NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

Rozkład naprężeń normalnych w przekroju zginanym

- zginanie proste: $\sigma_x(z) = \dfrac{M_y}{I_y} \cdot z$
- zginanie ukośne: $\sigma_x(y, z) = \dfrac{M_y}{I_y} \cdot z - \dfrac{M_z}{I_z} \cdot y$

Dla głównego centralnego układu współrzędnych xy obróconego o kąt φ względem pewnego przyjętego układu centralnego YZ:

- Rozkład wektora momentu: $M_y = M_Y \cdot \cos\varphi + M_Z \cdot \sin\varphi$, $M_z = M_Z \cdot \cos\varphi - M_Y \cdot \sin\varphi$
- Transformacja współrzędnych: $y = Y \cdot \cos\varphi + Z \cdot \sin\varphi$, $z = Z \cdot \cos\varphi - Y \cdot \sin\varphi$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie: $W_y = \dfrac{I_y}{z_{max}}, \qquad W_z = \dfrac{I_z}{y_{max}}$

- przekrój prostokątny: $W_y = \dfrac{b h^2}{6}, \qquad W_z = \dfrac{b^2 h}{6}$
- przekrój kołowy: $W_y = W_z = \dfrac{\pi R^3}{4} = \dfrac{\pi D^3}{32}$

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju zginanym poprzecznie: $\tau_{xz} = \dfrac{Q(x) \cdot S_y(z)}{I_y \cdot b(z)}$

- przekrój prostokątny: $\tau_{xz}(z) = \dfrac{6Q}{bh}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{z^2}{h^2}\right) \qquad \tau_{max} = \tau(z=0) = \dfrac{3Q}{2A}$
- przekrój kołowy: $\tau_{xz}(z) = \dfrac{4Q}{3\pi R^2}\left(1 - \dfrac{z^2}{R^2}\right) \qquad \tau_{max} = \tau(z=0) = \dfrac{4Q}{3A}$

$$\tau_{xy}(y, z) = -\frac{4 Q y z}{3 \pi R^4} \qquad (\text{tylko dla punktów konturu!})$$

$$\tau_{wyp} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Zginanie proste

ZADANIE 10.1

Dany jest wspornik o długości $L = 3{,}5$ m obciążony na końcu siłą skupioną $P = 50$ kN. Dobrać minimalny przekrój IPN zdolny przenieść to obciążenie, jeśli wytrzymałość na rozciąganie/ściskanie $f_d = 215\ \text{MPa}$.

Maksymalny moment zginający (w przekroju utwierdzenia): $M_{max} = PL = 175\ \text{kNm}$

Wymagany wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

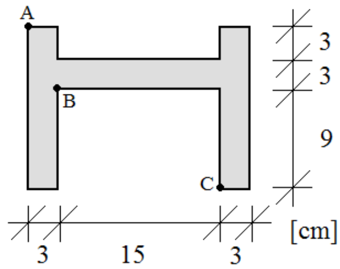
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} < f_d \quad \Rightarrow \quad W_y > \frac{M_{max}}{f_d} = 813{,}95\ \text{cm}^3$$

Najmniejszym profilem IPN o większym wskaźniku wytrzymałości jest IPN 160:

$$W_y^{\text{IPN360}} = 1090\,\text{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y^{IPN360}} = 165{,}55\ \text{MPa}$$

ZADANIE 10.2

Wyznaczyć naprężenia w punktach A, B i C przekroju jak na rysunku, zginanego momentem $M = 20\ \text{kNm}$, którego wektor jest równoległy do słabszej osi bezwładności przekroju.



Charakterystyki geometryczne przekroju:

Przekrój jest symetryczne – oś symetrii jest jedną z głównych centralnych osi bezwładności. Druga z osi jest do niej prostopadła i przechodzi przez środek ciężkości:

Pole powierzchni: $A = 3\cdot[3\cdot 15] = 135 \quad [\text{cm}^2]$

Moment statyczny względem prostej zawierającej górną krawędź przekroju:

$$S_{y'} = [3\cdot 15\cdot(3+1{,}5)] + 2\cdot[3\cdot 15\cdot 7{,}5] = 877{,}5 \quad [\text{cm}^3]$$

Położenie środka ciężkości: $z'_C = \dfrac{S_{y'}}{A} = 6{,}5 \quad [\text{cm}]$

Główne centralne moment bezwładności:

$$I_y = \left[\frac{15\cdot 3^3}{12} + 15\cdot 3\cdot(4{,}5-6{,}5)^2\right] + 2\cdot\left[\frac{3\cdot 15^3}{12} + 3\cdot 15\cdot(7{,}5-6{,}5)^2\right] = 1991{,}25 \quad [\text{cm}^4]$$

$$I_z = \left[\frac{15^3\cdot 3}{12}\right] + 2\cdot\left[\frac{3^3\cdot 15}{12} + 3\cdot 15\cdot(7{,}5+1{,}5)^2\right] = 8201{,}25 \quad [\text{m}^4]$$

Słabszą osią bezwładności jest oś y. Przyjmujemy, że wektor momentu skierowany jest zgodnie ze zwrotem tej osi (ma zwrot dodatni).

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Wzór na naprężenia normalne od zginania przyjmuje postać:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z$$

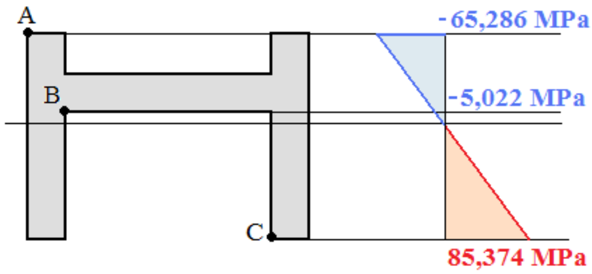
Naprężenia w wybranych punktach

A: $z_A = -6{,}5\,\mathrm{cm}$ $\qquad \sigma_A = \frac{20 \cdot 10^3}{1991{,}25 \cdot 10^{-8}} \cdot (-6{,}5 \cdot 10^{-2}) = -65{,}286 \cdot 10^6 \quad [\mathrm{Pa}]$

B: $z_B = -0{,}5\,\mathrm{cm}$ $\qquad \sigma_B = \frac{20 \cdot 10^3}{1991{,}25 \cdot 10^{-8}} \cdot (-0{,}5 \cdot 10^{-2}) = -5{,}022 \cdot 10^6 \quad [\mathrm{Pa}]$

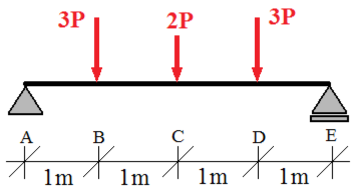
C: $z_C = 8{,}5\,\mathrm{cm}$ $\qquad \sigma_C = \frac{20 \cdot 10^3}{1991{,}25 \cdot 10^{-8}} \cdot (8{,}5 \cdot 10^{-2}) = 85{,}374 \cdot 10^6 \quad [\mathrm{Pa}]$

Rozkład naprężeń normalnych:



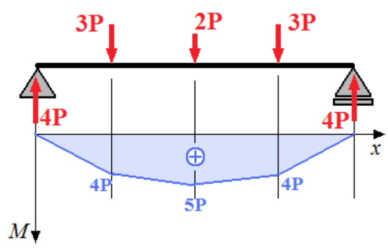
ZADANIE 10.3

Dany jest stalowy pręt zginany o średnicy $D = 16\,\mathrm{mm}$, obciążony jak na rysunku. Dobrać maksymalną wartość parametru obciążenia *P*, jeśli $f_d = 210\,\mathrm{MPa}$.



Wskaźnik wytrzymałości na zginanie: $W_y = \frac{\pi D^3}{32} = 0{,}402\,\mathrm{cm}^3$

Układ jest symetryczny – reakcja na każdej z podpór jest równa połowie sumy układu sił, a maksymalny moment zginający występować będzie w połowie przęsła



$$R_A = R_E = \frac{1}{2}(3P + 2P + 3P) = 4P$$

$$M_{max} = R_A \cdot 2 - 3P \cdot 1 = 5P$$

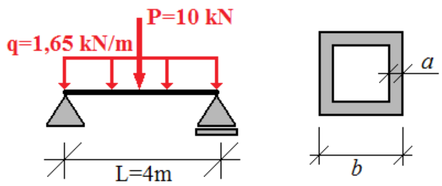
Maksymalną wartość parametru obciążenia *P* wyznaczamy z warunku wytrzymałości:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} < f_d \qquad \Rightarrow \qquad P < \frac{f_d \cdot W_y}{5} = \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}402 \cdot 10^{-6}}{5} = 16{,}884 \quad [\mathrm{N}]$$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

ZADANIE 10.4

Dana jest belka swobodnie podparta długości 4 m o przekroju skrzynkowym, kwadratowym, obciążona obciążeniem równomiernym $q = 1{,}65\ \text{kN/m}$ na całej długości i siłą skupioną $P = 10\ \text{kN}$ w środku przęsła. Dobrać wymiary przekroju (przyjąć $b = 6a$), jeśli graniczne naprężenie normalne $k_r = 80\ \text{MPa}$. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju maksymalnego momentu zginającego.

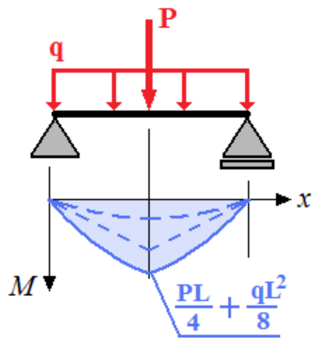


Charakterystyki geometryczne przekroju:

Moment bezwładności przekroju: $$I_y = \left[\frac{(6a)^4}{12}\right] - \left[\frac{(4a)^4}{12}\right] = \frac{260}{3} a^4 \approx 86{,}667\, a^4$$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie: $$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{86{,}667\, a^4}{3a} = 28{,}889\, a^3$$

Maksymalny moment zginający występuje w środku przęsła. Jego wartość możemy określić korzystając ze znanych wzorów na maksymalny moment pod obciążeniem ciągłym i pod siłą skupioną oraz z zasady superpozycji:



$$M_{max} = \frac{PL}{4} + \frac{qL^2}{8} = 13{,}3\ \text{kNm}$$

Minimalną wielkość wymiaru a dobieramy z warunku wytrzymałości:

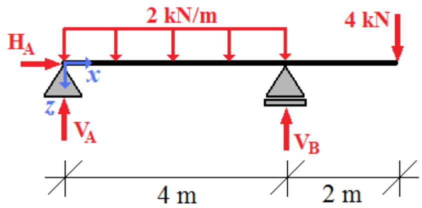
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} < k_r \quad \Rightarrow \quad a > \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{28{,}889 \cdot k_r}} = 1{,}79\,\text{cm}$$

Przyjęto: $a = 2\,\text{cm}$.

