NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

Całkowity kąt skręcenia pręta utwierdzonego jednostronnie z przedziałami stałym rozkładem momentu skręcającego oraz przedziałami stałą sztywnością skrętną:

$$\psi = \int_0^L \Theta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \frac{M_x(x)}{GI_x(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \frac{M_{xi} L_i}{G I_{xi}}$$

Skręcane prętów kołowych i rurowych:

	KOŁOWY:	RUROWY:
Stała skręcania (przekrój kołowy):	$I_x = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$
Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie:	$W_x = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$	$W_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16 D}$

Wypadkowe naprężenie styczne: $\tau_w = \frac{M_x}{I_x} r$

Maksymalne naprężenie styczne: $\tau_{max} = \frac{M_x^{max}}{I_x} R = \frac{M_x^{max}}{W_x}$

Skręcanie prętów prostokątnych:

Stała skręcania: $I_x = \beta\left(\frac{h}{b}\right) b^3 h$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie: $W_x = \alpha\left(\frac{h}{b}\right) b^2 h$

Maksymalne naprężenie styczne w przekroju: $\tau_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x}$

Maksymalne naprężenie w połowie krótszego boku: $\tau'_{max} = \frac{M_x b}{I_x} \delta\left(\frac{h}{b}\right)$

h/b	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5	4	5	6	8	10	∞
α(h/b)	0,2082	0,2212	0,2310	0,2390	0,2459	0,2576	0,2672	0,2751	0,2817	0,2915	0,2984	0,3071	0,3123	0,3333
β(h/b)	0,1406	0,1717	0,1958	0,2143	0,2287	0,2494	0,2633	0,2733	0,2808	0,2913	0,2983	0,3071	0,3123	0,3333
γ(h/b)	0,6753	0,7763	0,8476	0,8966	0,9301	0,9681	0,9854	0,9934	0,9970	0,9994	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
δ(h/b)	0,6753	0,7111	0,7280	0,7359	0,7394	0,7418	0,7423	0,7424	0,7425	0,7425	0,7425	0,7425	0,7425	0,7425

Skręcanie prętów cienkościennych otwartych:

Stała skręcania: $I_x = \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i \beta\left(\frac{h_i}{b_i}\right)$

Maksymalne naprężenie ścinające w *i*-tym prostokącie: $\tau_{max,i} = \frac{\beta(h_i/b_i)}{\alpha(h_i/b_i)} \cdot \frac{M_x^{max}}{I_x} b_i$

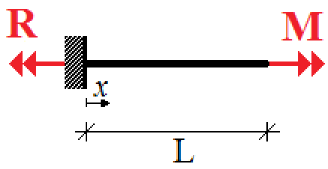
Skręcanie prętów cienkościennych zamkniętych:

Stała skręcania: $I_x = \frac{4 A_0^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$ dla $\delta = const.:$ $I_x = \frac{4\delta A_0^2}{S}$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie: $W_x = 2 A_0 \delta_{min}$

Maksymalne naprężenie ścinające: $\tau_{max} = \frac{M_x^{max}}{2 A_s \delta_{min}}$

ZADANIE 9.1
Wyznaczyć naprężenia styczne oraz całkowity kąt skręcenia pręta skręcanego momentem skupionym



Dane:

materiał – stal St3S

Moduł Kirchhoffa $G = 82\,\mathrm{GPa}$

Wytrz. na ścinanie $k_s = 125\,\mathrm{MPa}$

Obciążenie: $M = 1\,\mathrm{Nm}$

Pręt – przekrój kołowy Ø4 :

Stała skręcania: $I_x = \dfrac{\pi D^4}{32} = 0{,}00251\,\mathrm{cm}^4$

Wskaźnik wytrz.: $W_x = \dfrac{\pi D^3}{16} = 0{,}0125\,\mathrm{cm}^3$

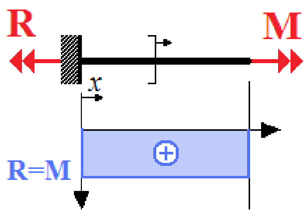
Długość pręta: $L = 2\,\mathrm{m}$

Z równania równowagi sumy rzutów wektorów momentu na oś X znajdujemy reakcję podporową:

$$\sum X = M - R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = M$$

STAN GRANICZNY NOŚNOŚCI:

Dokonując cięcia w dowolnym punkcie o współrzędnej x znajdujemy rozkład momentów skręcających:



$$M_x(x) = M$$

Naprężenie: $\tau_{max} = \dfrac{M_x}{W_x} = \dfrac{1\,\mathrm{Nm}}{0{,}0125\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3} = 80\,\mathrm{MPa} < k_s$

Warunek nośności: $\dfrac{\tau_{max}}{k_s}\cdot 100\% = 64\%$

STAN GRANICZNY UŻYTKOWALNOŚCI:

Jednostkowy kąt skręcenia: $\Theta = \dfrac{M_x}{G I_x} = \dfrac{1}{82\cdot 10^9\cdot 0.00251\cdot 10^{-8}} \approx 0{,}486 \left[\dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}\right]$

Kąt skręcenia:

$$\psi(x) = \int_0^x \Theta\,\mathrm{d}x + C = \int_0^x \frac{M_x}{G I_x}\,\mathrm{d}x + C = \frac{M_x}{G I_x}[x]_0^x + C = \frac{M_x x}{G I_x} + C$$

Z warunków brzegowych (podporowych) znajdujemy wartość stałej całkowania C:

$$\psi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(o) = C = 0$$

Ponieważ rozkład momentu skręcającego oraz sztywności jest przedziałami stały, można po prostu napisać:

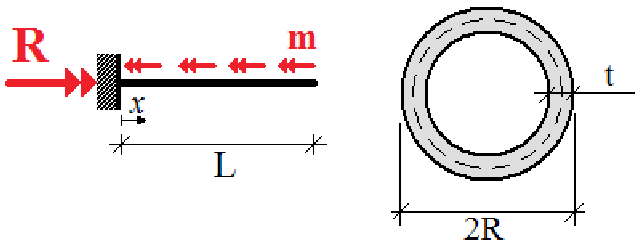
$$\psi_{całk} = \frac{M_x L}{G I_x}$$

Całkowite skręcenie pręta (całkowity kąt skręcenia końcówki pręta)

$$\psi(L) = \frac{M_x L}{G I_x} = \frac{1\,\mathrm{Nm}\cdot 2\,\mathrm{m}}{82\cdot 10^9\,\mathrm{Pa}\cdot 0{,}00251\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^4} \approx 0{,}972\,\mathrm{rad} \approx 56^\circ$$

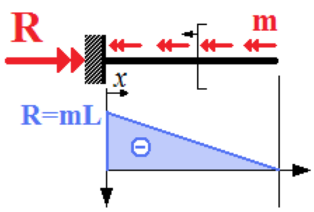
ZADANIE 9.2

Dany jest pręt cienkościenny, rurowy, skręcany obciążeniem rozłożonym równomiernie na całej długości. Wyznaczyć maksymalne naprężenie styczne oraz całkowity kąt skręcenia. Zadanie rozwiązać metodą ścisłą i przybliżoną. Sprawdzić jak zmieni się wartość maksymalnego naprężenia oraz całkowitego kąta skręcenia po rozcięciu rury wzdłuż tworzącej na całej długości pręta.



