15,625 P	7,813 P/A
$CD: x\in(0{,}05\ ;\ 0{,}09)$	0,04	$A=10\cdot 10^{-4}$	-4,375 P	-4,375 P/A

Z warunku wytrzymałości:

$$|\sigma_{max}|\leqslant k_r \quad\Rightarrow\quad P\leqslant\frac{A\,k_r}{7{,}813}=25{,}60\ \mathrm{kN}$$

ZADANIE 8.7

Wyznaczyć maksymalne naprężenie w równomiernie obciążonym pręcie obustronnie utwierdzonym.



Zadanie statycznie niewyznaczalne – nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń w punktach $x = 0$ i $x = L$ po zastąpieniu jednej z podpór nieznaną siłą reakcji.

Dane:

Materiał – stal konstrukcyjna St3S

Moduł Younga: $E = 210\,\mathrm{GPa}$

Gr. plastyczności: $f_d = 215\,\mathrm{MPa}$

Profil HEB 100

Pole przekroju: $A = 26\,\mathrm{cm}^2$

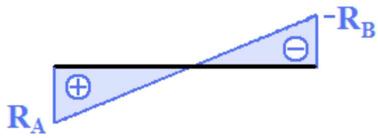
Długość pręta: $L = 2\,\mathrm{m}$

Obciążenie:

Siła: $N = 20\,\mathrm{kN}$

Z równania równowagi: $\sum X = 0 \;\Rightarrow\; n L - R_A - R_B = 0 \;\Rightarrow\; R_B = n L - R_A$

Rozkład sił osiowych: $N(x) = R_A - n x$



Rozkład naprężeń: $\sigma(x) = \dfrac{N}{A} = \dfrac{R_A - nx}{A}$

Rozkład odkształceń: $\varepsilon(x) = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{R_A - n x}{EA}$

Rozkład przemieszczeń:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon \,\mathrm{d}x + C = \frac{1}{EA}\int_0^x R_A - nx \,\mathrm{d}x + C = \frac{1}{EA}\left[R_A x - \frac{n x^2}{2}\right] + C$$

Stałą całkowania wyznaczamy z warunku zerowania się przemieszczeń w punkcie $x = 0$:

$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

Przemieszczenie końca pręta $u(L) = 0$:

$$u(L) = \frac{1}{EA}\left[R_A L - \frac{n L^2}{2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{n L}{2} = 10\,\mathrm{kN}$$

Reakcja na drugiej podporze

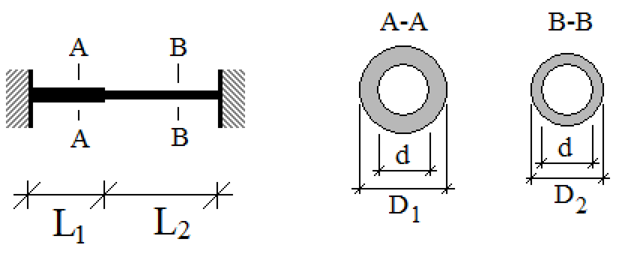
$$R_B = n L - R_A = \frac{n L}{2} = 10\,\mathrm{kN}$$

Naprężenia maksymalne: $\sigma_{max} = \dfrac{N_{max}}{A} = \dfrac{R_A}{A} = \dfrac{10\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{26\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 3{,}85\,\mathrm{MPa} < f_d$

ZADANIE 8.8

Wyznaczyć reakcje podporowe i naprężenia w pręcie rurowym, obustronnie utwierdzonym, ulegającym odkształceniu wskutek równomiernej zmiany temperatury.

E=const.



Dane:

Materiał – aluminium:

Obliczeniowa gr. plastyczności:

$f_d = 250 \quad \text{MPa}$

Moduł Younga:

$E = 70 \quad \text{GPa}$

Wsp. rozszerzalności cieplnej:

$\alpha = 2{,}31 \cdot 10^{-5} \quad \frac{1}{^\circ C}$

element – rura o zmiennym przekroju:

Długość odcinka 1: $L_1 = 20 \quad \text{cm}$

Długość odcinka 2: $L_2 = 30 \quad \text{cm}$

Długość całkowita: $L = L_1 + L_2 = 50 \quad \text{cm}$

Średnica wewnętrzna: $d = 18 \quad \text{mm}$

Średnica zewnętrzna – odcinek 1: $D_1 = 30 \quad \text{mm}$

Średnica zewnętrzna – odcinek 2: $D_2 = 25 \quad \text{mm}$

Pole przekroju – odcinek 1: $A_1 = \frac{\pi(D_1^2 - d^2)}{4} = 4{,}524 \quad \text{cm}^2$