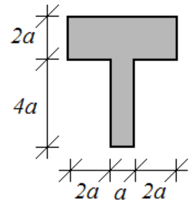
© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

ZADANIE 10.5

Dana jest betonowa, niezbrojona belka o przekroju teowym, obciążona jak na rysunku. Dobrać minimalny wymiar a przekroju z uwagi na jego zginanie. W obliczeniach przyjąć wytrzymałość na rozciąganie $f_{ctm} = 2{,}9 \text{ MPa}$, i wytrzymałość na ściskanie $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$.



Charakterystyki geometryczne przekroju symetrycznego – przyjmujemy pomocniczy układ współrzędnych o osi poziomej y' pokrywającej się z górną krawędzią przekroju.



$$A = [2a \cdot 5a] + [a \cdot 4a] = 14a^2$$

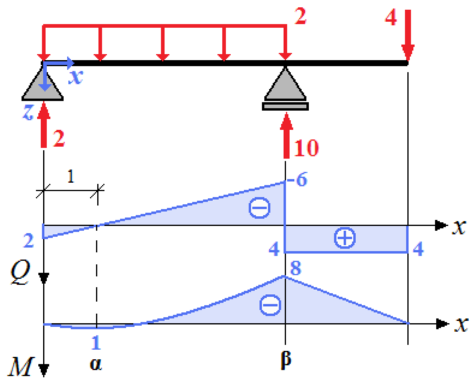
$$S_{y'} = [2a \cdot 5a \cdot a] + [a \cdot 4a \cdot 4a] = 26a^3 \quad \Rightarrow \quad z'_C = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{13}{7}a \approx 1{,}857\,a$$

$$I_y = \left[\frac{5a \cdot (2a)^3}{12} + 5a \cdot 2a \cdot \left(a - \frac{13}{7}a\right)^2\right] + \left[\frac{a \cdot (4a)^3}{12} + a \cdot 4a \cdot \left(4a - \frac{13}{7}a\right)^2\right] = \frac{722}{21}a^4 \approx 34{,}381\,a^4$$

Wskaźnik wytrzymałości dla włókien górnych: $W_{yg} = \dfrac{I_y}{z_g} = \dfrac{I_y}{z'_C} = \dfrac{722}{39}a^3 \approx 18{,}513\,a^3$

Wskaźnik wytrzymałości dla włókien dolnych: $W_{yd} = \dfrac{I_y}{z_d} = \dfrac{I_y}{(6a - z'_C)} = \dfrac{722}{87}a^3 \approx 8{,}299\,a^3$

Przekrój zginany jest tylko w płaszczyźnie xz – nie ma potrzeby wyznaczania charakterystyk geometrycznych związanych z osią z.



Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = H_A = 0$$

$$\Sigma M_A = -2 \cdot 4 \cdot 2 + V_B \cdot 4 - 4 \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 10 \quad [\text{kN}]$$

$$\Sigma Y = V_A - 2 \cdot 4 + V_B - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 2 \quad [\text{kN}]$$

Rozkład sił poprzecznych i momentów zginających:

Przedział AB

$$\begin{cases} Q = 2 - 2x \\ M = 2x - 2x \cdot \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Ekstremum lokalne M :
$Q(x_e) = 0 \;\Rightarrow\; x_e = 1$
$M(x_e) = 1$

Przedział BC

$$\begin{cases} Q = 4 \\ M = 4(6 - x) \end{cases}$$

Rozpatrujemy dwa przekroje:

- przekrój $\alpha - \alpha$ - maksymalny moment przęsłowy $M_\alpha = 1\,\text{kNm}$.
  Rozciąganie dołem, ściskanie górą.

- Przekrój $\beta - \beta$ - maksymalny moment podporowy $M_\beta = 8\,\text{kNm}$.
  Rozciąganie górą, ściskanie dołem.

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

PRZEKRÓJ $\alpha-\alpha$

Rozciąganie dołem: $\sigma_{max}=\dfrac{M_{\alpha}}{W_{yd}}<f_{ctm} \quad\Rightarrow\quad a>\sqrt[3]{\dfrac{M_{\alpha}}{8{,}299\, f_{ctm}}}=3{,}46\,\mathrm{cm}$

Ściskanie górą: $\sigma_{min}=\dfrac{M_{\alpha}}{W_{yg}}<f_{cm} \quad\Rightarrow\quad a>\sqrt[3]{\dfrac{M_{\alpha}}{18{,}513\, f_{cm}}}=1{,}12\,\mathrm{cm}$

PRZEKRÓJ $\beta-\beta$

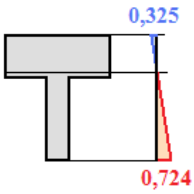
Rozciąganie górą: $\sigma_{max}=\dfrac{M_{\beta}}{W_{yg}}<f_{ctm} \quad\Rightarrow\quad a>\sqrt[3]{\dfrac{M_{\beta}}{18{,}513\, f_{ctm}}}=5{,}30\,\mathrm{cm}$

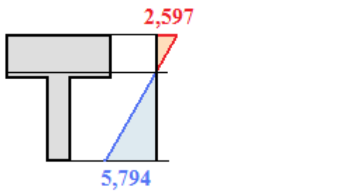
Ściskanie dołem: $\sigma_{min}=\dfrac{M_{\beta}}{W_{yd}}<f_{cm} \quad\Rightarrow\quad a>\sqrt[3]{\dfrac{M_{\beta}}{8{,}299\, f_{cm}}}=2{,}93\,\mathrm{cm}$

Przyjęto: $a=5{,}5\,\mathrm{cm} \quad\Rightarrow\quad W_{yg}=3080{,}100\ \mathrm{cm}^3,\quad W_{yd}=1380{,}746\ \mathrm{cm}^3$

Dla tak przyjętych wymiarów, naprężenia w poszczególnych przekrojach są równe:

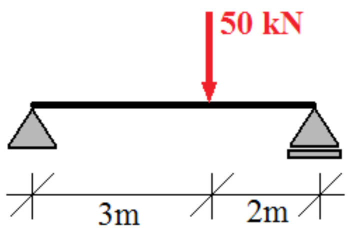
	Przekrój $\alpha-\alpha$	Przekrój $\beta-\beta$
dołem:	-0,325 MPa	2,597 MPa
górą:	0,7242 MPa	-5,794 MPa





ZADANIE 10.6

Dana jest belka swobodnie podparta o przekroju ceowym C200 wykonana za stali o $f_d=215$ MPa , która obciążona będzie siłą skupioną $P=50$ kN tak jak na rysunku. Obciążenie to przekracza wartość dopuszczalną. Nośność belki można zwiększyć poprzez przyspawanie do półek ceownika dodatkowych blach. Jaka powinna być ich grubość i na jakiej długości należy wzmocnić przekrój belki?



Grubość nakładek

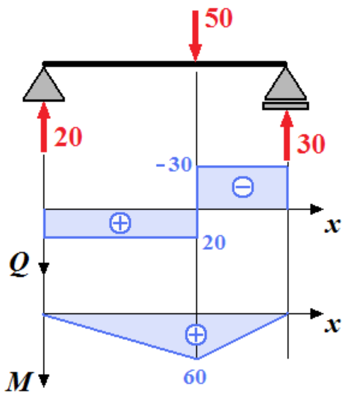
Minimalną grubość nakładek wyznaczymy na podstawie znajomości maksymalnego momentu zginającego.

Reakcje podporowe:

$\Sigma X=H_A=0$

$\Sigma M_A=-50\cdot 3+V_B\cdot 5=0 \quad\Rightarrow\quad V_B=30\ [\mathrm{kN}]$

$\Sigma Y=V_A-50+V_B=0 \quad\Rightarrow\quad V_A=20\ [\mathrm{kN}]$



Rozkład sił poprzecznych i momentów zginających:

$AB:\ x\in(0;3)$

$$\begin{cases}Q(x)=20\\ M(x)=20\cdot x\end{cases}$$

$BC:\ x\in(3;5)$

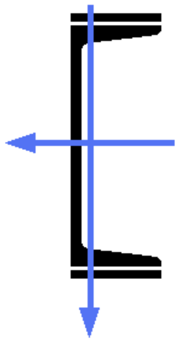
$$\begin{cases}Q(x)=-30\\ M(x)=30\cdot(5-x)\end{cases}$$

Maksymalny moment zginający: $M_{max}=60$ kNm

Wymagany wskaźnik wytrzymałości przekroju: $W_{min}=\dfrac{M_{max}}{f_d}=279{,}07\ \mathrm{cm}^3$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Przyjmujemy, że nakładki o grubości t przyspawane są z obydwu stron ceownika oraz, że ich szerokość jest równa szerokości półki ceownika $b_f = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Wszystkie obliczenia prowadzimy w centymetrach. Moment bezwładności wzmocnionego przekroju:



$$I_{wzm} = I_{C200} + 2\cdot\left[\frac{b_f\cdot t^3}{12} + b_f\cdot t\cdot\left(\frac{h_{C200}}{2}+\frac{t}{2}\right)^2\right] = 1910 + 2\cdot\left[\frac{7{,}5\,t^3}{12} + 7{,}5\,t\left(\frac{20}{2}+\frac{t}{2}\right)^2\right] =$$
$$= 5\,t^3 + 150\,t^2 + 1500\,t + 1910$$

Odległość do skrajnych włókien w przekroju wzmocnionym: $z_{max,\,wzm} = \frac{1}{2}h_{C200} + t = 10 + t$

Żądamy, aby wskaźnik wytrzymałości przekroju wzmocnionego był równy minimalnemu wymaganemu wskaźnikowi – z tej zależności wyznaczamy minimalną grubość nakładek:

$$W_{wzm} = \frac{I_{wzm}}{z_{max,\,wzm}} = W_{min} \quad\Rightarrow\quad t^3 + 30\,t^2 + 224\,t - 178 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 0{,}723\ \ [\mathrm{cm}]$$

Przyjmujemy: $t = 8\,\mathrm{mm}$.

$$I_{wzm} = 3208{,}56\ \mathrm{cm}^{4,} \qquad z_{max,wzm} = 10{,}8\ \mathrm{cm}\,, \qquad W_{wzm} = 297{,}09\ \mathrm{cm}^3$$

Naprężenia maksymalne w przekroju wzmocnionym:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{wzm}} = 201{,}96\ \mathrm{MPa} < f_d$$

<u>Długość nakładek</u>

Długość nakładek wyznaczymy na podstawie znajomości maksymalnego dopuszczalnego momentu zginającego dla przekroju niewzmocnionego:

$$M_{dop} = f_d\cdot W_{C200} = 215\cdot 10^6\cdot 191\cdot 10^{-6} = 41{,}065\cdot 10^3\ \ [\mathrm{Nm}]$$