Dane:

Obciążenie:	$m = 1$ kNm/m
Długość pręta:	$L = 1$ m
Promień zewn.:	$R = 2{,}5$ cm
Grubość:	$t = 2$ mm
Moduł Kirchhoffa:	$G = 85$ GPa



Reakcja podporowa: $R = m\,L = 1$ kNm

Rozkład momentów skręcających: $M(x) = -R + mx = m(x-L)$ [kNm]

Maksymalny moment skręcający: $|M_{max}| = M|_{x=0} = mL = -1$ kNm

<u>Metoda ścisła (pręt lity):</u>

Stała skręcania:
$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi (R-t)^4}{2} = \frac{\pi}{2}\left[R^4 - (R-t)^4\right] = 17{,}402 \ \ \text{cm}^4$$

Maksymalne naprężenie ścinające:
$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{I_x}\cdot R = \frac{1\cdot 10^3}{17{,}402\cdot 10^{-8}}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2} = 143{,}66\cdot 10^6 \ \text{Pa}$$

Całkowity kąt skręcenia:
$$\Delta\psi = \int_0^L \frac{M(x)}{GI_x}dx + C = \int_0^L \frac{m(x-L)}{GI_x}dx + C = \frac{m}{GI_x}\left[\frac{x^2}{2} - Lx\right]_0^L + C = -\frac{mL^2}{2GI_x} + C$$

Z warunku utwierdzenia w $x = 0$ wyznaczamy stałą całkowania $C = 0$. Kąt skręcenia:
$$\Delta\psi = -\frac{mL^2}{2GI_x} = -\frac{1\cdot 10^3\cdot 1^2}{2\cdot 85\cdot 10^9\cdot 17{,}402\cdot 10^{-8}} = -0{,}0338\,[\text{rad}] \quad\Rightarrow\quad \Delta\psi \approx -1{,}94^\circ$$

<u>Metoda przybliżona (pręt cienkościenny zamknięty):</u>

Dla profilu cienkościennego zamkniętego o stałej grubości ścianki wykorzystać możemy uproszczone wzory Bredta:
$$I_x = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} = \frac{4\delta A_0^2}{S} \qquad W_x = 2A_0\delta_{min}$$

Pole obszaru ograniczonego linią środkową: $A_s = \pi\left(R - \frac{1}{2}t\right)^2 = 18{,}096$ cm^2

Długość linii środkowej: $S = 2\pi\left(R - \frac{1}{2}t\right) = 15{,}080$ cm

Minimalna grubość przekroju: $\delta_{min} = t = 2$ mm

Stała skręcania: $I_x = \dfrac{4\delta A_0^2}{S} = 17{,}372$ cm^4

Wskaźnik wytrzymałości: $W_x = 2A_0\delta_{min} = 7{,}238$ cm^3

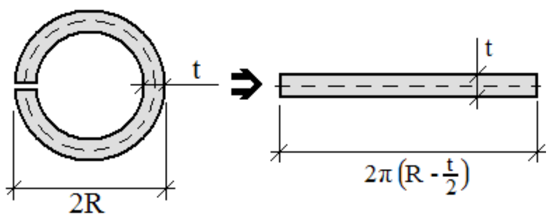
Zarówno rozkład momentu skręcającego jak i jednostkowego kąta skręcenia nie zależy w tym przypadku od wyznaczonych charakterystyk geometrycznych przekroju – obowiązują tu te same wzory, które wyznaczono uprzednio:

Maksymalne naprężenie ścinające: $\tau_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_x} = \dfrac{M_{max}}{2\,A_s\,\delta_{min}} = 138{,}16 \quad \text{MPa}$

Całkowity kąt skręcenia: $\Delta\psi = -\dfrac{mL^2}{2GI_x} = -0{,}0339\,[\text{rad}] \;\Rightarrow\; \Delta\psi \approx -1{,}94^\circ$

<u>Pręt rozcięty (pręt cienkościenny otwarty):</u>

Po rozcięciu profilu w jednym miejscu wzdłuż tworzącej rury na całej długości pręta, traktowany jest on jako profil cienkościenny otwarty. Aproksymować go można pojedynczym prostokątem o szerokości równej grubości ścianki i długości równej długości linii środkowej:



$$\begin{cases} b = \delta = 0{,}2\,\text{cm} \\ h = S = 15{,}080\,\text{cm} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{h}{b} = 75{,}4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha(75) = \dfrac{1}{3} \\ \beta(75) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Stała skręcania: $I_x = \beta\left(\dfrac{h}{b}\right) b^3 h = 0{,}0402 \text{ cm}^4$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie: $W_x = \alpha\left(\dfrac{h}{b}\right) b^2 h = 0{,}201 \text{ cm}^3$

Maksymalne naprężenie ścinające: $\tau_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_x} = 4975{,}124 \quad \text{MPa}$

Całkowity kąt skręcenia: $\Delta\psi = -\dfrac{mL^2}{2GI_x} = -14{,}633\,[\text{rad}] \;\Rightarrow\; -838{,}4^\circ$

ZADANIE 9.3

Dany jest pręt o przekroju kołowym o średnicy *D*, skręcany stałym momentem skręcającym *M*, wykonany z materiału o wytrzymałości na ścinanie k_s i module Kirchhoffa *G*. Wyprowadzić wzory na minimalną średnicę pręta dla zadanego obciążenia oraz na maksymalne obciążenie dla zadanego przekroju pręta z uwagi na wytrzymałość i nie przekroczenie dopuszczalnego kąta skręcenia ψ_{dop}.

Stała skręcania: $I_x = \dfrac{\pi D^4}{32}$ warunek sztywności: $\Delta\psi = \dfrac{M\,L}{GI_x} < \psi_{dop}$

Wskaźnik wytrzymałości: $W_x = \dfrac{\pi D^3}{16}$ warunek wytrzymałości: $\tau_{max} = \dfrac{M}{W_x} < k_s$

Minimalna średnica:

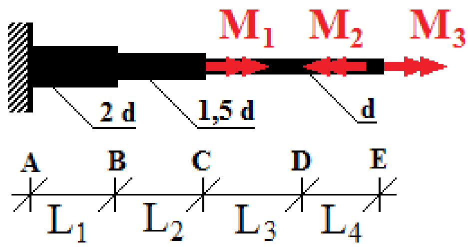
$$\tau_{max} < k_s \;\Rightarrow\; D_{min} > \sqrt[3]{\frac{16\,M}{\pi\,k_s}} \qquad \Delta\psi < \psi_{dop} \;\Rightarrow\; D_{min} > \sqrt[4]{\frac{32\,ML}{\pi\,G\,\psi_{dop}}}$$

Maksymalne obciążenie:

$$\tau_{max} < k_s \;\Rightarrow\; M_{max} < \frac{\pi\,D^3\,k_s}{16} \qquad \Delta\psi < \psi_{dop} \;\Rightarrow\; M_{max} < \frac{\pi\,D^4\,G\,\psi_{dop}}{32\,L}$$

ZADANIE 9.4

Wyznaczyć rozkład momentów skręcających, kąta skręcenia oraz maksymalnych naprężeń ścinających dla pręta kołowego o średnicy zmiennej na grubości, obciążonego jak na rysunku:



Moduł Kirchhoffa: $G=85$ GPa
Średnica podstawowa: $d=20$ mm

Długości odcinków:
$L_1=60$ cm $\quad L_2=60$ cm $\quad L_3=70$ cm $\quad L_4=50$ cm