Pole przekroju – odcinek 1: $A_2 = \frac{\pi(D_2^2 - d^2)}{4} = 2{,}364 \quad \text{cm}^2$

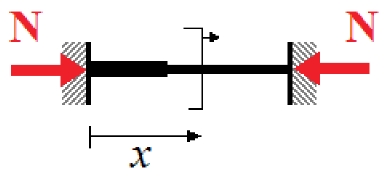
Obciążenie – równomierne podgrzanie:

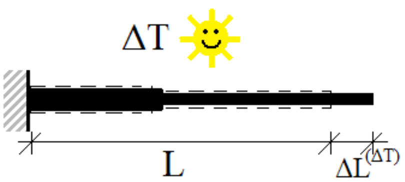
Zmiana temperatury: $\Delta T = 50^\circ C$

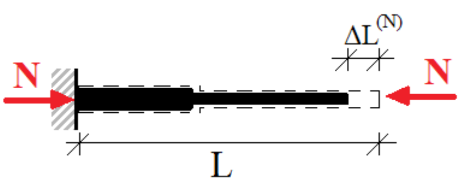
Zadanie statycznie niewyznaczalne – nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń w podporach. Z równania równowagi – sumy rzutów sił na oś x – wynika, że reakcja w lewej podporze jest przeciwna do reakcji w prawej podporze – obie oznaczymy symbolem N:

$$\sum X = 0: \quad N_A + N_B = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = -N_B = N$$

$$N(x) = N$$







Nieznana siła reakcji wyznaczona być może z warunku zerowania się przemieszczenia końca pręta od łączonego wpływu temperatury i siły osiowej po zastąpieniu np. prawego utwierdzenia nieznaną siłą reakcji N:

$$\Delta L^{(\Delta T)} = \Delta L^{(N)}$$

Wydłużenie pręta swobodnego od zmiany temperatury:

Odkształcenia termiczne: $\varepsilon^{(\Delta T)}(x) = \alpha \Delta T = 0{,}116\% = const.$

Wydłużenie całkowite pręta: $\Delta L^{(\Delta T)} = u^{(\Delta T)}(L) = \alpha \Delta T\, L = 0{,}58 \quad \mathrm{mm}$

Skrócenie pręta swobodnego od działania siły osiowej:

Rozkład sił osiowych: $N(x) = N$

Całkowite skrócenie pręta: $\Delta L^{(N)} = \dfrac{NL_1}{EA_1} + \dfrac{NL_2}{EA_2}$

Wyznaczenie reakcji podporowej:

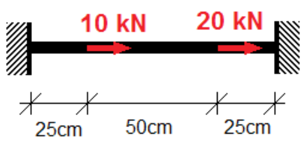
$$\Delta L^{(\Delta T)} + \Delta L^{(N)} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = -\frac{\Delta T\, \alpha\, E\, A_1 A_2 (L_1 + L_2)}{L_1 A_2 + L_2 A_1} = 23{,}625 \quad \mathrm{kN}$$

Naprężenia:
$$\sigma(x) = \begin{cases} \dfrac{N}{A_1} = 52 \quad \mathrm{MPa} & \Leftrightarrow \quad x \in (0, L_1) \\ \dfrac{N}{A_2} = 100 \quad \mathrm{MPa} & \Leftrightarrow \quad x \in (L_{1,} L_2) \end{cases}$$

Warunek nośności: $\sigma_{max} = 100 \quad \mathrm{MPa} < f_d \qquad \dfrac{\sigma_{max}}{f_d} = 40\%$

ZADANIE 8.9

Dobrać minimalne pole przekroju poprzecznego pręta obustronnie utwierdzonego jak na rysunku, obciążonego siłami osiowymi oraz poddanego równomiernemu ogrzaniu o $\Delta T = 80^{\circ}\mathrm{C}$.

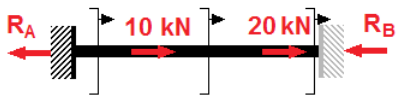


Materiał pręta: stal
- moduł Younga: $E = 210\ [\mathrm{GPa}]$
- wsp. rozszerzalności cieplnej: $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ [1/^{\circ}\mathrm{C}]$
- graniczne naprężenie normalne: $f_d = 215\ [\mathrm{MPa}]$

Zgodnie z zasadą superpozycji, zagadnienia obciążenia siłami oraz obciążenia termicznego możemy rozpatrywać osobno i uzyskane wyniki zsumować.