W obydwu przedziałach charakterystycznych wyznaczyć musimy taki przekrój, w którym moment zginający osiąga tę graniczną wartość:

$$M_{AB} = M_{dop} \quad\Rightarrow\quad 20\cdot x = 41{,}065 \quad\Rightarrow\quad x = 2{,}05\ \ [\mathrm{m}]$$
$$M_{BC} = M_{dop} \quad\Rightarrow\quad 30\cdot(5-x) = 41{,}065 \quad\Rightarrow\quad x = 3{,}63\ \ [\mathrm{m}]$$

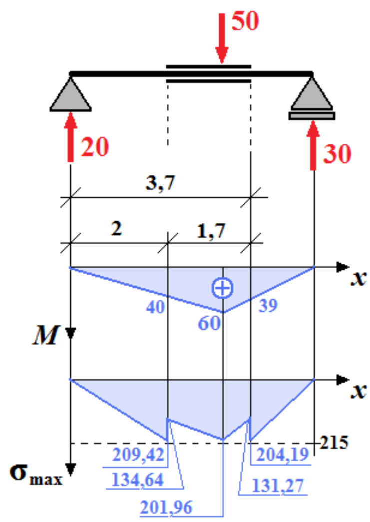
Przyjęto, że przekrój wzmocniony zostanie od punktu $x = 2\,\mathrm{m}$ do punktu $x = 3{,}7\,\mathrm{m}$.
Całkowita wymagana długość nakładek: $L = 3{,}7 - 2{,}0 = 1{,}7\ \ [\mathrm{m}]$

$$M(x{=}2) = 40\ \mathrm{kN}\,, \qquad M(x{=}3{,}7) = 39\ \mathrm{kN}$$

Maksymalne naprężenia od zginania w punktach wzmocnienia lub osłabienia przekroju:

$$\frac{M_{AB}(x{=}2)}{W_{C200}} = 209{,}42\ \mathrm{MPa} \qquad \frac{M_{AB}(x{=}2)}{W_{wzm}} = 134{,}64\ \mathrm{MPa}$$

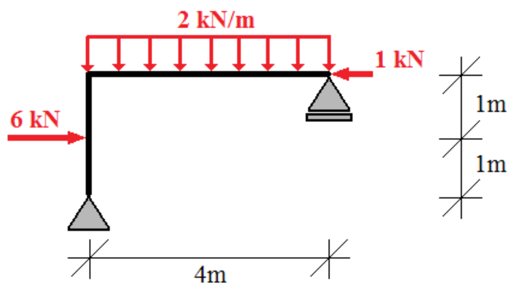
$$\frac{M_{BC}(x{=}3{,}7)}{W_{C200}} = 204{,}19\ \mathrm{MPa} \qquad \frac{M_{BC}(x{=}3{,}7)}{W_{wzm}} = 131{,}27\ \mathrm{MPa}$$



ZADANIE 10.7

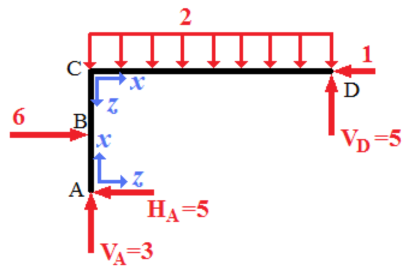
Dobrać minimalną wymaganą średnicę pręta (wyłącznie z uwagi na zginanie), z którego wykonano prostokątną ramę, obciążoną jak na rysunku, jeśli graniczne naprężenie normalne wynosi:

$$f_d = 180\ \text{MPa}\,.$$



Reakcje podporowe:

$$\Sigma M_A = -6\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + V_D\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{CD} = 5$$
$$\Sigma X = -H_A + 6 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 5$$
$$\Sigma Y = V_A - 2\cdot 4 + V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 3$$



Siły przekrojowe:

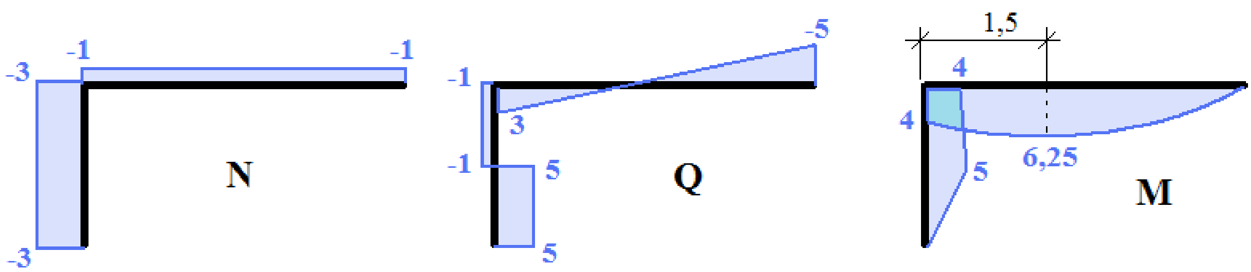
$AB:\ x\in(0;1)$
$$\begin{cases} N(x) = -3 \\ Q(x) = 5 \\ M(x) = 5\cdot x \end{cases}$$

$BC:\ x\in(1;2)$
$$\begin{cases} N(x) = -3 \\ Q(x) = -1 \\ M(x) = 5\cdot x - 6\cdot(x-1) \end{cases}$$

$CD:\ x\in(0;4)$
$$\begin{cases} N(x) = -1 \\ Q(x) = 2\cdot(4-x) - 5 \\ M(x) = -\dfrac{2}{2}\cdot(4-x)^2 + 5\cdot(4-x) \end{cases}$$

Ekstremum lokalne momentów pod obciążeniem ciągłym:

$$Q_{CD} = 2(4-x) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5$$
$$M_{CD}(x=1{,}5) = 6{,}25$$



Maksymalny moment zginający: $M_{max} = 6{,}25\ \text{kNm}$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie: $W_y = \dfrac{\pi D^3}{32}$

Warunek nośności: $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_y} < f_d$

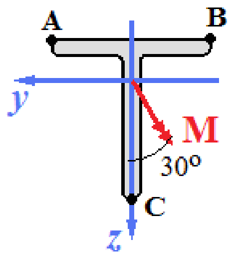
Minimalna średnica: $D > \sqrt[3]{\dfrac{32\, M_{max}}{\pi f_d}} = 70{,}719\ \text{mm}$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Zginanie ukośne

ZADANIE 10.8

Dany jest przekrój teowy T 100×100×11 obciążony momentem zginającym $M = 1{,}5$ kNm, jak na rysunku. Wyznaczyć naprężenia w punktach A, B i C. Wyznaczyć orientację osi obojętnej.



Rozkładamy wektor momentu zginającego na składowe równoległe do głównych centralnych osi bezwładności.

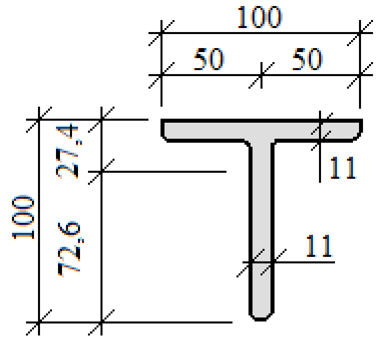
$$M_y = M\cos 120^\circ = -M\sin 30^\circ = -0{,}75 \text{ kN}$$
$$M_z = M\sin 120^\circ = +M\cos 30^\circ = 1{,}299 \text{ kN}$$

Naprężenia w przekroju określa wzór: $\sigma = \dfrac{M_y}{I_y}z - \dfrac{M_z}{I_z}y$

Charakterystyki geometryczne przekroju odczytujemy z tablic:

$I_y = 179 \text{ cm}^4$

$I_z = 88{,}3 \text{ cm}^4$



Współrzędne punktów skrajnych:

$A(50\ ;\ -27{,}4)\quad [\text{mm}]$

$B(-50\ ;\ -27{,}4)\quad [\text{mm}]$

$C(0\ ;\ 72{,}6)\quad [\text{mm}]$

Naprężenia w punktach skrajnych:

$$\sigma_A = \frac{-0{,}75\cdot 10^3}{179\cdot 10^{-8}}\cdot(-27{,}4\cdot 10^{-3}) - \frac{1{,}299\cdot 10^3}{88{,}3\cdot 10^{-8}}\cdot(50\cdot 10^{-3}) = -62{,}076\cdot 10^6 \quad [\text{Pa}]$$
$$\sigma_B = \frac{-0{,}75\cdot 10^3}{179\cdot 10^{-8}}\cdot(-27{,}4\cdot 10^{-3}) - \frac{1{,}299\cdot 10^3}{88{,}3\cdot 10^{-8}}\cdot(-50\cdot 10^{-3}) = 85{,}037\cdot 10^6 \quad [\text{Pa}]$$
$$\sigma_C = \frac{-0{,}75\cdot 10^3}{179\cdot 10^{-8}}\cdot(72{,}6\cdot 10^{-3}) - \frac{1{,}299\cdot 10^3}{88{,}3\cdot 10^{-8}}\cdot 0 = -30{,}419\cdot 10^6 \quad [\text{Pa}]$$

Równanie osi obojętnej:

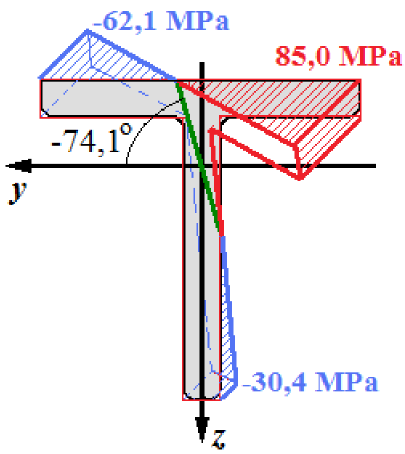
$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = 0 \quad\Rightarrow\quad z = \frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z}y \quad\Rightarrow\quad z = -3{,}511\,y$$

Kąt nachylenia osi obojętnej:

$$\gamma = \text{arctg}\frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z} = -74{,}102^\circ$$

Dla porównania – kąt nachylenia kierunku wektora momentu zginającego:

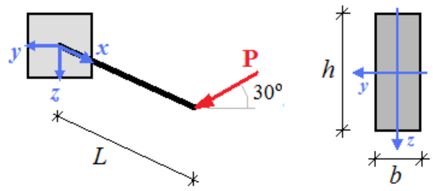
$$\text{arctg}\frac{M_z}{M_y} = -60^\circ$$



© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

ZADANIE 10.9

Dany jest wspornik o przekroju prostokątnym $b\times h = 10\,\text{cm} \times 25\,\text{cm}$ obciążony na końcu siłą skupioną P = 20 kN, nachyloną pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do mocniejszej osi przekroju. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju utwierdzenia, ekstremalne naprężenie normalne oraz położenie osi obojętnej.