Obciążenie:
$M_1=0{,}5$ kNm $\quad M_2=0{,}2$ kNm $\quad M_3=0{,}1$ kNm

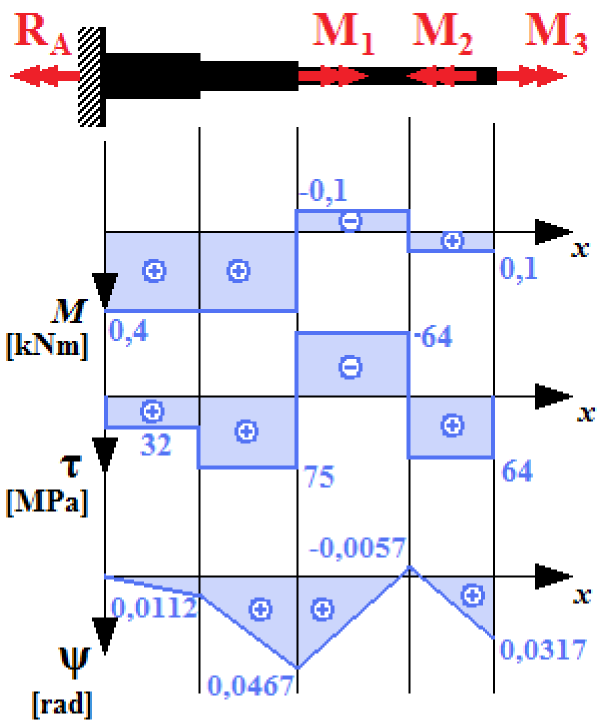
Reakcja w utwierdzeniu: $\Sigma M_x=0 \qquad -R_A+M_1-M_2+M_3=0 \quad \Rightarrow \quad R_A=0{,}4$ kNm

Rozkład momentów skręcających:

$$M_x=\begin{cases} AB: & x\in(0;0{,}6): & M_{x1}=R_A=0{,}4\,\text{kNm}\\ BC: & x\in(0{,}6;1{,}2): & M_{x2}=R_A=0{,}4\,\text{kNm}\\ CD: & x\in(1{,}2;1{,}9): & M_{x3}=M_3-M_2=-0{,}1\,\text{kNm}\\ DE: & x\in(1{,}9;2{,}4): & M_{x4}=M_3=0{,}1\,\text{kNm}\end{cases}$$

Rozkład stałej skręcania:

$$I_x=\begin{cases} AB: & I_{x1}=\dfrac{\pi(2d)^4}{32}=2{,}513\cdot10^{-7}\,\text{m}^4\\ BC: & I_{x2}=\dfrac{\pi(1{,}5d)^4}{32}=7{,}952\cdot10^{-8}\,\text{m}^4\\ CD: & I_{x3}=\dfrac{\pi d^4}{32}=1{,}571\cdot10^{-8}\,\text{m}^4\\ DE: & I_{x4}=\dfrac{\pi d^4}{32}=1{,}571\cdot10^{-8}\,\text{m}^4\end{cases}$$



Rozkład wskaźnika skręcania:

$$W_x=\begin{cases} AB: & W_{x1}=\dfrac{\pi(2d)^3}{16}=1{,}257\cdot10^{-5}\,\text{m}^3\\ BC: & W_{x2}=\dfrac{\pi(1{,}5d)^3}{16}=5{,}301\cdot10^{-6}\,\text{m}^3\\ CD: & W_{x3}=\dfrac{\pi d^3}{16}=1{,}571\cdot10^{-6}\,\text{m}^3\\ DE: & W_{x4}=\dfrac{\pi d^3}{16}=1{,}571\cdot10^{-6}\,\text{m}^3\end{cases}$$

Rozkład maksymalnych naprężeń stycznych:

$$\tau_{max}=\frac{M_x}{W_x}=\begin{cases} AB: & \tau_{max}=31{,}822\ \text{MPa}\\ BC: & \tau_{max}=75{,}457\ \text{MPa}\\ CD: & \tau_{max}=-63{,}654\ \text{MPa}\\ DE: & \tau_{max}=63{,}654\ \text{MPa}\end{cases}$$

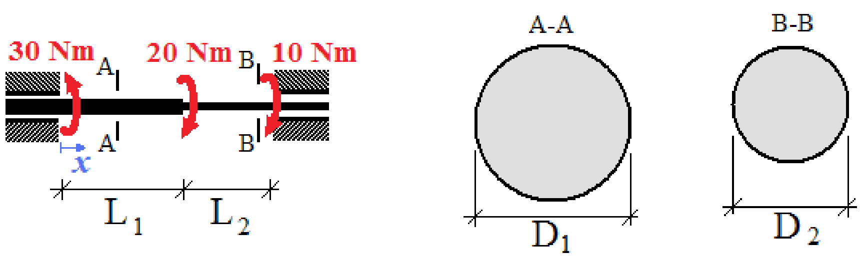
<u>Rozkład kąta skręcenia:</u>
Ponieważ obciążenie oraz sztywność pręta są przedziałami stałe, zatem rozkład kąta skręcenia będzie przedziałami liniowy. Wystarczy jedynie wyznaczyć kąty skręcenia na granicach przedziałów:

$$\psi_A = 0 \text{ rad} \quad \text{(z warunków podporowych)}$$
$$\psi_B = \psi_A + \frac{M_{x1} L_1}{GI_{x1}} = \frac{M_{x1} L_1}{GI_{x1}} = 0{,}0112 \text{ rad} = 0{,}642^\circ$$
$$\psi_C = \psi_B + \frac{M_{x2} L_2}{GI_{x2}} = \frac{M_{x1} L_1}{GI_{x1}} + \frac{M_{x2} L_2}{GI_{x2}} = 0{,}0467 \text{ rad} = 2{,}676^\circ$$
$$\psi_D = \psi_C + \frac{M_{x3} L_3}{GI_{x3}} = \frac{M_{x1} L_1}{GI_{x1}} + \frac{M_{x2} L_2}{GI_{x2}} + \frac{M_{x3} L_3}{GI_{x3}} = -0{,}0057 \text{ rad} = -0{,}327^\circ$$
$$\psi_E = \psi_D + \frac{M_{x4} L_4}{GI_{x4}} = \frac{M_{x1} L_1}{GI_{x1}} + \frac{M_{x2} L_2}{GI_{x2}} + \frac{M_{x3} L_3}{GI_{x3}} + \frac{M_{x4} L_4}{GI_{x4}} = 0{,}0317 \text{ rad} = 1{,}816^\circ$$

Całość wyników wygodnie jest notować na bieżąco w tabelce:

	L_i [m]	I_{xi} [m^4]	W_{xi} [m^3]	M_i [Nm]	$\tau_i^{max} = \frac{M_i}{W_{xi}}$ [MPa]	$\Delta\psi_i = \frac{M_i L_i}{GI_{xi}}$ [rad]
AB	0,6	$2{,}513 \cdot 10^{-7}$	$1{,}257 \cdot 10^{-5}$	400	31,822	0,0112
BC	0,6	$7{,}952 \cdot 10^{-8}$	$5{,}301 \cdot 10^{-6}$	400	75,457	0,0355
CD	0,7	$1{,}571 \cdot 10^{-8}$	$1{,}571 \cdot 10^{-6}$	-100	-63,654	-0,0524
DE	0,5	$1{,}571 \cdot 10^{-8}$	$1{,}571 \cdot 10^{-6}$	100	63,654	0,0374

ZADANIE 9.5
Dany jest wał o zmiennej średnicy obciążony trzema równoważącymi się momentami. Wyznaczyć maksymalne naprężenie styczne oraz względny kąt skręcenia końcowych przekrojów pręta. Porównać uzyskane wyniki z przypadkiem zastąpienia pręta kołowego prętem kwadratowym o tym samym polu.