Obciążenie siłami osiowymi:

Reakcje podporowe wyznaczamy na podstawie warunku zerowania się przemieszczeń na podporach po zwolnieniu jednej z nich i zastąpieniu jej nieznaną reakcją podporową:



Rozkład siły osiowej:
$$N(x) = \begin{cases} x\in(0\ ;\ 0{,}25): & N_1 = 10+20-R_B = 30-R_B \\ x\in(0{,}25\ ;\ 0{,}75): & N_2 = 20-R_B \\ x\in(0{,}75\ ;\ 1): & N_3 = -R_B \end{cases}$$

Całkowite wydłużenie:
$$\Delta L^{(P)} = \sum_i \frac{N_i L_i}{E A_i} = \frac{1}{EA}\left[(30-R_B)\cdot 0{,}25+(20-R_B)\cdot 0{,}5+(-R_B)\cdot 0{,}25\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 17{,}5\ \ [\mathrm{kN}]$$

Z równania równowagi: $\Sigma X = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 10+20-R_B = 12{,}5$

Obciążenie termiczne:

Wydłużenie pręta wskutek zmiany temperatury: $\Delta L^{(T)} = \alpha\,\Delta T\, L$

Z równania równowagi wynika, że odkształcenia termiczna skutkują identycznymi co do znaku lecz przeciwnymi co do zwrotu reakcjami R_T na obu podporach. Skrócenie pręta wskutek działania nieznanej reakcji R_T :

$$\Delta L^{(R_T)} = -\frac{R_T L}{EA}$$

Z warunku zerowania się przemieszczeń na podporze:
$$\Delta L^{(T)}+\Delta L^{(R_T)}=0 \quad \Rightarrow \quad R_T = EA\,\alpha\,\Delta T \ = 201{,}6\cdot 10^{6}\cdot A \quad [\mathrm{N}]$$

Rozkład siły osiowej: $N(x) = -R_T = -201{,}6\cdot 10^{6}\cdot A$

Rozkład siły osiowej od łączonego wpływu sił osiowych i zmiany temperatury (z uwagi na obecność nieznanej wielości A najlepiej prowadzić obliczenia w jednostkach układu SI):

$$N(x)=\begin{cases} x\in(0\ ;\ 0{,}25): & N_1=12500-201{,}6\cdot 10^6\,A \\ x\in(0{,}25\ ;\ 0{,}75): & N_2=2500-201{,}6\cdot 10^6\,A \\ x\in(0{,}75\ ;\ 1): & N_3=-17500-201{,}6\cdot 10^6\,A \end{cases}\qquad [\mathrm{N}]$$

Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{A}=\begin{cases} x\in(0\ ;\ 0{,}25): & \sigma_1=\dfrac{12500}{A}-201{,}6\cdot 10^6 \\ x\in(0{,}25\ ;\ 0{,}75): & \sigma_2=\dfrac{2500}{A}-201{,}6\cdot 10^6 \\ x\in(0{,}75\ ;\ 1): & \sigma_3=-\dfrac{17500}{A}-201{,}6\cdot 10^6 \end{cases}\qquad [\mathrm{Pa}]$$

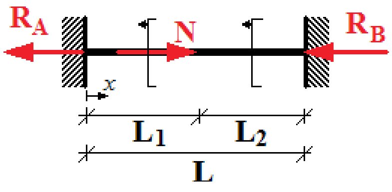
Ekstremalne naprężenie normalne występuje w ostatnim przedziale.

Z warunku wytrzymałości:

$$|\sigma_{max}|\leqslant f_d \quad\Rightarrow\quad A\geqslant\frac{17500}{f_d-201{,}6\cdot 10^6}=\frac{17500}{215\cdot 10^6-201{,}6\cdot 10^6}=13{,}06\cdot 10^{-4}\quad [\mathrm{m}^2]$$

Minimalne pole przekroju poprzecznego pręta wynosi $A_{min}=13{,}06\ \mathrm{cm}^2$.

ZADANIE 8.10



Wyznaczyć reakcje podporowe i naprężenia maksymalne w pręcie obustronnie utwierdzonym o profilu IPN 120, obciążonym niesymetrycznie osiową siłą skupioną.

Zadanie statycznie niewyznaczalne – nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń w punktach $x = 0$ i $x = L$ po zastąpieniu jednej z podpór nieznaną siłą reakcji.