Momenty bezwładności przekroju:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = 13020{,}83\ \text{cm}^4, \qquad I_z = \frac{b^3 h}{12} = 2083{,}33\ \text{cm}^3$$

Wskaźniki wytrzymałości przekroju na zginanie:

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = 1041{,}67\ \text{cm}^3, \qquad W_z = \frac{b^2 h}{6} = 416{,}67\ \text{cm}^3$$

Siła poprzeczna zginająca w płaszczyźnie *xz*: $F_z = P\sin\alpha = 10$ kN

Siła poprzeczna zginająca w płaszczyźnie *xy*: $F_y = P\cos\alpha = 17{,}32$ kN

Maksymalne momenty zginające (w przekroju utwierdzenia):

$$M_y = -F_z\cdot L = -30\,\text{kNm}$$
$$M_z = F_y\cdot L = 51{,}96\,\text{kNm}$$

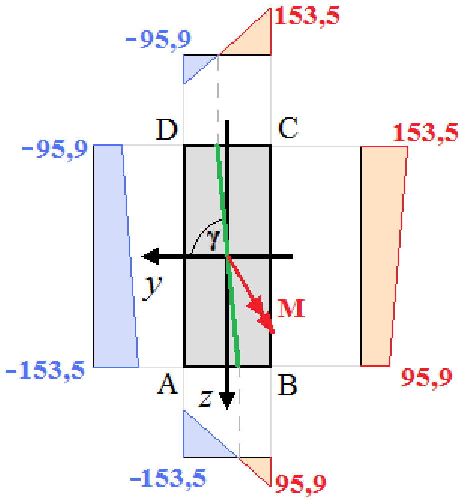
Kąt nachylenia kierunku wektora wypadkowego momentu gnącego do osi *y*:

$$\beta = \text{arctg}\frac{M_z}{M_y} = -60^\circ$$

Rozkład naprężeń normalnych: $\sigma(y,z) = \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y$

Naprężenia w narożach przekroju:

$$\sigma_A = \sigma\left(\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right) = -153{,}50\ \text{MPa}$$
$$\sigma_B = \sigma\left(-\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right) = -95{,}90\ \text{MPa}$$
$$\sigma_C = \sigma\left(-\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right) = 153{,}50\ \text{MPa}$$
$$\sigma_D = \sigma\left(\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right) = 95{,}90\ \text{MPa}$$



Naprężenia maksymalne: $|\sigma_{max}| = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = 153{,}50\ \text{MPa}$

Równanie osi obojętnej w układzie głównych centralnych osi bezwładności:

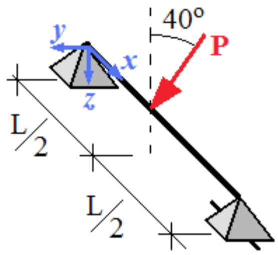
$$\sigma(y,z) = \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y = 0 \quad\Rightarrow\quad z = \frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z}y \quad\Rightarrow\quad z = -10{,}83\,y$$

$$\gamma = \text{arctg}\left[\frac{I_y}{I_z}\cdot\frac{M_z}{M_y}\right] = -84{,}73^\circ$$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

ZADANIE 10.10

Dana jest belka o długości $L=5\,\text{m}$ swobodnie podparta, obciążona w środku przęsła siłą skupioną $P=40\,\text{kN}$ nachyloną pod kątem $\alpha=40^\circ$ do słabszej głównej centralnej osi bezwładności profilu IPE. Dobrać minimalny profil IPE zdolny przenieść zadane obciążenie., jeśli $k_r=225\ \text{MPa}$.

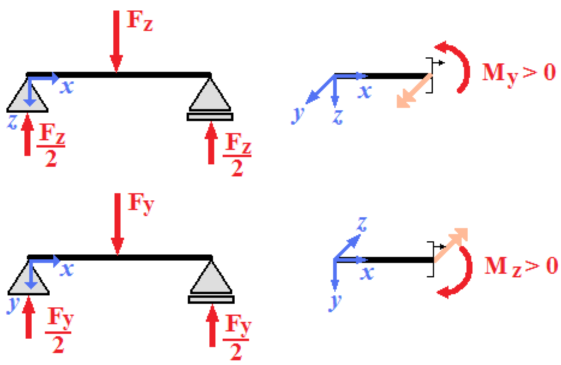


Rozkład siły poprzecznej:

$$F_z = P\cos\alpha = 30{,}64\ \text{kN}$$

$$F_y = P\sin\alpha = 25{,}71\ \text{kN}$$

Maksymalne momenty zginające (w środku przęsła):



$$M_y = \frac{F_z L}{4} = \frac{P L}{4}\cos\alpha = 38{,}3\ \text{kNm}$$

$$M_z = -\frac{F_z L}{4} = -\frac{P L}{4}\sin\alpha = -32{,}14\ \text{kNm}$$

Maksymalne naprężenia normalne w przekroju bisymetrycznym są równe:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}$$

Należy dobrać taki profil IPE, dla którego $\sigma_{max} < k_r$. Mamy do dyspozycji tylko jedno równanie z dwoma niewiadomymi W_y i W_z. Dla profili IPE stosunek $W_y/W_z=5{,}6\div 9{,}6$. Na potrzeby obliczeń przyjmujemy $W_y = 7{,}6 W_z$.

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{7{,}6 W_z} + \frac{|M_z|}{W_z} < k_r \qquad \Rightarrow \qquad W_z > \frac{|M_y| + 7{,}6|M_z|}{7{,}6 k_r} = 165{,}24\,\text{cm}^3$$

Najmniejszym profilem IPE o $W_z > 165{,}24\ \text{cm}^3$ jest IPE 450.

$$W_y^{\text{IPE450}} = 1499{,}69\ \text{cm}^3 \qquad W_z^{\text{IPE450}} = 176{,}41\ \text{cm}^3$$

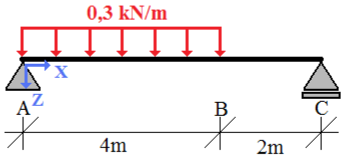
W ogólności, należy się spodziewać, że w przypadku wybranego przekroju, zależność $W_y = 7{,}6 W_z$ nie jest spełniona – została ona przyjęta tylko na potrzeby wstępnego, szacunkowego doboru przekroju. W rzeczywistości $W_y/W_z=8{,}5$. Konieczne jest zatem sprawdzenie, czy przekrój ten rzeczywiście przenosi zadane obciążenie.

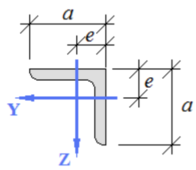
SPRAWDZENIE: Naprężenia maksymalne: $\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} = 207{,}73\ \text{MPa}$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

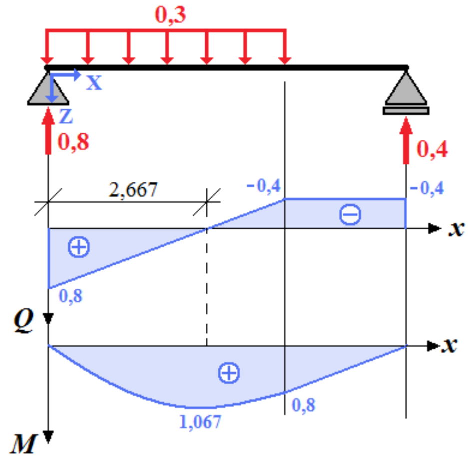
ZADANIE 10.11

Dana jest belka obciążona jak na rysunku. Belka wykonana jest z kątownika równoramiennego $L\,120\times120\times10$ ułożonego w ten sposób, że jedno z jego ramion leży w płaszczyźnie obciążenia, drugie zaś jest do niej prostopadłe. Wyznaczyć rozkład naprężeń w przekroju występowania maksymalnego momentu zginającego. Wyznaczyć naprężenie ekstremalne.





Na początku trzeba zlokalizować przekrój występowania największego momentu zginającego.



Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = H_A = 0$$

$$\Sigma M_A = -0{,}3\cdot4\cdot2+6\cdot V_B = 0 \quad\Rightarrow\quad V_B = 0{,}4$$

$$\Sigma Y = V_A - 0{,}3\cdot4+V_B = 0 \quad\Rightarrow\quad V_B = 0{,}8$$

Rozkład sił poprzecznych i momentów zginających:

$AB: x\in(0\ ;\ 4)$

$$\begin{cases} Q(x) = 0{,}8-0{,}3\cdot x \\ M(x) = 0{,}8\,x - 0{,}3\cdot x\cdot\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$BC: x\in(4\ ;\ 6)$

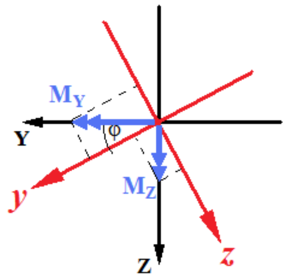
$$\begin{cases} Q(x) = -0{,}4 \\ M(x) = 0{,}4\cdot(6-x) \end{cases}$$

Na przedziale AB może występować lokalne ekstremum rozkładu momentów zginających pod obciążeniem ciągłym:

$$Q_{AB} = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{8}{3} \approx 2{,}667 \in AB \quad\Rightarrow\quad M_{max} = M\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{15} \approx 1{,}067 \quad [\text{kNm}]$$

Osie równoległe do ramion kątownika nie są jego głównymi osiami bezwładności – wektor momentu jest równoległy do ramion kątownika, jest to zatem przypadek zginania ukośnego. Konieczny jest rozkład obciążenia na kierunku osi głównych, wyznaczenie momentów bezwładności względem tych osi oraz wyznaczenie współrzędnych punktów skrajnych w układzie osi głównych.