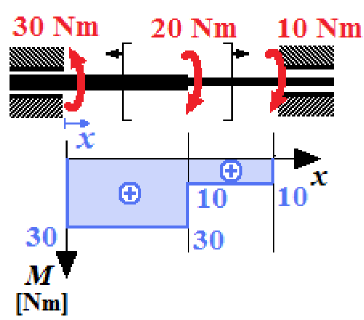


Dane:
$L_1 = 30 \quad \text{cm}$
$L_2 = 20 \quad \text{cm}$
$L = L_1 + L_2 = 50 \quad \text{cm}$

<u>Materiał – Stal St3S</u>: $\quad G = 82 \quad \text{GPa} \qquad k_s = 125 \quad \text{MPa}$

Rozkład momentów skręcających:

$$M(x) = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Leftrightarrow & M_I = 30\,\text{Nm} \\ x \in (L_{1,} L) & \Leftrightarrow & M_{II} = 10\,\text{Nm} \end{cases}$$



Przekrój kołowy:

Średnice pręta: $D_1 = 16 \quad \text{mm}$ $\qquad D_2 = 12 \quad \text{mm}$

Stałe skręcania: $I_{x1} = \dfrac{\pi D_1^4}{32} = 0{,}643 \quad \text{cm}^4$ $\qquad I_{x2} = \dfrac{\pi D_2^4}{32} = 0{,}204 \quad \text{cm}^4$

Wskaźniki wytrzymałości: $W_{x1} = \dfrac{\pi D_1^3}{16} = 0{,}804 \quad \text{cm}^3$ $\qquad W_{x2} = \dfrac{\pi D_2^3}{16} = 0{,}339 \quad \text{cm}^4$

Maksymalne naprężenia styczne:

przedział I $\quad \tau_{max} = \dfrac{M_I}{W_{x1}} = \dfrac{16 M_I}{\pi D_1^3} = 37 \quad \text{MPa}$ $\qquad \dfrac{\tau_{max}}{k_s} \cdot 100\% = 29{,}6\%$

przedział II $\quad \tau_{max} = \dfrac{M_{II}}{W_{x2}} = \dfrac{16 M_{II}}{\pi D_2^3} = 29{,}5 \quad \text{MPa}$ $\qquad \dfrac{\tau_{max}}{k_s} \cdot 100\% = 23{,}6\%$

Względny kąt skręcenia końcowych przekrojów pręta:

$$\Delta\psi = \sum_i \frac{M_i L_i}{G I_{xi}} = \frac{M_I L_1}{G I_{x1}} + \frac{M_{II} L_2}{G I_{x2}} = 0{,}029 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi \approx 1{,}66^\circ$$

Przekrój kwadratowy:

Dla przekroju kwadratowego $h : b = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(1) = 0{,}208 \quad \beta(1) = 0{,}141$

przedział I
$$h_1 = b_1 = \sqrt{\frac{\pi D_1^2}{4}} = 1{,}418\,\text{cm}$$
$$I_{x1}^{pr} = \beta b_1^3 h_1 = 0{,}570 \ \text{cm}^4$$
$$W_{x1}^{pr} = \alpha b_1^2 h_1 = 0{,}593 \ \text{cm}^3$$

przedział II
$$h_2 = b_2 = \sqrt{\frac{\pi D_2^2}{4}} = 1{,}064\,\text{cm}$$
$$I_{x2}^{pr} = \beta b_2^3 h_2 = 0{,}181 \ \text{cm}^4$$
$$W_{x2}^{pr} = \alpha_2 b_2^2 h_2 = 0{,}250\,\text{cm}^3$$

Maksymalne naprężenia styczne:

przedział I $\quad \tau_{max} = \dfrac{M_I}{W_{x1}^{pr}} = 50{,}6 \quad \text{MPa}$ $\qquad \dfrac{\tau_{max}}{k_s} \cdot 100\% = 40{,}47\%$

przedział II $\quad \tau_{max} = \dfrac{M_{II}}{W_{x2}^{pr}} = 40 \quad \text{MPa}$ $\qquad \dfrac{\tau_{max}}{k_s} \cdot 100\% = 32\%$

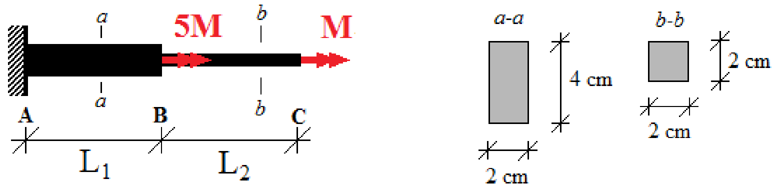
Względny kąt skręcenia końcowych przekrojów pręta:

$$\Delta\psi = \sum_i \frac{M_i L_i}{G I_{xi}} = 0{,}033 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi \approx 1{,}88^\circ$$

ZADANIE 9.6

Obliczyć maksymalne obciążenie M dla pręta skręcanego jak na rysunku, jeśli wytrzymałość na ścinanie $k_s = 130\ \text{MPa}$, zaś dopuszczalny maksymalny kąt skręcenia wynosi $\psi_{dop} = 0{,}02\ \text{rad}$. Moduł Kirchhoffa: $G = 83\ \text{GPa}$

$L_1 = 35\,\text{cm}$
$L_2 = 40\,\text{cm}$



Charakterystyki geometryczne:

Przedział AB: $h/b = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha(2) = 0{,}246\,, \quad \beta(2) = 0{,}229$

Stała skręcania $\quad I_{x1} = \beta\left(\frac{h}{b}\right) b^3 h = 7{,}328 \cdot 10^{-8}$

Wskaźnik wytrzymałości $\quad W_{x1} = \alpha\left(\frac{h}{b}\right) b^2 h = 3{,}936 \cdot 10^{-6}$

Przedział AB: $h/b = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(1) = 0{,}208\,, \quad \beta(1) = 0{,}141$

Stała skręcania $\quad I_{x2} = \beta\left(\frac{h}{b}\right) b^3 h = 2{,}256 \cdot 10^{-8}\,\text{m}^4$

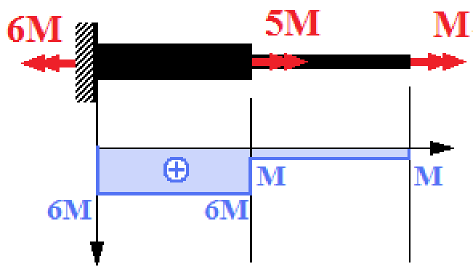
Wskaźnik wytrzymałości $\quad W_{x2} = \alpha\left(\frac{h}{b}\right) b^2 h = 1{,}664 \cdot 10^{-6}$

Reakcja w utwierdzeniu:

$\Sigma M_x = 0 \quad -R + 5M + M = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 6M$

Rozkład momentów:

$$M_x(x) = \begin{cases} AB: & x \in (0; 0{,}35) \qquad M_{x1} = 6M \\ BC: & x \in (0{,}35; 0{,}75) \quad M_{x2} = M \end{cases}$$



Warunek wytrzymałości:

Naprężenia styczne: $\tau_{max} = \dfrac{M_x}{W_x} < k_s \quad \Rightarrow \quad M_x < k_s W_x$

Przedział AB: $\quad M_{x1} < k_s W_{x1} \quad \Rightarrow \quad M < \frac{1}{6} \cdot 130 \cdot 10^6 \cdot 3{,}936 \cdot 10^{-6} = 85{,}28\ \text{Nm}$

Przedział BC: $\quad M_{x2} < k_s W_{x2} \quad \Rightarrow \quad M < 130 \cdot 10^6 \cdot 1{,}664 \cdot 10^{-6} = 216{,}32\ \text{Nm}$

Warunek sztywności:

Wszystkie wektory obciążenia zwrócone są w jedną stronę, zatem kąt skręcenia stale przyrasta w jedną stronę. Maksymalny kąt skręcenia występuje więc na końcu pręta i jest równy:

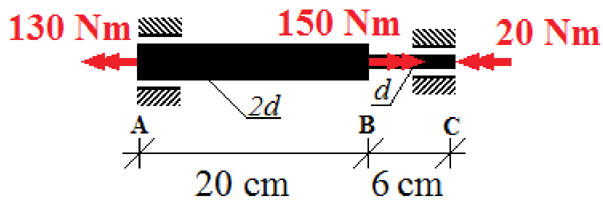
$$\psi_{max} = \frac{M_{x1} L_1}{G I_{x1}} + \frac{M_{x2} L_2}{G I_{x2}} = \frac{6M \cdot 0{,}35}{83 \cdot 10^9 \cdot 7{,}328 \cdot 10^{-8}} + \frac{M \cdot 0{,}4}{83 \cdot 10^9 \cdot 2{,}256 \cdot 10^{-8}} = M \cdot 5{,}589 \cdot 10^{-4} \qquad \left[\frac{1}{\text{Nm}}\right]$$

Z warunku na kąt skręcenia: $\psi_{max} < \psi_{dop} \quad \Rightarrow \quad M < \dfrac{0{,}02}{5{,}589 \cdot 10^{-4}} = 35{,}785 \quad [\text{Nm}]$

Ostatecznie: $M_{dop} = 35{,}785\ \text{Nm}$

ZADANIE 9.7

Dobrać średnicę porównawczą d pręta skręcanego jak na rysunku, jeśli wytrzymałość na ścinanie $k_s = 125\ \text{MPa}$, zaś dopuszczalny kąt skręcenia wynosi $\psi_{dop} = 1^\circ$. Moduł Kirchhoffa: $G = 83\ \text{GPa}$



Charakterystyki geometryczne:

Przedział AB:

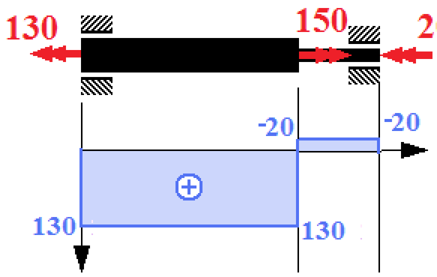
Stała skręcania: $$I_{x1} = \frac{\pi(2d)^4}{32} = 1{,}571\, d^4$$

Wskaźnik wytrzymałości: $$W_{x1} = \frac{\pi(2d)^3}{16} = 1{,}571\, d^3$$

Przedział BC:

Stała skręcania: $$I_{x2} = \frac{\pi d^4}{32} = 0{,}0982\, d^4$$

Wskaźnik wytrzymałości: $$W_{x2} = \frac{\pi d^3}{16} = 0{,}196\, d^3$$



Rozkład momentów skręcających:

$$M_x(x) = \begin{cases} AB: & x \in (0; 0{,}2) & M_{x1} = 130\ \text{Nm} \\ BC: & x \in (0{,}2; 0{,}26) & M_{x2} = -20\ \text{Nm} \end{cases}$$

Warunek wytrzymałości:

Maksymalne naprężenia styczne: $$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_x} < k_s \quad \Rightarrow \quad W_x > \frac{M_x}{k_s}$$

Przedział AB: $$W_{x1} > \frac{M_{x1}}{k_s} \quad \Rightarrow \quad d > \sqrt[3]{\frac{130}{1{,}571 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 8{,}715 \cdot 10^{-3}\quad [\text{m}]$$

Przedział BC: $$W_{x2} > \frac{M_{x2}}{k_s} \quad \Rightarrow \quad d > \sqrt[3]{\frac{20}{0{,}196 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 9{,}346 \cdot 10^{-3}\quad [\text{m}]$$

Warunek sztywności:

Pręt ma przedziałami stały rozkład momentów i sztywności, zatem kąt skręcenia zmienia się liniowo wewnątrz przedziałów. Maksymalne wartości może osiągnąć tylko na granicach przedziałów. Wartości kątów muszą być wyrażone w radianach $1^\circ \approx 0{,}0175\ \text{rad}$.

$$\psi_B = \frac{M_{x1} L_1}{G I_{x1}} = \frac{130 \cdot 0{,}2}{83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}571\, d^4} < 0{,}0175\ \text{rad} \quad \Rightarrow \quad d > \sqrt[4]{\frac{130 \cdot 0{,}2}{83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}571 \cdot 0{,}0175}} = 10{,}332 \cdot 10^{-3} [\text{m}]$$

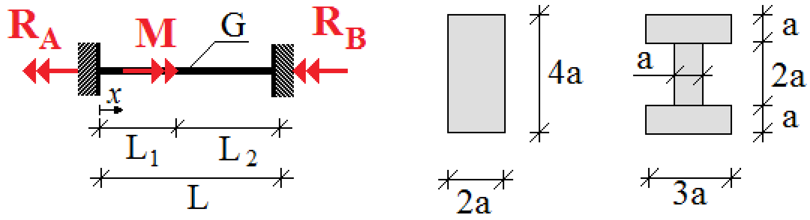
$$\psi_C = \frac{M_{x1} L_1}{G I_{x1}} + \frac{M_{x2} L_2}{G I_{x2}} = \frac{130 \cdot 0{,}2}{83 \cdot 10^9 \cdot 1{,}571\, d^4} + \frac{(-20) \cdot 0{,}06}{83 \cdot 10^9 \cdot 0{,}0982\, d^4} < 0{,}0175\ \text{rad} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d > \sqrt[4]{\frac{1}{83 \cdot 10^9 \cdot 0{,}0175}\left(\frac{130 \cdot 0{,}2}{1{,}571} - \frac{20 \cdot 0{,}06}{0{,}0982}\right)} = 7{,}389 \cdot 10^{-3}\quad [\text{m}]$$

Ostatecznie: $d > 10{,}332\ \text{mm}$

ZADANIE 9.8

Statycznie niewyznaczalny pręt o przekroju prostokątnym obustronnie utwierdzony, obciążony niesymetrycznie momentem skupionym M. Wyznaczyć reakcje podporowe i maksymalne naprężenie styczne. Porównać wynik z tym, jaki otrzymałoby się, gdyby przyjąć przekrój dwuteowy, jak na rysunku.



Dane:

$M = 50 \ \ \text{Nm}$

$L_1 = 20 \ \ \text{cm}$

$L_2 = 30 \ \ \text{cm}$

$L = L_1 + L_2 = 50 \ \ \text{cm}$

Stal St3S

Moduł Kirchhoffa: $G = 82 \ \ \text{GPa}$

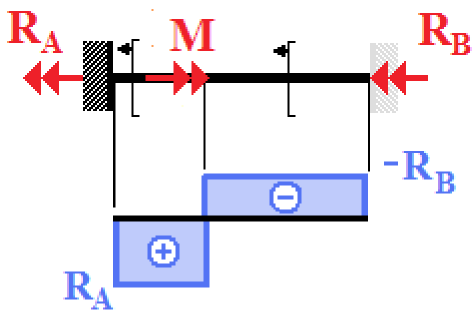
graniczne naprężenie przy ścinaniu: $k_s = 125 \ \ \text{MPa}$

Zadanie statycznie niewyznaczalne – nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń w punktach $x = 0$ i $x = L$ po zastąpieniu podpory w punkcie B nieznaną siłą reakcji R_B .