Dane:

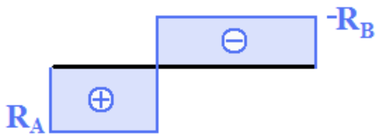
Materiał – stal konstrukcyjna St3S		**Profil IPN 120**	
Moduł Younga:	$E = 210\,\mathrm{GPa}$	Pole przekroju:	$A = 14{,}2\,\mathrm{cm}^2$
Gr. plastyczności:	$f_d = 215\,\mathrm{MPa}$	Długość pręta:	$L = 1\,\mathrm{m}$

Obciążenie:

Siła: $N = 20\,\mathrm{kN}$

Położenie: $L_1 = 40\,\mathrm{cm}$ $\quad L_2 = L - L_1 = 60\,\mathrm{cm}$

Rozkład sił osiowych: $$N(x) = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Rightarrow \quad R_A \\ x \in (L_1, L) & \Rightarrow \quad R_A - N = -R_B \end{cases}$$



Całkowite przemieszczenie końca swobodnego pręta:

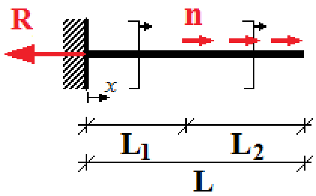
$$u(L) = \frac{N_1 L_1}{EA} + \frac{N_2 L_2}{EA} = \frac{R_A L_1}{EA} + \frac{(R_A - N) L_2}{EA} = \frac{1}{EA}\left[R_A L - N L_2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = N\frac{L_2}{L} = 12\,\mathrm{kN}$$

Reakcja na drugiej podporze wyznaczona z równania równowagi: $\sum X = 0 \ \Rightarrow \ N - R_A - R_B = 0$

$$R_B = N - R_A = N\left(1 - \frac{L_2}{L}\right) = N\frac{L - L_2}{L} = N\frac{L_1}{L} = 8\,\mathrm{kN}$$

Naprężenia maksymalne: $$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{R_A}{A} = \frac{12 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{14{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 8{,}45\,\mathrm{MPa} < f_d$$

ZADANIE 8.11



Obliczyć całkowite wydłużenie pręta o profilu IPE 100 obciążonego na części swojej długości obciążeniem równomiernie rozłożonym o gęstości *q*.

Dane:

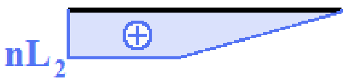
Materiał – stal konstrukcyjna St3S
Moduł Younga: $E = 210\,\mathrm{GPa}$
Gr. plastyczności: $f_d = 215\,\mathrm{MPa}$

Profil IPE 100
Pole przekroju: $A = 10{,}3\,\mathrm{cm}^2$
Długość pręta: $L = 2\,\mathrm{m}$

Obciążenie:
Siła: $n = 50\,\mathrm{kN/m}$
Położenie: $L_1 = 80\,\mathrm{cm}$ $\quad L_2 = L - L_1 = 120\,\mathrm{cm}$

Reakcja podporowa wyliczona z równania równowagi:
$$\sum X = 0 \quad \Rightarrow \quad n L_2 - R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = n L_2$$

Rozkład sił osiowych:
$$N(x) = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Rightarrow \quad n L_2 \\ x \in (L_1, L) & \Rightarrow \quad n(L - x) \end{cases}$$



Rozkład naprężeń:
$$\sigma(x) = \frac{N}{A} = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Rightarrow \quad \dfrac{n L_2}{A} \\ x \in (L_1, L) & \Rightarrow \quad \dfrac{n(L - x)}{A} \end{cases}$$

Rozkład odkształceń:
$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma}{E} = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Rightarrow \quad \dfrac{n L_2}{EA} \\ x \in (L_1, L) & \Rightarrow \quad \dfrac{n(L - x)}{EA} \end{cases}$$

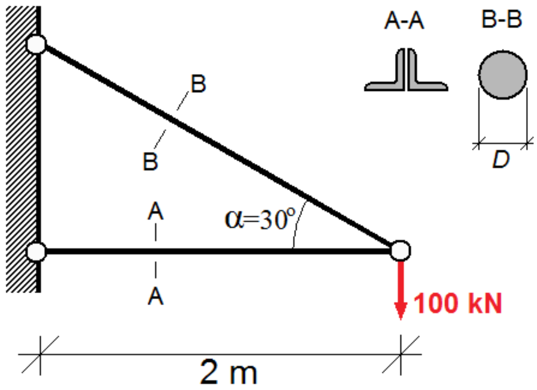
Rozkład przemieszczeń:
$$u(x) = \int_0^x \varepsilon \,\mathrm{d}x + C = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^x \frac{n L_2}{EA} \mathrm{d}x + C = \frac{n L_2}{EA} x + C \\ x \in (L_1, L) & \Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^{L_1} \frac{n L_2}{EA} \mathrm{d}x + \int_{L_1}^x \frac{n(L - x)}{EA} \mathrm{d}x + C = \frac{n L_2 L_1}{EA} + \frac{n}{EA}\left[L x - \frac{x^2}{2}\right]_{L_1}^x + C \end{cases}$$