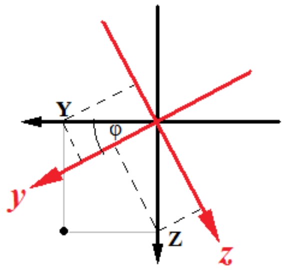
Rozkład momentu zginającego:



$$M_y = M_Y\cdot\cos\varphi + M_Z\cdot\sin\varphi$$

$$M_z = M_Z\cdot\cos\varphi - M_Y\cdot\sin\varphi$$

Zmiana współrzędnych punktu przy obrocie układu współrzędnych:



$$y = Y\cdot\cos\varphi + Z\cdot\sin\varphi$$

$$z = Z\cdot\cos\varphi - Y\cdot\sin\varphi$$

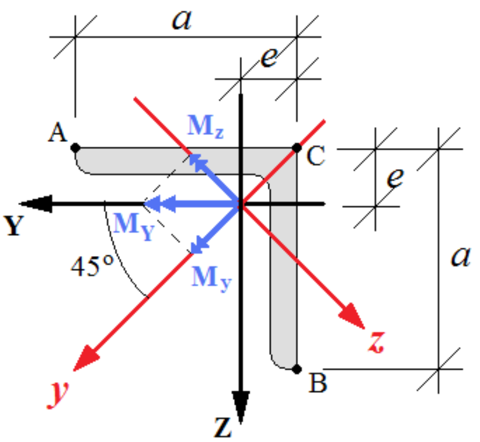
© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Dla kątownika równoramiennego w orientacji jak na rysunku mamy $\varphi = 45^\circ$.
Charakterystyki geometryczne $L\ 120\times 120\times 10$:

$$I_y = I_{max} = 497\ \text{cm}^4 \qquad I_z = I_{min} = 129\ \text{cm}^4 \qquad a = 12\ \text{cm} \qquad e = 3{,}31\ \text{cm}$$

Rozkład momentów zginających:

$$\begin{matrix} M_Y = M_{max} \\ M_Z = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} M_y = M_{max}\cdot\cos\varphi = 754{,}2\ \text{Nm} \\ M_z = -M_{max}\cdot\sin\varphi = -754{,}2\ \text{Nm} \end{matrix}$$



Rozkład naprężeń przy zginaniu ukośnym jest liniowy – największe naprężenia występują w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej – bardzo często są to skrajne punktu przekroju – tutaj oznaczono je jako A, B i C.

Współrzędne punktów skrajnych w układzie centralnym YZ:

$$\begin{aligned} &A(a-e\ ;\ -e) = (8{,}69\ ;\ -3{,}31) \\ &B(-e\ ;\ a-e) = (-3{,}31\ ;\ 8{,}69) \qquad [\text{cm}] \\ &C(-e\ ;\ -e) = (-3{,}31\ ;\ -3{,}31) \end{aligned}$$

Współrzędne punktów skrajnych w układzie głównym centralnym yz:

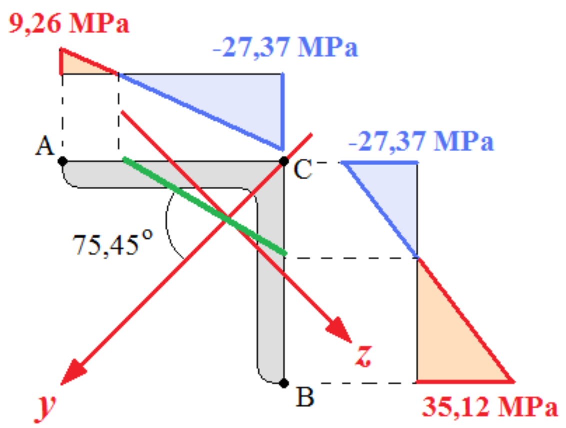
$$\begin{aligned} &A(Y_A\cdot\cos\varphi + Z_A\cdot\sin\varphi\ ;\ Z_A\cdot\cos\varphi - Y_A\cdot\sin\varphi) = (3{,}80\ ;\ -8{,}49) \\ &B(Y_B\cdot\cos\varphi + Z_B\cdot\sin\varphi\ ;\ Z_B\cdot\cos\varphi - Y_B\cdot\sin\varphi) = (3{,}80\ ;\ 8{,}49) \qquad [\text{cm}] \\ &A(Y_A\cdot\cos\varphi + Z_A\cdot\sin\varphi\ ;\ Z_A\cdot\cos\varphi - Y_A\cdot\sin\varphi) = (-4{,}68\ ;\ 0) \end{aligned}$$

Naprężenia w punktach skrajnych: $\sigma(y,z) = \dfrac{M_y}{I_y}\cdot z - \dfrac{M_z}{I_z}\cdot y$

$$\begin{aligned} &\sigma_A = \sigma(y_A\ ,\ z_A) = 9{,}36\ \text{MPa} \\ &\sigma_B = \sigma(y_B\ ,\ z_B) = 35{,}12\ \text{MPa} \\ &\sigma_C = \sigma(y_C\ ,\ z_C) = -27{,}37\ \text{MPa} \end{aligned}$$

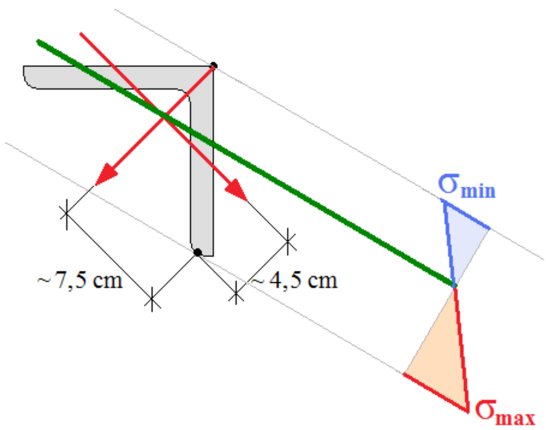
Równanie osi obojętnej: $z = \dfrac{M_z}{M_y}\dfrac{I_y}{I_z}\cdot y \quad \Rightarrow \quad z = -3{,}853\, y$

Kąt nachylenia osi obojętnej: $\gamma = \text{arctg}\dfrac{M_z}{M_y}\dfrac{I_y}{I_z} = -75{,}45^\circ$



© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Jeśli przekrój ma taki kształt, dla którego trudno pewnie wskazać punkt najbardziej oddalony od osi obojętnej (szczególnie w obecności wyokrągleń półek itp.), wtedy poszukujemy go np. wykreślnie – poszukujemy takiego punktu na konturze przekroju, do którego prosta równoległa do osi obojętnej jest styczna i nie przecina przekroju w żadnym innym miejscu. Określenie współrzędnych dokładnych tego punktu może być trudne – można to jednak zrobić w sposób przybliżony na podstawie sporządzonego rysunku.



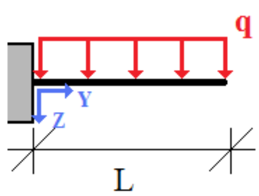
Punkt występowania największych naprężeń ściskających pokrywa się z punktem C. Punkt występowania największych naprężeń rozciągających znajduje się w pobliżu punktu B. Maksymalne naprężenia rozciągające:

$$\sigma_A = \sigma(y \approx 4{,}5\,\text{cm}\ ,\ z \approx 7{,}5\,\text{cm}) \approx 38\ \text{MPa}$$

Ostatecznie, można napisać: $\sigma_{min} \approx -28\ \text{MPa}$
$\sigma_{max} \approx 38\ \text{MPa}$

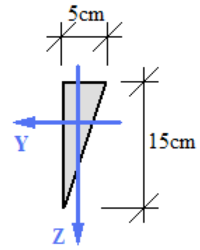
ZADANIE 10.12

Dobrać maksymalną wartość parametru obciążenia q żeliwnego wspornika długości $L = 1{,}5\,\text{m}$ o przekroju trójkątnym jak na rysunku. Wyznaczyć rozkład naprężeń. Dla żeliwa przyjąć:



wytrzymałość na rozciąganie: $k_r = 130\ \text{MPa}$
wytrzymałość na ściskanie: $k_c = 180\ \text{MPa}$

Charakterystyki geometryczne przekroju: $b = 5\,\text{cm}$ $h = 15\,\text{cm}$



Położenie środka ciężkości: $Y'_C = -\frac{1}{3}b = -1{,}666\ \text{cm}$

$Z'_C = \frac{1}{3}h = 5\ \text{cm}$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_y = I_{max} = \frac{bh}{72}\left[b^2+h^2+\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right] = 482{,}917\ \ \text{cm}^4$$

$$I_z = I_{min} = \frac{bh}{72}\left[b^2+h^2-\sqrt{h^4-h^2b^2+b^4}\right] = 37{,}917\ \ \text{cm}^4$$

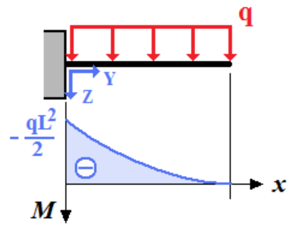
$$\varphi = \text{arctg}\frac{h^2-b^2-\sqrt{h^4-b^2h^2+b^4}}{bh} = -10{,}278^\circ$$

Współrzędne wierzchołków trójkąta przekroju w układzie centralnym YZ:

$A(1{,}666\ ;\ -5)$ $B(1{,}666\ ;\ 10)$ $C(-3{,}333\ ;\ -5)$ [cm]

Współrzędne wierzchołków trójkąta przekroju w układzie głównym centralnym *yz*:

$$A\left(Y_A\cos\varphi+Z_A\sin\varphi\ ;\ Z_A\cos\varphi-Y_A\sin\varphi\right)=\left(2{,}531\ ;\ -4{,}623\right)\quad[\text{cm}]$$
$$B\left(Y_B\cos\varphi+Z_B\sin\varphi\ ;\ Z_B\cos\varphi-Y_B\sin\varphi\right)=\left(-0{,}145\ ;\ 10{,}137\right)\quad[\text{cm}]$$
$$C\left(Y_C\cos\varphi+Z_C\sin\varphi\ ;\ Z_C\cos\varphi-Y_C\sin\varphi\right)=\left(-2{,}387\ ;\ -5{,}514\right)\quad[\text{cm}]$$

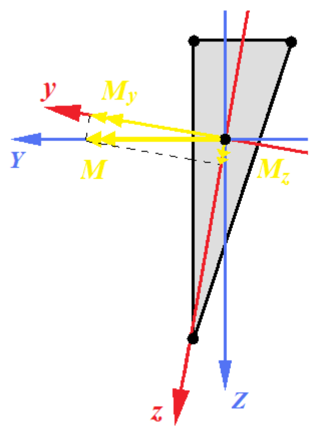


Maksymalny moment zginający belkę (w przekroju utwierdzenia)

$$M_{max}=-\frac{qL^2}{2}=-1{,}125q$$

Rozkład momentu zginającego:

$$M_y=M_{max}\cdot\cos\varphi=-1{,}107q\qquad M_z=-M_{max}\cdot\sin\varphi=-0{,}201q$$



Rozkład naprężeń normalnych: $\sigma(y,z)=\frac{M_y}{I_y}\cdot z-\frac{M_z}{I_z}\cdot y$

Równanie osi obojętnej: $\sigma(y,z)=\frac{M_y}{I_y}\cdot z-\frac{M_z}{I_z}\cdot y=0$

$$z=\frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z}\cdot y\qquad\Rightarrow\qquad z=2{,}313y$$

Kąt nachylenia osi obojętnej: $\gamma=\text{arctg}\frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z}=66{,}62^\circ$

Ekstremalne naprężenia pojawiają się w punktach skrajnych przekroju. Wartości naprężeń w narożach (wartości wszystkich parametrów podstawiamy w jednostkach układu SI):

$$\sigma_A=24014{,}356q\qquad\sigma_B=-24005{,}894q\qquad\sigma_C=-13{,}763q$$

Maksymalną wartość parametru obciążenia q wyznaczamy przyrównując ekstremalne naprężenia do wartości granicznych:

Największe naprężenie rozciągające (punkt *A*):

$$|\sigma_A|\leqslant k_r\quad\Rightarrow\quad q\leqslant\frac{130\cdot10^6}{24014{,}356}=5{,}413{,}429\quad[\text{N/m}]$$

Największe naprężenie ściskające (punkt *B*):

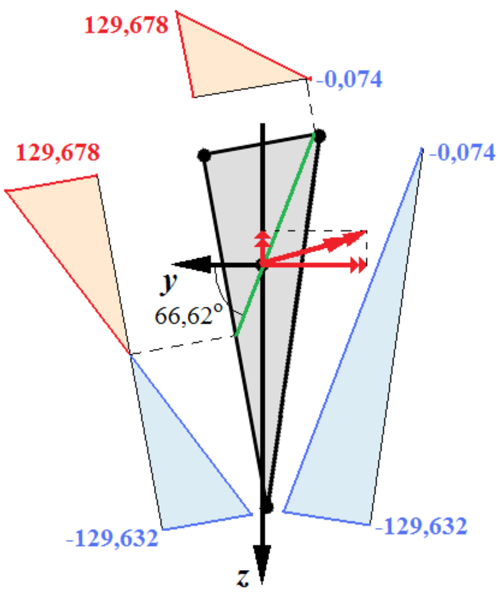
$$|\sigma_B|\leqslant k_c\quad\Rightarrow\quad q\leqslant\frac{180\cdot10^6}{24005{,}894}=7498{,}159\quad[\text{N/m}]$$

Przyjmując obciążenie $q=5{,}4\ \text{kN/m}$:

$$M_{max}=-6{,}075\ \text{kNm}$$

$$M_y=-5{,}978\ \text{kNm}$$
$$M_z=-1{,}085\ \text{kNm}$$

$$\sigma_A=129{,}678\ \text{MPa}$$
$$\sigma_B=-129{,}632\ \text{MPa}$$
$$\sigma_C=-0{,}074\ \text{MPa}$$



ZADANIE 10.13
Sprawdzić, jak zmieniłaby się wartość maksymalnego naprężenia normalnego we wzmocnionym profilu zginanym z zadania nr 10.5, gdyby zamiast dwóch nakładek o grubości $t=8\,\text{mm}$ przyspawanych po obu stronach C200, zastosować tylko jedną o dwukrotnie większej grubości, przyspawaną do jednej z półek.

Po dołączeniu do profilu C200 nakładki tylko z jednej strony (np. do górnej półki) przekrój staje się niesymetryczny – zmienia ulegają nie tylko wartości charakterystyk geometrycznych, ale również orientacja głównych centralnych osi bezwładności. W takiej sytuacji wektor momentu zginającego nie jest już równoległy do którejś z takich osi i zagadnienie zginania prostego przechodzi w zginanie ukośne.

Charakterystyki geometryczne profilów składowych:

C200:

$A_{C200} = 32{,}2\ \text{cm}^2$

$I_{y,C200} = 1910\ \text{cm}^4$

$I_{z,C200} = 148\ \text{cm}^2$

$D_{yz,C200}=0$

$h=20\ \text{cm}$

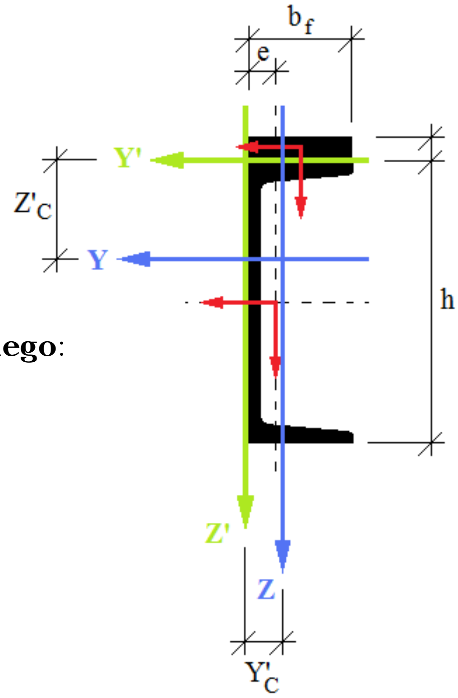
$b_f = 7{,}5\ \text{cm}$

$e = 2{,}01\ \text{cm}$

Nakładka:

$t=16\,\text{mm}$

$b = 7{,}5\,\text{cm}$



Charakterystyki geometryczne przekroju wzmocnionego:

Pole powierzchni:

$$A = [32{,}2]+[1{,}6\cdot 7{,}5] = 44{,}2 \quad [\text{cm}^2]$$

Momenty statyczne względem pomocniczych osi $Y'Z'$:

$$S_{Y'}=[32{,}2\cdot 10]+[1{,}6\cdot 7{,}5\cdot(-0{,}8)] = 312{,}4 \quad [\text{cm}^3]$$

$$S_{Z'}=[32{,}2\cdot(-2{,}01)]+[1{,}6\cdot 7{,}5\cdot(-3{,}75)] = -109{,}722 \quad [\text{cm}^3]$$

Położenie środka ciężkości:

$$Y'_C = \frac{S_{Z'}}{A} = -2{,}482 \quad [\text{cm}], \qquad Z'_C = \frac{S_{Y'}}{A} = 7{,}068 \quad [\text{cm}]$$

Centralne momenty bezwładności i moment dewiacji:

$$I_Y = \left[1910+32{,}2\cdot(10-7{,}068)^2\right]+\left[\frac{1{,}6^3\cdot 7{,}5}{12}+1{,}6\cdot 7{,}5\cdot(-0{,}8-7{,}068)^2\right] = 2932{,}236 \quad [\text{cm}^4]$$

$$I_Z = \left[148+32{,}2\cdot(-2{,}01+2{,}482)^2\right]+\left[\frac{1{,}6\cdot 7{,}5^3}{12}+1{,}6\cdot 7{,}5\cdot(-3{,}75+2{,}482)^2\right] = 230{,}718 \quad [\text{cm}^4]$$

$$D_{YZ}=[0+32{,}2\cdot(10-7{,}068)(-2{,}01+2{,}482)]+[0+1{,}6\cdot 7{,}5\cdot(-0{,}8-7{,}068)(-3{,}75+2{,}482)]=164{,}281 \quad [\text{cm}^4]$$

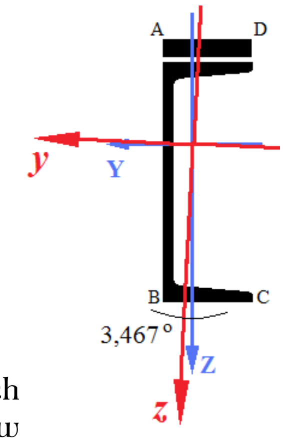
Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_{max} = I_y = \frac{I_Y+I_Z}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_Y-I_Z}{2}\right)^2+D_{YZ}^2} = 2942{,}190 \quad [\text{cm}^4]$$

$$I_{min} = I_z = \frac{I_Y+I_Z}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_Y-I_Z}{2}\right)^2+D_{YZ}^2} = 220{,}764 \quad [\text{cm}^4]$$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{D_{YZ}}{I_Z - I_{max}} = -3{,}467^{\circ}$$



Rozkład maksymalnego momentu zginającego (wg zadania 5) w osiach głównych:

$$M_{max} = 60\ \mathrm{kNm}$$
$$M_y = M_{max} \cdot \cos\varphi = 59{,}890\,\mathrm{kNm}$$
$$M_z = -M_{max} \cdot \sin\varphi = 3{,}628\,\mathrm{kNm}$$

Maksymalne naprężenia występować będą w punktach położonych najdalej od osi obojętnej. Sprawdzamy wartości naprężeń w wybranych skrajnych punktach przekroju:

Współrzędne punktów skrajnych w układzie centralnym YZ:

$A(2{,}482\ ;\ -8{,}668)$, $B(2{,}482\ ;\ 12{,}932)$, $C(-5{,}018\ ;\ 12{,}932)$, $D(-5{,}018\ ;\ -8{,}668)$

Współrzędne punktów skrajnych w układzie głównym centralnym yz:

$$A\left(Y_A \varphi + Z_A \sin\varphi\ ;\ Z_A \cos\varphi - Y_A \sin\varphi\right) = \left(3{,}002\ ;\ -8{,}502\right)$$
$$B\left(Y_B \varphi + Z_B \sin\varphi\ ;\ Z_B \cos\varphi - Y_B \sin\varphi\right) = \left(1{,}695\ ;\ 13{,}058\right)$$
$$C\left(Y_C \varphi + Z_C \sin\varphi\ ;\ Z_C \cos\varphi - Y_C \sin\varphi\right) = \left(-5{,}791\ ;\ 12{,}605\right)$$
$$D\left(Y_D \varphi + Z_D \sin\varphi\ ;\ Z_D \cos\varphi - Y_D \sin\varphi\right) = \left(-4{,}485\ ;\ -8{,}956\right)$$

Naprężenia w punktach skrajnych: $\sigma(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$

$$\sigma_A = -222{,}393\ \ \mathrm{MPa}$$
$$\sigma_B = 237{,}950\ \ \mathrm{MPa}$$
$$\sigma_C = 351{,}746\ \ \mathrm{MPa}$$
$$\sigma_D = -108{,}597\ \ \mathrm{MPa}$$

Przekrój musiał być wzmocniony, ponieważ maksymalne naprężenia w niewzmocnionym profilu C200 w przekroju występowania maksymalnego momentu zginającego wyniosłyby:

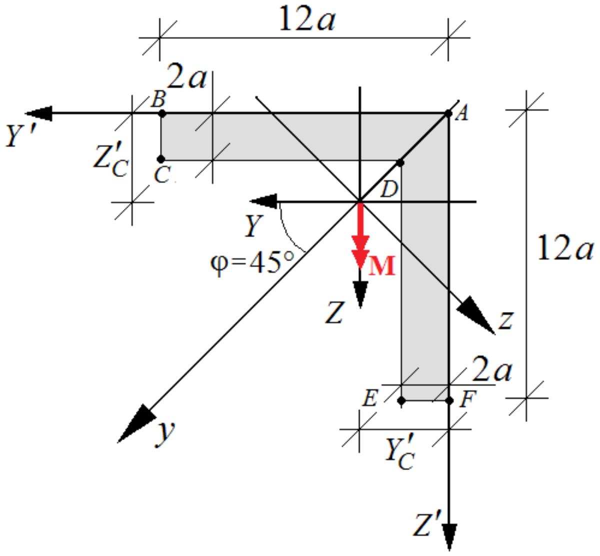
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{C200}} = 314{,}136\ \mathrm{MPa}\ \ ,$$

co znacznie przekracza dopuszczalną wartość $f_d = 215\ \mathrm{MPa}$ (patrz: zadanie 10.5). Zastosowanie symetrycznie ułożonych nakładek grubości 8 mm, pozwoliło zredukować naprężenia do poziomu 201,96 MPa. Zastosowanie pojedynczej nakładki grubości 16 mm w rzeczywistości doprowadziło do osłabienia przekroju – zastosowanie grubej blachy z jednej tylko strony, przesunęło środek ciężkości przekroju w jej stronę, co doprowadziło, do znacznego oddalenia włókien skrajnych od osi obojętnej. Zwiększenie bezwładności przekroju okazałoby się względnie mniejsze niż oddalenie tych włókien, co spowodowałoby, że naprężenia w przekroju „wzmocnionym" uległyby nawet powiększeniu w stosunku do przekroju niewzmocnionego do wartości 351,75 MPa, tj. o blisko 12%.