Z równania równowagi rzutu sumy sił na oś x: $\sum X = M - R_A - R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = M - R_A$

Rozkład momentów skręcających na długości pręta:

$$M(x) = \begin{cases} x \in (0, L_1) & \Leftrightarrow & R_A \\ x \in (L_1, L) & \Leftrightarrow & R_A - M = -R_B \end{cases}$$



Całkowity kąt skręcenia na końcu pręta:

$$\psi(L_1 + L_2) = \frac{R_A \cdot L_1}{G I_x} + \frac{(R_A - M) \cdot L_2}{G I_x} = \frac{R_A (L_1 + L_2)}{G I_x} - \frac{M L_2}{G I_x}$$

Ponieważ pręt jest utwierdzony na końcu, stąd $\psi(L_1 + L_2) = 0$, z czego wyliczamy wartość nieznanej reakcji podporowej:

$$\psi(L_1 + L_2) = \frac{1}{G I_x} \left[R_A L - M L_2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = M \frac{L_2}{L} = 30 \, \text{Nm}$$

Reakcja na drugiej podporze:

$$R_B = M - R_A = M - M \frac{L_2}{L} = M \frac{L - L_2}{L} = M \frac{L_1}{L} = 20 \, \text{Nm}$$

Maksymalny moment skręcający: $M_x^{max} = R_A = 30 \, \text{Nm}$

Przekrój prostokątny:

$b = 2a = 1 \quad \text{cm}$
$h = 4a = 2 \quad \text{cm}$
$\beta(h/b) = \beta(2) = 0{,}229$
$\alpha(h/b) = \alpha(2) = 0{,}246$

Stała skręcania: $I_x = \beta(h/b) b^3 h = 0{,}458 \quad \text{cm}^4$

Wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu: $W_x = \alpha(h/b) b^2 h = 0{,}492 \quad \text{cm}^3$

Maksymalne naprężenie ścinające: $\tau_{max} = \dfrac{M_x^{max}}{W_x} = \dfrac{30\,\text{Nm}}{0{,}492\cdot 10^{-6}\,\text{m}^3} = 60{,}98\,\text{MPa}$

Warunek nośności: $\dfrac{\tau_{max}}{k_s}\cdot 100\,\% = 81{,}3\%$

Przekrój dwuteowy:

$b_1 = a = 0{,}5 \quad \text{cm}$	$h_1 = 3a = 1{,}5 \quad \text{cm}$	$\beta_1 = \beta(3) = 0{,}263$	$\alpha_1 = \alpha(3) = 0{,}267$
$b_2 = a = 0{,}5 \quad \text{cm}$	$h_2 = 2a = 1 \quad \text{cm}$	$\beta_2 = \beta(2) = 0{,}229$	$\alpha_2 = \alpha(2) = 0{,}246$
$b_3 = a = 0{,}5 \quad \text{cm}$	$h_3 = 3a = 1{,}5 \quad \text{cm}$	$\beta_3 = \beta(3) = 0{,}263$	$\alpha_3 = \alpha(3) = 0{,}267$

Stała skręcania: $I_x = \sum_{i=1}^{3} \beta_i b_i^3 h_i = 0{,}127 \quad \text{cm}^4$

Momenty przypadające na półki: $M_{x1} = M_{x3} = \dfrac{M_x}{I_x} \beta_1 b_1^3 h_1 = 11{,}626 \quad \text{Nm}$

Moment przypadający na środnik: $M_{x1} = \dfrac{M_x}{I_x} \beta_2 b_2^3 h_2 = 6{,}749 \quad \text{Nm}$

Sprawdzenie: $M_{x1} + M_{x2} + M_{x3} = 2\cdot 11{,}626\,\text{Nm} + 6{,}749\,\text{Nm} = 30\,\text{Nm} = M_x$

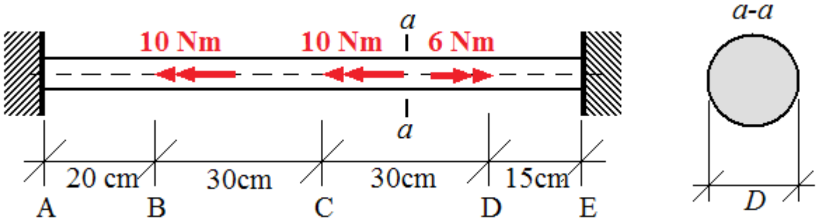
Maksymalne naprężenia w półkach: $\tau_{max1} = \tau_{max3} = \dfrac{M_x}{I_x} \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} b_1 = 116{,}11 \quad \text{MPa}$

Maksymalne naprężenia w środniku: $\tau_{max2} = \dfrac{M_x}{I_x} \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} b_2 = 109{,}73 \quad \text{MPa}$

Warunek nośności: $\dfrac{\tau_{max}}{k_s}\cdot 100\,\% = 93\,\%$

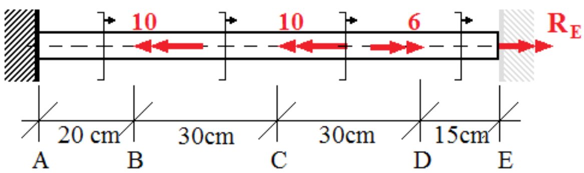
ZADANIE 9.9

Dany jest obustronnie utwierdzony pręt o przekroju kołowym, obciążony jak na rysunku. Dobrać minimalną średnicę pręta z uwagi na warunek wytrzymałości – wytrzymałość na ścinanie wynosi $k_s = 50\ \text{MPa}$. Dla dobranej średnicy wyznaczyć rozkład kąta skręcania, przyjmując $G = 34\,\text{GPa}$.



Zadanie statycznie niewyznaczalne – nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń w punktach $x = 0$ i $x = L$ po zastąpieniu jednej z podpór nieznaną siłą reakcji.

$$M_1 = -10-10+6+R_E = R_E-14 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_2 = -10+6+R_E = R_E-4 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_3 = R_E+6 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_4 = R_E \quad [\text{Nm}]$$



$$L_1 = 0{,}2\,\text{m}\,,\quad L_2 = 0{,}3\,\text{m}\,,\quad L_3 = 0{,}3\,\text{m}\,,\quad L_4 = 0{,}15\,\text{m}$$

Przekrój stały na długości pręta – sztywność na skręcanie: $GI_x = \text{const.}$

Całkowity kąt skręcenia na końcu pręta:

$$\Delta\psi = \int_0^L \Theta\,dx = \int_0^L \frac{M(x)}{GI_x}dx = \sum_{i=1}^{4}\frac{M_i L_i}{GI_{xi}} = \frac{1}{GI_x}\left[M_1 L_1 + M_2 L_2 + M_3 L_3 + M_4 L_4\right] =$$

$$= \frac{1}{GI_x}\left[(R_E-14)\cdot 0{,}2+(R_E-4)\cdot 0{,}3+(R_E+6)\cdot 0{,}3+R_E\cdot 0{,}15\right] = \frac{0{,}95\,R_E-2{,}2}{GI_x} = 0 \quad\Rightarrow\quad R_E = 2{,}316\,[\text{Nm}]$$

Z równania równowagi: $\quad \Sigma M_x = 0: \ \Rightarrow \ R_A = 10+10-6-R_E = 11{,}684$

Rozkład momentów:

$$M_1 = R_E-14 = -11{,}684 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_2 = R_E-4 = -1{,}684 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_3 = R_E+6 = 8{,}316 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_4 = R_E = 2{,}316 \quad [\text{Nm}]$$
$$\Rightarrow \quad M_{max} = |M_1| = 11{,}684\ \text{Nm}$$