Stałą całkowania wyznaczamy z warunku zerowania się przemieszczeń w punkcie $x = 0$:
$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Przemieszczenie końca pręta $u(L)$:
$$u(L) = \frac{n}{EA}\left[L_1 L_2 + \left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right) - \left(L L_1 - \frac{L_1^2}{2}\right)\right] = \frac{n}{2\,EA}(L^2 - L_1^2) =$$
$$= \frac{50 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m} \cdot (2^2\,\mathrm{m}^2 - 0{,}8^2\,\mathrm{m}^2)}{2 \cdot 210 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa} \cdot 10{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} \approx 0{,}39\,\mathrm{mm}$$

ZADANIE 8.12

Dana jest dźwigar wspornikowy zbudowany z belki o przekroju złożonym z dwóch kątowników równoramiennych oraz ze ściągu wykonanego z pręta o przekroju kołowym. Koniec tego wspornika obciążony jest siłą pionową P = 100 kN. Dobrać najmniejsze kątowniki przekroju belki oraz średnicę ściągu, dla których spełniony jest warunek nośności. Wyznaczyć przemieszczenie pionowe końca wspornika.



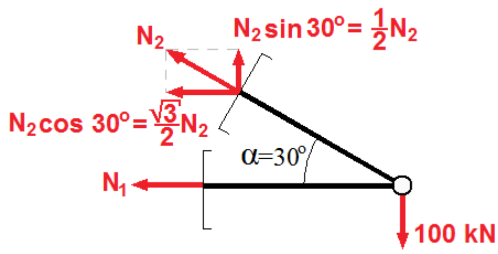
Materiał: stal

– moduł Younga: $E = 210$ GPa

– graniczne naprężenie normalne: $f_d = 205$ MPa

Zapisujemy równania równowagi dla nieskończenie małego otoczenia węzła, w którym łączą się obydwa pręty:

$$\begin{cases} \Sigma X = -N_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 = 0 \\ \Sigma Y = \frac{1}{2} N_2 - 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = -173{,}21 \\ N_2 = 200 \end{cases} \quad [\mathrm{kN}]$$



Z warunku wytrzymałości:

$$A_1 \geqslant \frac{N_1}{f_d} = 8{,}45 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Przyjęto: } \mathrm{L}\,45\times45\times7: \; 2A_L = 8{,}60 \text{ cm}^2$$

$$A_2 \geqslant \frac{N_2}{f_d} = 9{,}76 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad D_{min} = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = 35{,}25 \text{ mm}$$

$$\text{Przyjęto: } D = 36\,\text{mm}, \quad A_2 = \frac{\pi D^2}{4} = 10{,}18 \text{ cm}^2$$

Naprężenia:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -201{,}41 \text{ MPa}, \qquad \sigma_2 = \frac{4N_2}{\pi D^2} = 196{,}49 \text{ MPa}$$

Całkowite wydłużenie prętów:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E A_1} = \frac{-173{,}21 \cdot 10^3 \cdot 2}{210 \cdot 10^9 \cdot 8{,}60 \cdot 10^{-4}} = -1{,}918 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E A_2} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{210 \cdot 10^9 \cdot 10{,}18 \cdot 10^{-4}} = 2{,}161 \text{ mm}$$