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

ZADANIE 10.14

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w kątowniku zginanym momentem M jak na rysunku:



Pole powierzchni przekroju:

$$A = 2a \cdot 2a + 2 \cdot 10a \cdot 2a = 44a^2$$

Przekrój jest symetryczny – oś symetrii nachylona jest pod kątem 45° do osi poziomej i pionowej. Jedna z głównych centralnych osi bezwładności musi pokrywać się z osią symetrii. Ponieważ wektor momentu zginającego nie leży na kierunku osi symetrii, zatem mamy do czynienia ze zginaniem ukośnym. Środek ciężkości musi leżeć na osi symetrii. Ponieważ jej orientacja jest znana, wystarczy znaleźć jedną współrzędną środka ciężkości w dowolnym układzie.

Moment statyczny względem osi poziomej zawierającej górną krawędź kątownika:

$$S_{Y'} = 10a \cdot 2a \cdot a + 12a \cdot 2a \cdot 6a = 164a^3$$

Współrzędne środka ciężkości w przyjęty układzie osi (Y,Z):

$$Z_C' = \frac{S_{Y'}}{A} = \frac{41}{11}a \approx 3{,}727a \qquad Y_C' = Z_C' \approx 3{,}727a$$

Momenty bezwładności względem centralnych osi bezwładności (poziomej i pionowej):

$$I_Y = I_Z = \left[\frac{10a\cdot(2a)^3}{12} + 10a\cdot 2a\cdot\left(a - \frac{41}{11}a\right)^2\right] + \left[\frac{2a\cdot(12a)^3}{12} + 12a\cdot 2a\cdot\left(6a - \frac{41}{11}a\right)^2\right] = \frac{18724}{33}a^4 \approx 567{,}394a^4$$

$$D_{YZ} = \left[0 + 10a\cdot 2a\cdot\left(a - \frac{41}{11}a\right)\cdot\left(7a - \frac{41}{11}a\right)\right] + \left[0 + 12a\cdot 2a\cdot\left(6a - \frac{41}{11}a\right)\cdot\left(a - \frac{41}{11}a\right)\right] = -\frac{3600}{11}a^4 \approx -327{,}272a^4$$

Główne centralne momenty bezwładności znajdujemy jako wartości własne tensora bezwładności, lub poprzez obrót tensora bezwładności o 45°:

$$I_y = I_{max} = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_Z}{2}\right)^2 + D_{YZ}^2} = \frac{2684}{3}a^4 \approx 894{,}667a^4$$

$$I_z = I_{min} = \frac{I_Y + I_Z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_Z}{2}\right)^2 + D_{YZ}^2} = \frac{7924}{33}a^4 \approx 240{,}121a^4$$

Współrzędne punktów konturu w układzie centralnym (Y,Z):

$$A = \left(-\frac{41}{11}, -\frac{41}{11}\right)a \qquad B = \left(\frac{91}{11}, -\frac{41}{11}\right)a \qquad C = \left(\frac{91}{11}, -\frac{19}{11}\right)a$$

$$D = \left(-\frac{19}{11}, -\frac{19}{11}\right)a \qquad E = \left(-\frac{19}{11}, \frac{91}{11}\right)a \qquad F = \left(-\frac{41}{11}, \frac{91}{11}\right)a$$

Współrzędne punktów konturu u układzie głównym centralnym transformują się wg wzoru:

$$y = Y\cos\varphi + Z\sin\varphi$$
$$z = -Y\sin\varphi + Z\cos\varphi$$

$$A=\left(-\frac{82}{11},0\right)\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad B=\left(\frac{50}{11},-\frac{132}{11}\right)\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad C=\left(\frac{72}{11},-\frac{110}{11}\right)\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$D=\left(-\frac{38}{11},0\right)\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad E=\left(\frac{72}{11},\frac{110}{11}\right)\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad F=\left(\frac{50}{11},\frac{132}{11}\right)\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Rozkład wektora momentu zginającego w układzie osi głównych centralnych:

$$M_y=M\sin\varphi=\frac{M}{\sqrt{2}} \qquad M_z=M\cos\varphi=\frac{M}{\sqrt{2}}$$

Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma(y,z)=\frac{M_y}{I_y}\cdot z-\frac{M_z}{I_z}\cdot y=\frac{M}{a^4\sqrt{2}}\left[\frac{3z}{2684}-\frac{33y}{7924}\right]$$

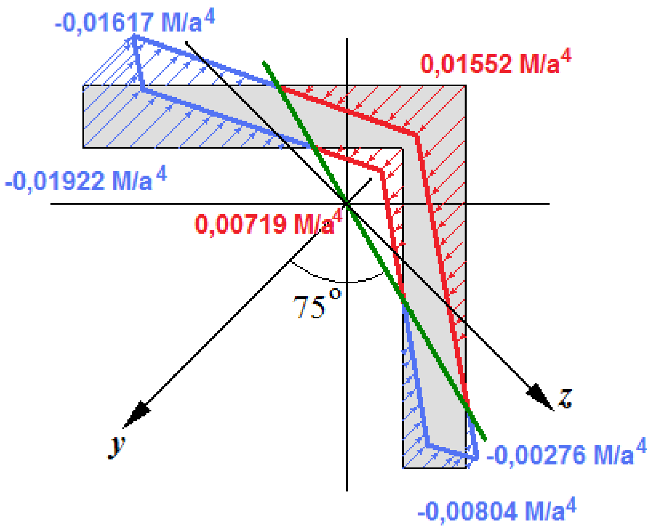
Równanie osi obojętnej:

$$\sigma=0 \quad\Rightarrow\quad z=3{,}726\,y$$

Kąt nachylenia osi obojętnej:

$$\gamma=\mathrm{arctg}\frac{M_z}{M_y}\frac{I_y}{I_z}\approx 75^\circ$$

$$\sigma_A=0{,}01552\frac{M}{a^4}$$
$$\sigma_B=-0{,}01617\frac{M}{a^4}$$
$$\sigma_C=-0{,}01922\frac{M}{a^4}$$
$$\sigma_D=0{,}00719\frac{M}{a^4}$$
$$\sigma_E=-0{,}00804\frac{M}{a^4}$$
$$\sigma_F=-0{,}00276\frac{M}{a^4}$$

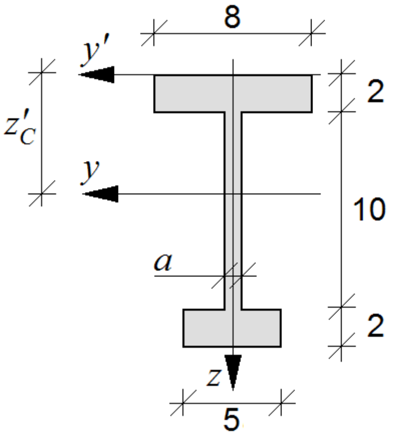


© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Zginanie poprzeczne

ZADANIE 10.15

Wyznaczyć rozkład naprężeń stycznych w przekroju dwuteowym jak na rysunku poniżej.



Wzór na naprężenia styczne: $\tau = \dfrac{Q \cdot S_y(z)}{b(z) I_y}$

Konieczne jest wyznaczenie środka ciężkości oraz głównego centralnego momentu bezwładności przekroju.

$$A = [8 \cdot 2] + [10 \cdot 1] + [2 \cdot 5] = 36$$

$$S_{y'} = [8 \cdot 2 \cdot 1] + [10 \cdot 1 \cdot 7] + [2 \cdot 5 \cdot 13] = 216$$

$$z_C' = \frac{S_{y'}}{A} = 6$$

Moment bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności:

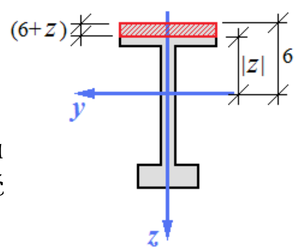
$$I_y = \left[\frac{8 \cdot 2^3}{12} + 8 \cdot 2 \cdot (1-6)^2\right] + \left[\frac{1 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 1 \cdot (7-6)^2\right] + \left[\frac{5 \cdot 2^3}{12} + 5 \cdot 2 \cdot (13-6)^2\right] = 992 \qquad [\mathrm{mm}^4]$$

Zmienność szerokości przekroju po jego wysokości:

$$b(z) = \begin{cases} 8 & \Leftrightarrow \quad z \in (-6; -4) \\ 1 & \Leftrightarrow \quad z \in (-4; 6) \\ 5 & \Leftrightarrow \quad z \in (6; 8) \end{cases} \qquad [\mathrm{mm}]$$

Moment statyczny odciętej części przekroju względem głównej centralnej osi poziomej – dla każdej wartości z można wyznaczać moment statyczny części leżącej po stronie większych wartości z lub mniejszych wartości z. Co do wartości bezwzględnej, oba te momenty są sobie równe – w tym drugim przypadku jednak, należy zmienić znak tej wielkości.

- $z \in (-6; -4)$ - obszar półki górnej



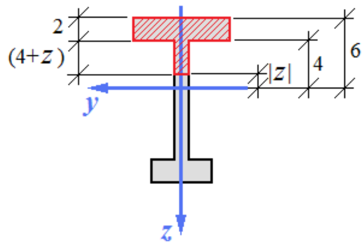
Wyznaczamy moment statyczny górnej części przekroju (odpowiadającej mniejszym wartościom z) – obliczoną wielkość należy wziąć ze znakiem „-”.