Wymiarowanie pręta:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{M_{max}}{W_x} < k_s \\ W_x &= \frac{\pi D^3}{16} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad D > \sqrt[3]{\frac{16\cdot M_{max}}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16\cdot 11{,}684}{\pi\cdot 50\cdot 10^6}} = 10{,}597\cdot 10^{-3}\ \text{m} \quad\Rightarrow\quad \text{przyjęto } D = 11\ \text{mm}$$

Stała skręcania dla przyjętej średnicy przekroju: $\quad I_x = \dfrac{\pi D^4}{32} = 0{,}144\ \text{cm}^4$

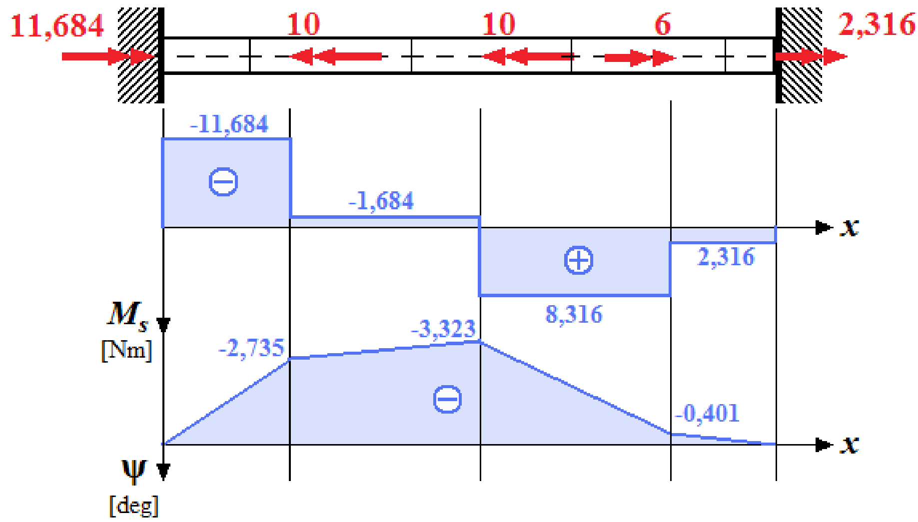
Względny obrót przekroju w poszczególnych punktach charakterystycznych:

$$\psi_B = \frac{M_1 L_1}{GI_x} = \frac{(-11{,}684)\cdot 0{,}2}{34\cdot 10^9 \cdot 0{,}144\cdot 10^{-8}} = -0{,}0477\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad \psi_B = -2{,}735^\circ$$

$$\psi_C = \psi_B + \frac{M_2 L_2}{GI_x} = -0{,}0477 + \frac{(-1{,}684)\cdot 0{,}3}{34\cdot 10^9 \cdot 0{,}144\cdot 10^{-8}} = -0{,}0580\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad \psi_C = -3{,}323^\circ$$

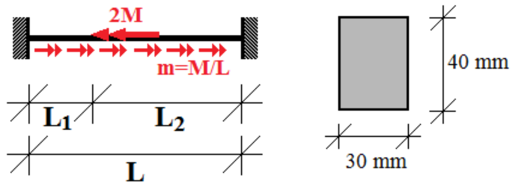
$$\psi_D = \psi_C + \frac{M_3 L_3}{GI_x} = -0{,}0580 + \frac{8{,}316\cdot 0{,}3}{34\cdot 10^9 \cdot 0{,}144\cdot 10^{-8}} = -0{,}0070\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad \psi_D = -0{,}401^\circ$$

$$\psi_E = \psi_D + \frac{M_4 L_4}{GI_x} = -0{,}0070 + \frac{2{,}316\cdot 0{,}15}{34\cdot 10^9 \cdot 0{,}144\cdot 10^{-8}} = 0\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad \psi_B = 0^\circ$$



ZADANIE 9.10

Wyznaczyć rozkład momentów zginających i kąta skręcenia statycznie niewyznaczalnego skręcanego pręta o przekroju prostokątnym. Wyznaczyć maksymalną wartość parametru obciążenia *M*, jeśli moduł Kirchhoffa $G=82$ GPa , wytrzymałość na ścinanie $k_s=120$ MPa zaś dopuszczalny maksymalny kąt skręcenia $\psi_{dop}=2^\circ$.



$L_1=20$ cm, $L_2=50$ cm, $L=L_1+L_2=70$ cm

Charakterystyki geometryczne przekroju: $h/b=1{,}333$

Wartości parametrów α i β wyznaczamy poprzez interpolację liniową:

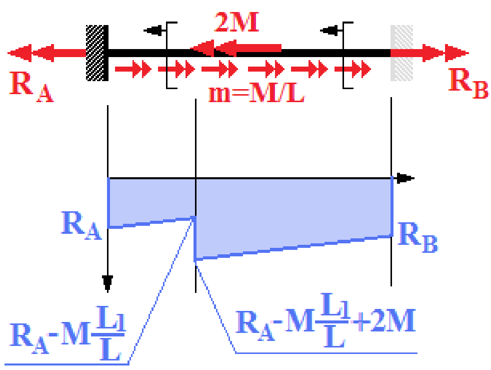
$$\alpha(1{,}0)=0{,}208 \qquad \alpha(1{,}5)=0{,}231 \qquad \alpha(1{,}333)=\frac{\alpha(1{,}5)-\alpha(1{,}0)}{1{,}5-1{,}0}(1{,}333-1{,}0)+\alpha(1{,}0)=0{,}223$$

$$\beta(1{,}0)=0{,}141 \qquad \beta(1{,}5)=0{,}196 \qquad \beta(1{,}333)=\frac{\beta(1{,}5)-\beta(1{,}0)}{1{,}5-1{,}0}(1{,}333-1{,}0)+\beta(1{,}0)=0{,}178$$

Stała skręcania: $I_x=\beta b^3 h = 19{,}224\cdot10^{-8}\ \text{m}^4$

Wskaźnik wytrzymałości: $W_x=\alpha b^2 h = 8{,}028\cdot10^{-6}\ \text{m}^4$

Zadanie statycznie niewyznaczalne – nieznane reakcje podporowe wyznaczymy z warunku zerowania się wyliczonych przemieszczeń w punktach $x=0$ i $x=L$ po zastąpieniu jednej z podpór nieznaną siłą reakcji.



Z równowagi momentów:

$$\Sigma M_x=-R_A-2M+\frac{M}{L}\cdot L+R_B=0 \quad\Rightarrow\quad R_B=R_A+M$$

Rozkład momentów skręcających:

$$M_x(x)=\begin{cases} AB:\ x\in(0,L_1) & \Leftrightarrow \quad M_{AB}=R_A-\dfrac{M}{L}x \\ BC:\ x\in(L_1,L) & \Leftrightarrow \quad M_{BC}=R_A+2M-\dfrac{M}{L}x \end{cases}$$

Rozkład jednostkowego kąta skręcenia:

$$\Theta_x(x)=\frac{M(x)}{GI_x}=\begin{cases} \Theta_{AB}=\dfrac{1}{GI_x}\left[R_A-\dfrac{M}{L}x\right] \\ \Theta_{BC}=\dfrac{1}{GI_x}\left[R_A+2M-\dfrac{M}{L}x\right] \end{cases}$$

Rozkład kąta skręcenia:

$$\psi(x)=\int_0^x\Theta(\xi)\,\mathrm{d}\xi=$$

$$=\begin{cases} \psi_{AB}=\displaystyle\int_0^x\Theta_{AB}\,\mathrm{d}\xi+C=\frac{1}{GI_x}\left[R_A x-\frac{M}{2L}x^2\right]+C \\ \psi_{BC}=\displaystyle\int_0^{L_1}\Theta_{AB}\,\mathrm{d}\xi+\int_{L_1}^x\Theta_{BC}\,\mathrm{d}\xi+C=\frac{1}{GI_x}\left[\left(R_A L_1-\frac{M L_1^2}{2L}\right)+\left(R_A(x-L_1)+2M(x-L_1)-\frac{M}{2L}(x^2-L_1^2)\right)\right]+C \end{cases}$$