Wyznaczenie planu przemieszczeń

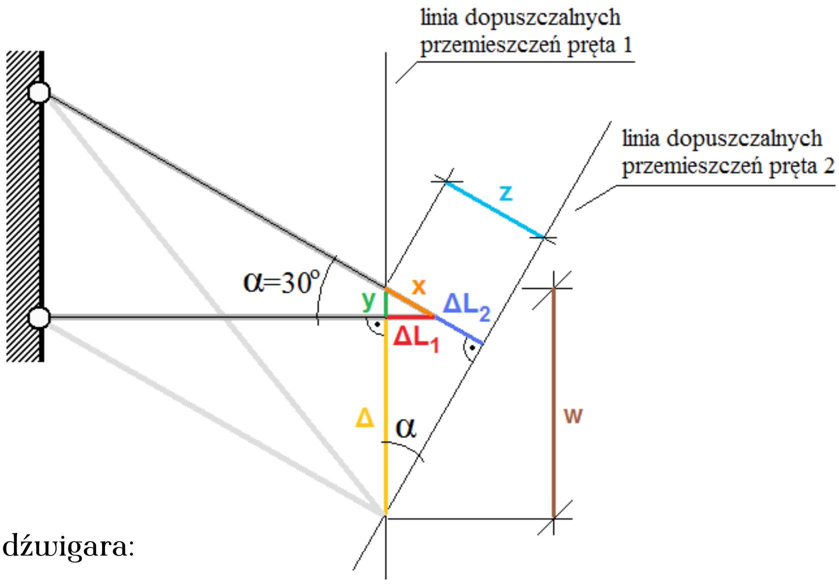
Przyjmujemy, że wydłużone i skrócone pręty mogą ulec jedynie obrotowi wokół punktów podparcia przegubowego. Dozwolone przemieszczenia (przy założeniu, że są małe) są wtedy prostopadłe do osi prętów. Przemieszczenie rzeczywiste jest przemieszczeniem dozwolonym dla każdego z prętów – leży na przecięciu się linii dopuszczalnych przemieszczeń obu prętów.

$$x = \frac{1}{\cos 30^\circ} \cdot |\Delta L_1| = 2{,}215 \text{ mm}$$

$$y = \mathrm{tg}\, 30^\circ \cdot |\Delta L_1| = 1{,}107 \text{ mm}$$

$$z = x + |\Delta L_2| = 4{,}376 \text{ mm}$$

$$w = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot z = 8{,}752 \text{ mm}$$



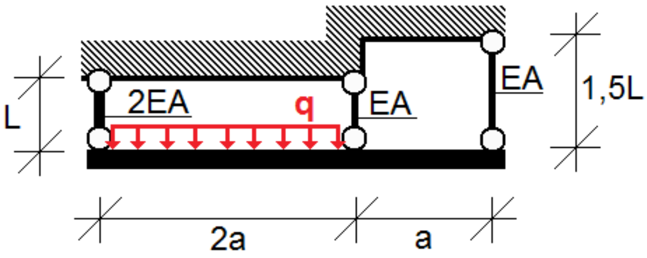
Całkowite ugięcie pionowe węzła dźwigara:
$\Delta = w - y = 7{,}645$ mm

ZADANIE 8.13

Dana jest nieodkształcalna belka zawieszona na trzech prętach i obciążona jak na rysunku. Sprawdzić warunek nośności tej konstrukcji.

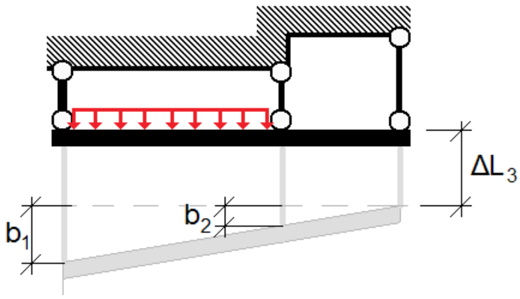
$E = 210$ GPa
$A = 10$ cm^2
$L_1 = 1$ m $\quad A_1 = 2A = 20$ cm^2
$L_2 = 1$ m $\quad A_2 = A = 10$ cm^2
$L_3 = 1{,}5$ m $\quad A_3 = A = 10$ cm^2

$q = 2$ kN/m $\quad a = 1$ m



Zadanie statycznie niewyznaczalne – warunki równowagi układu sił poprzecznych przyłożonych do belki dostarczają dwóch równań wobec trzech nieznanych sił osiowych należących do tego układu. Konieczne jest wyznaczenie planu przemieszczeń i określenie wydłużeń prętów, celem wyznaczenia obecnych w nich sił.

Nieodkształcalna belka pod wpływem zadanego obciążenia może przemieścić się w dół oraz obrócić. Przyjmujemy plan przemieszczeń jak na rysunku obok. Prawdziwe są następujące zależności geometryczne:

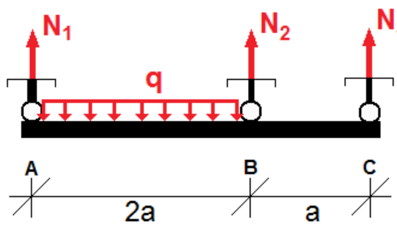


$$\begin{cases} \Delta L_1 = \Delta L_3 + b_1 \\ \Delta L_2 = \Delta L_3 + b_2 \end{cases}$$

$$\frac{b_2}{a} = \frac{b_1}{3a} \quad \Rightarrow \quad b_1 = 3b_2$$

Siły w prętach:

$$N_i = \frac{\Delta L_i}{L_i} E A_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\Delta L_1}{L_1} E A_1 = \dfrac{(\Delta L_3 + 3b_2)}{L} \cdot E \cdot 2A \\ N_2 = \dfrac{\Delta L_2}{L_2} E A_2 = \dfrac{(\Delta L_3 + b_2)}{L} \cdot E \cdot A \\ N_3 = \dfrac{\Delta L_3}{L_3} E A_3 = \dfrac{\Delta L_3}{1{,}5L} \cdot E \cdot A \end{cases}$$



Równania równowagi:

$$\begin{cases} \Sigma M_A = -2a \cdot q \cdot a + 2a \cdot N_2 + 3a \cdot N_1 = 0 \\ \Sigma Y = N_1 + N_2 + N_3 - q \cdot 2a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2qa^2 + 2a \cdot \dfrac{EA}{L}(\Delta L_3 + b_2) + 3a \cdot \dfrac{EA}{1{,}5L} \Delta L_3 = 0 \\ \dfrac{2EA}{L}(\Delta L_3 + 3b_2) + \dfrac{EA}{L}(\Delta L_3 + b_2) + \dfrac{EA}{1{,}5L} \Delta L_3 - 2qa = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta L_3 = \dfrac{15}{31} \dfrac{qaL}{EA} = 4{,}608 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ b_2 = \dfrac{1}{31} \dfrac{qaL}{EA} = 3{,}072 \cdot 10^{-7} \text{ m} \end{cases}$$

$$b_1 = 3b_2 = 9{,}217 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 + b_1 = 5{,}530 \cdot 10^{-6}\ \text{m}, \qquad N_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} E A_1 = 2{,}322\ \text{kN}, \qquad \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 1{,}161\ \text{MPa} \leqslant f_d$$

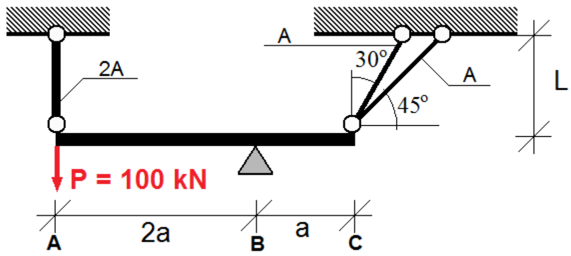
$$\Delta L_2 = \Delta L_3 + b_2 = 4{,}916 \cdot 10^{-6}\ \text{m}, \qquad N_2 = \frac{\Delta L_2}{L_2} E A_2 = 1{,}032\ \text{kN}, \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 1{,}032\ \text{MPa} \leqslant f_d$$

$$\Delta L_3 = 4{,}608 \cdot 10^{-6}\ \text{m}, \qquad N_3 = \frac{\Delta L_3}{L_3} E A_3 = 0{,}645\ \text{kN}, \qquad \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = 0{,}645\ \text{MPa} \leqslant f_d$$

Warunek nośności spełniony jest dla każdego z prętów.

ZADANIE 8.14

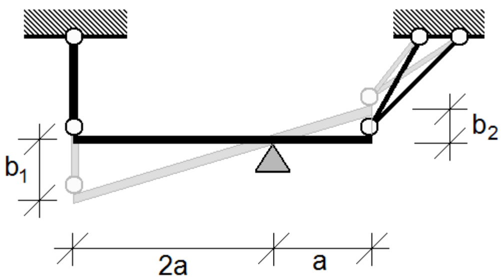
Dana jest nieodkształcalna belka, podparta przegubowo i zawieszona na trzech prętach o różnej średnicy, obciążona jak na rysunku. Dobrać minimalną średnicę prętów dla następujących danych:



$E = 70$ GPa $\qquad f_d = 130$ MPa
$a = 2$ m $\qquad L = 2$ m

$$L_1 = L = 2\ \text{m} \qquad L_2 = \frac{L}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} L = 2{,}309\ \text{m} \qquad L_3 = \frac{L}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} L = 2{,}828\ \text{m}$$

Zadanie statycznie niewyznaczalne – warunki równowagi dostarczają trzech równań wobec pięciu nieznanych (dwóch reakcji podporowych oraz trzech sił osiowych w prętach). Konieczne jest wyznaczenie planu przemieszczeń i określenie wydłużeń prętów, celem wyznaczenia obecnych w nich sił. Nieodkształcalna belka zamocowana przegubowo w punkcie B może ulec jedynie obrotowi wokół tego punktu. Przyjmujemy plan przemieszczeń jak na rysunku obok. Prawdziwe są następujące zależności geometryczne:

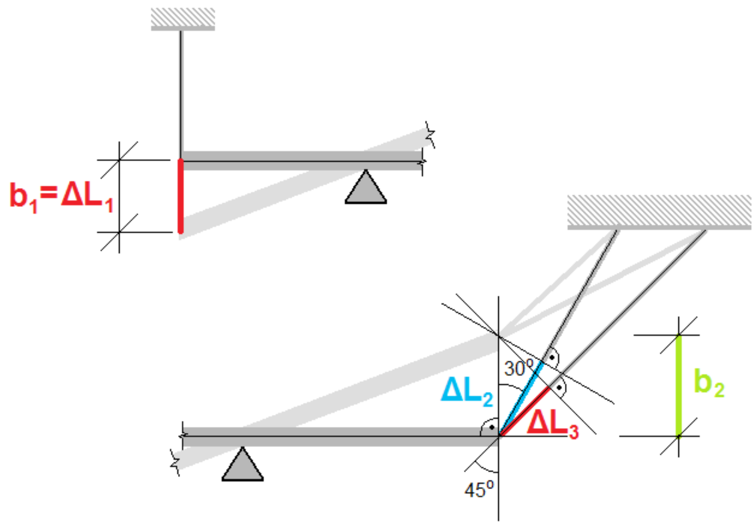


$$\frac{b_1}{2a} = -\frac{b_2}{a} \quad \Rightarrow \quad b_1 = -2 b_2$$

$$\Delta L_1 = b_1 = -2 b_2$$

$$\Delta L_2 = b_2 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} b_2$$

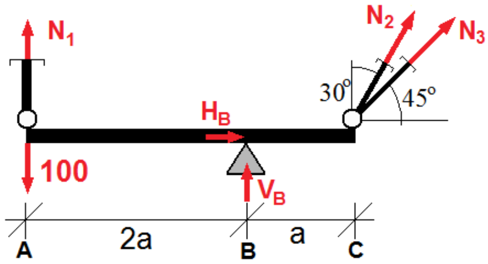
$$\Delta L_3 = b_2 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} b_2$$



Siły w prętach

$$N_i = \frac{\Delta L_i}{L_i} E A_i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\Delta L_1}{L_1} EA_1 = \dfrac{(-2 b_2)\cdot E\cdot 2A}{L} = -4\dfrac{b_2 EA}{L} = -16X \\ N_2 = \dfrac{\Delta L_2}{L_2} EA_2 = \dfrac{(\sqrt{3}/2) b_2\cdot EA}{(2/\sqrt{3}) L} = \dfrac{3}{4}\dfrac{b_2 EA}{L} = 3X \\ N_3 = \dfrac{\Delta L_3}{L_3} EA_3 = \dfrac{(\sqrt{2}/2) b_2\cdot EA}{\sqrt{2} L} = \dfrac{1}{2}\dfrac{b_2 EA}{L} = 2X \end{cases} \qquad \text{gdzie} \quad X = \frac{b_2 EA}{4L}$$

Wszystkie nieznane siły zależą od pojedynczego parametru X – do jego wyznaczenia wystarczy tylko jedno równanie. Spośród trzech równań równowagi wybieramy sumę momentów względem punktu B z uwagi na zerowanie się w tym puncie wpływu nieznanych reakcji podporowych:



$$\Sigma M_B = P\cdot 2a - N_1\cdot 2a + N_2 \cos 30^\circ\cdot a + N_3 \cos 45^\circ \cdot a = 0$$

$$100\cdot 10^3\cdot 2 - (-16X)\cdot 2 + 3X\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + 2X\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -5{,}554\cdot 10^3 \;\; [N]$$

$$N_1 = -16X = 88{,}859 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad A \geqslant \frac{1}{2}\frac{N_1}{f_d} = 3{,}42 \text{ cm}^2$$

$$N_2 = 3X = 16{,}661 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad A \geqslant \frac{N_2}{f_d} = 1{,}28 \text{ cm}^2$$

$$N_1 = 2X = 11{,}107 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad A \geqslant \frac{N_3}{f_d} = 0{,}854 \text{ cm}^2$$

Minimalne pole przekroju, dla którego spełniony jest warunek wytrzymałości jest równe $A_{min} = 3{,}42 \text{ cm}^2$.