Stałą całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych (utwierdzenie na początku pręta):

$$\psi(0)=\psi_{AB}(x_A=0)=0 \quad\Rightarrow\quad C=0$$

Całkowity kąt skręcenia:

$$\psi(L) = \psi_{BC}(x_C=L) = \frac{1}{GI_x}\left[R_A x - \frac{M\,x^2}{2L} + 2M(x-L_1)\right]\Bigg|_{x=L} = R_A L - M\left(\frac{L}{2} - 2L_2\right) = 0$$

Z powyższego warunku kinematycznego oraz z równania równowagi $\Sigma M_x = 0$ otrzymujemy:

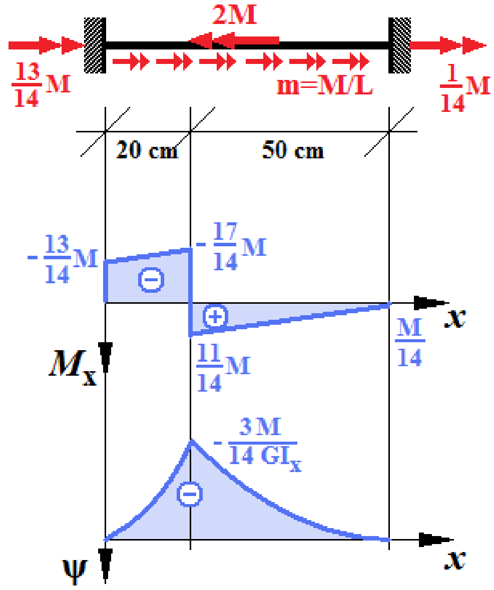
$$R_A = \frac{M}{2}\left(1 - 4\frac{L_2}{L}\right) = -\frac{13}{14}M \quad , \qquad R_B = R_A + M = \frac{M}{2}\left(3 - 4\frac{L_2}{L}\right) = \frac{1}{14}M$$

Rozkład momentów skręcających:

$$M_x(x) = \begin{cases} AB: \quad M_{AB} = M\left[-\frac{13}{14} - \frac{1}{0{,}7}x\right] \\ BC: \quad M_{BC} = M\left[-\frac{13}{14} + 2 - \frac{1}{0{,}7}x\right] \end{cases}$$

Rozkład kąta skręcenia:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_{AB} = \frac{M}{GI_x}\left[-\frac{13}{14}x - \frac{1}{2\cdot 0{,}7}x^2\right] \\ \psi_{BC} = \frac{M}{GI_x}\left[-\frac{13}{14}x - \frac{1}{2\cdot 0{,}7}x^2 + 2(x-0{,}2)\right] \end{cases}$$



Maksymalny moment skręcający:

$$M_{max} = \frac{17}{14}M$$

Maksymalny kąt skręcenia:

Moment skręcający (pochodna kąta skręcenia) nie osiąga nigdzie wartości zerowej, a więc rozkład kąta skręcenia nie ma lokalnego ekstremum wewnątrz przedziałów charakterystycznych. Wartości ekstremalne osiągane są na krańcach tych przedziałów:

$$\psi_{max} = \frac{3M}{14\,GI_x}$$

Maksymalna wartość parametru obciążenia *M*:

- Z uwagi na graniczny stan nośności (warunek sztywności):

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} < k_s \quad \Rightarrow \quad M < \frac{14}{17}\cdot W_x\cdot k_s = 793{,}355 \text{ Nm}$$

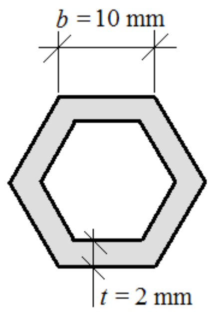
- Z uwagi na graniczny stan użytkowalności (warunek sztywności):
  Dopuszczalna wartość kąta musi być wyrażona w radianach $\psi_{dop} = 0{,}035$ rad

$$\psi_{max} < \psi_{dop} \quad \Rightarrow \quad M < \frac{14}{3}GI_x\psi_{dop} = 2574{,}734 \text{ Nm}$$

Ostatecznie: $M < 793{,}4$ Nm

ZADANIE 9.11

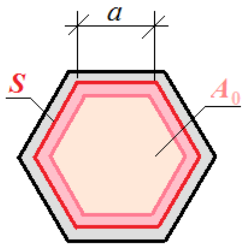
Wyznaczyć stałą skręcania oraz wskaźnik wytrzymałości dla foremnego, sześciokątnego profilu cienkościennego.



Długość jednego boku sześciokąta środkowego:

$$a = 2\cdot\left(\frac{b\cdot\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{tg}\,30^\circ = 8{,}845\,\mathrm{mm}$$

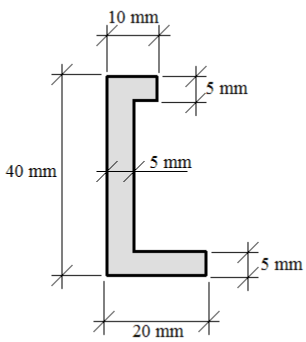
Długość linii środkowej: $S = 6a = 53{,}072$ mm



Pole zawarte wewnątrz linii środkowej: $A_0 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 203{,}258\ \mathrm{mm}^2$

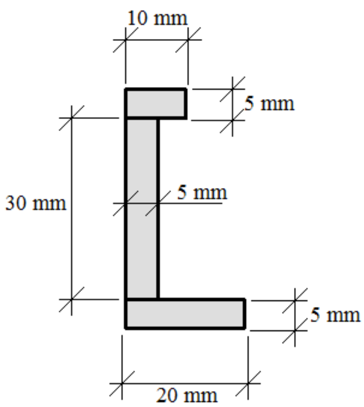
Stała skręcania: $I_x = \frac{4\,t\,A_0^2}{S} = 6227{,}587\ \mathrm{mm}^4$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie: $W_x = 2\,A_0 t = 813\ \mathrm{mm}^3$



ZADANIE 9.12

Wyznaczyć stałą skręcania oraz wskaźnik wytrzymałości dla ceowego profilu cienkościennego.



Przekrój aproksymowany jest układem trzech prostokątów:

$$b_1 = 5\,\mathrm{mm},\quad h_1 = 20\,\mathrm{mm},\quad \frac{h_1}{b_1} = 4,\quad \alpha_1 = 0{,}282,\quad \beta_1 = 0{,}281$$

$$b_2 = 5\,\mathrm{mm},\quad h_2 = 30\,\mathrm{mm},\quad \frac{h_2}{b_2} = 6,\quad \alpha_2 = 0{,}299,\quad \beta_2 = 0{,}299$$

$$b_3 = 5\,\mathrm{mm},\quad h_3 = 10\,\mathrm{mm},\quad \frac{h_3}{b_3} = 2,\quad \alpha_3 = 0{,}246,\quad \beta_3 = 0{,}229$$

Stała skręcania: $I_x = \sum_{i=1}^{3} b_i^3 h_i \beta_i = 2110\ \mathrm{mm}^4$

Wskaźnik wytrzymałości: $W_x = \min_{i=1,2,3}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\frac{I_x}{b_i}\right) = \min\left(423{,}5\ ;\ 422\ ;\ 453{,}3\right) = 422\,\mathrm{mm}^3$