Współrzędna z jest ujemna, co trzeba uwzględnić w obliczeniach. Po uwzględnieniu faktu, że $z < 0$:

- Wysokość odciętej części (dodatnia wielkość geometryczna): $(6+z)$
- Współrzędna środka ciężkości odciętej części (ujemna): $\left[z - \frac{1}{2}(6+z)\right]$

$$S_y(z) = -\left[8 \cdot (6+z) \cdot \left[z - \frac{1}{2}(6+z)\right]\right] \qquad [\mathrm{mm}^3]$$

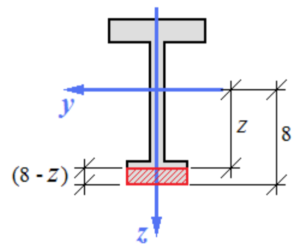
- $z \in (-4;6)$ - obszar środnika



Wyznaczamy moment statyczny górnej części przekroju – obliczoną wielkość należy wziąć ze znakiem „-”.

$$S_y(z) = -\left[8\cdot 2\cdot(-5) + 1\cdot(4+z)\cdot\left[z-\frac{1}{2}(4+z)\right]\right] \quad [\mathrm{mm}^3]$$

- $z \in (6;8)$ - obszar półki dolnej

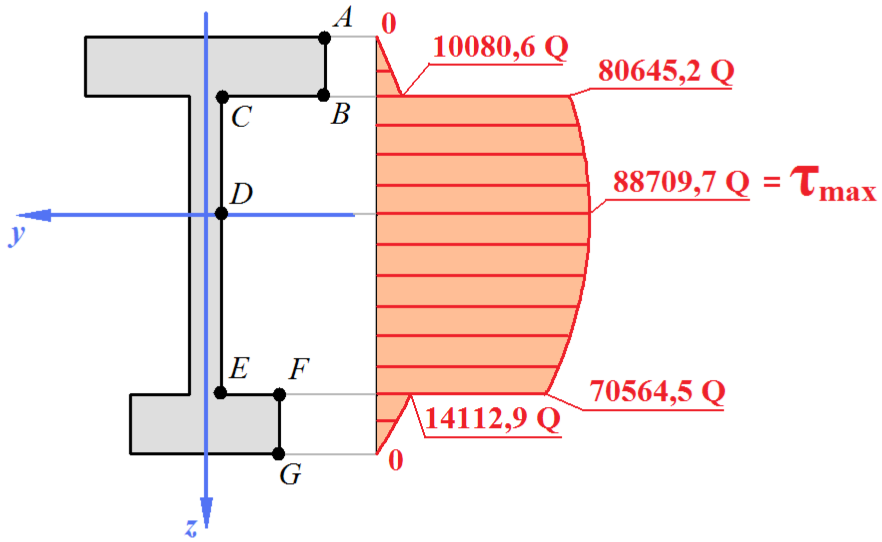


Wyznaczamy moment statyczny dolnej części przekroju (odpowiadającej większym wartościom z) – nie zmieniamy znaku obliczonej wielkości.

$$S_y(z) = 5\cdot(8-z)\cdot\left[z+\frac{1}{2}(8-z)\right] \qquad [\mathrm{mm}^3]$$

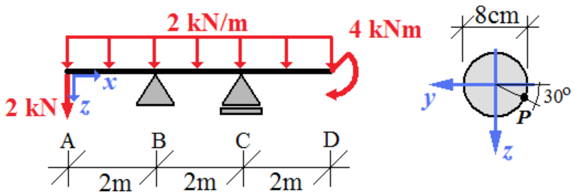
Wartości wyznaczonych wielkości w charakterystycznych punktach przekroju:

Pkt	z [mm]	$S_y(z)$ [mm^3]	$b(z)$ [mm]	$\frac{S_y(z)}{b(z)\cdot I_y}$ $\left[\frac{1}{\mathrm{m}^2}\right]$
A	-6	0	8	0
B	-4	80	8	10080,6
C	-4	80	1	80645,2
D	0	88	1	88709,7
E	6	70	1	70564,5
F	6	70	5	14112,9
G	8	0	5	0



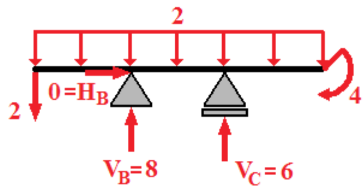
ZADANIE 10.16

Wyznaczyć maksymalne naprężenia normalne i styczne w belce o przekroju kołowym, jak na rysunku. Wyznaczyć stan naprężenia w punkcie P przekroju nad podporą w punkcie C belki.



Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = H_B = 0$$
$$\Sigma M_B = 2\cdot 2 - 2\cdot 6\cdot 1 + V_C\cdot 2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 6$$
$$\Sigma Y = -2-2\cdot 6+V_B+V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B=8$$



Siły przekrojowe:

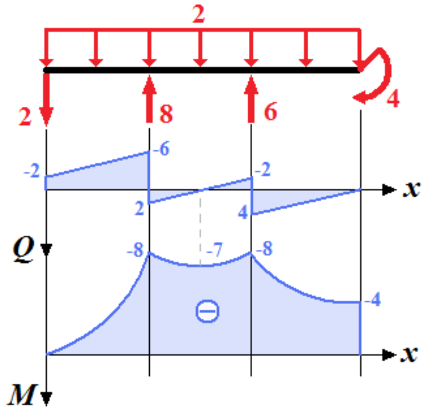
$AB:\ x\in(0;2)$
$$\begin{cases} Q(x) = -2-2\cdot x \\ M(x) = -2\cdot x - \frac{2}{2}\cdot x^2 \end{cases}$$

$BC:\ x\in(2;4)$
$$\begin{cases} Q(x) = -2+8-2\cdot x \\ M(x) = -2\cdot x+8\cdot(x-2)-\frac{2}{2}\cdot x^2 \end{cases}$$

$CD:\ x\in(4;6)$
$$\begin{cases} Q(x) = 2\cdot(6-x) \\ M(x) = -\frac{2}{2}\cdot(6-x)^2-4 \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum lokalnego rozkładu momentów:

$$Q_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1\notin AB$$
$$Q_{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2+8-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=3\in BC$$
$$M(x=3) = -7$$
$$Q_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(6-x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=6\in CD$$
$$M(x=6)=-4$$



Największe naprężenia styczne pojawiają się w przekroju występowania największej siły poprzecznej. Największe naprężenia normalne pojawiają się w przekroju występowania największego momentu zginającego.

Przekrój nad podporą w punkcie belki B, o normalnej zewnętrznej skierowanej w lewo jest przekrojem występowania zarazem największego momentu zginającego i największej siły poprzecznej.

Dla przekroju kołowego o średnicy $D=8\,\mathrm{cm}$:

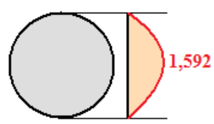
Pole powierzchni: $A = \frac{\pi D^2}{4} = 50{,}265\ \mathrm{cm}^2$

Moment bezwładności przekroju: $I_y = \frac{\pi D^4}{64} = 201{,}062\ \mathrm{cm}^4$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju: $W_y = \frac{\pi D^3}{32} = 50{,}265\ \mathrm{cm}^3$

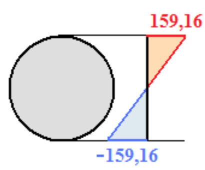
Maksymalne naprężenie styczne:

$$Q_{max} = |Q(x=2^-)| = 6 \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q_{max}}{A} = 1{,}592\ \mathrm{MPa}$$



Maksymalne naprężenie normalne:

$$M_{max} = |M(x=2)| = 8 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} = 159{,}16\ \mathrm{MPa}$$



© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Stan naprężenia w punkcie *P* przekroju nad podporą w punkcie *C*:

Siły przekrojowe w przekroju C:
$$\begin{cases} N = 0 \text{ kN} \\ Q = 4 \text{ kN} \\ M = -8 \text{ kNm} \end{cases}$$

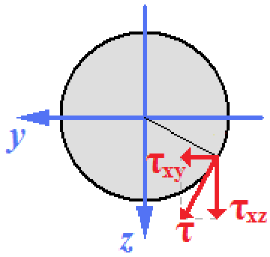
Współrzędne punktu *P*:
$$y_P = -\frac{D}{2}\cos 30^\circ = -3{,}464\,\text{cm}$$
$$z_P = \frac{D}{2}\sin 30^\circ = 2\,\text{cm}$$

Naprężenie normalne σ_{xx} :
$$\sigma = \frac{M}{I_y}\cdot z_P = -79{,}577 \text{ MPa}$$

Naprężenie styczne τ_{xz} :
$$\tau_{xz} = \frac{4Q}{3\pi R^2}\left(1 - \frac{z_P^2}{R^2}\right) = 0{,}796 \text{ MPa}$$

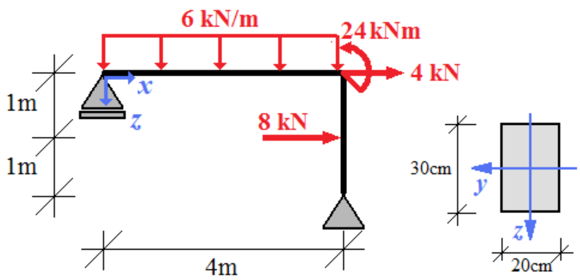
Naprężenie styczne τ_{xy} :
$$\tau_{xy} = -\frac{4Q\,y\,z}{3\pi R^4} = 0{,}459 \text{ MPa}$$

Wypadkowe naprężenie styczne:
$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = 0{,}919 \text{ MPa}$$



ZADANIE 10.17

Wyznaczyć maksymalne naprężenia normalne i styczne w ramie o przekroju prostokątnym, jak na rysunku. Naprężenia normalne od sił osiowych i od zginania dodają się algebraicznie.

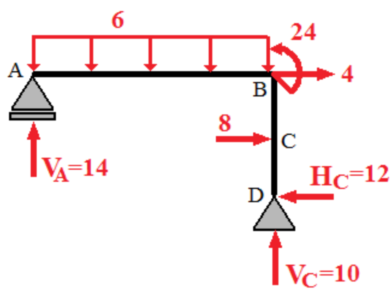


Charakterystyki geometryczne przekroju:

Pole przekroju: $A = b\cdot h = 600 \text{ cm}^2$

Moment bezwładności: $I_y = \dfrac{b h^3}{12} = 45000 \text{ cm}^4$

Wskaźnik wytrzymałości: $W_y = \dfrac{b h^2}{6} = 3000 \text{ cm}^3$



Reakcje podporowe:
$$\Sigma X = 4+8-H_C = 0 \quad\Rightarrow\quad H_C = 12$$
$$\Sigma M_C = -V_A\cdot 4+6\cdot 4\cdot 2+24-4\cdot 2-8\cdot 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad V_C = 14$$
$$\Sigma Y = V_A - 6\cdot 4+V_C = 0 \quad\Rightarrow\quad V_C = 10$$

Siły przekrojowe:

$AB:\ x\in(0;4)$
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = 14-6\cdot x \\ M(x) = 14\cdot x - \frac{6}{2}\cdot x^2 \end{cases}$$

$BC:\ x\in(0;1)$
$$\begin{cases} N(x) = -10 \\ Q(x) = 12-8 \\ M(x) = 8\cdot(1-x) - 12\cdot(2-x) \end{cases}$$

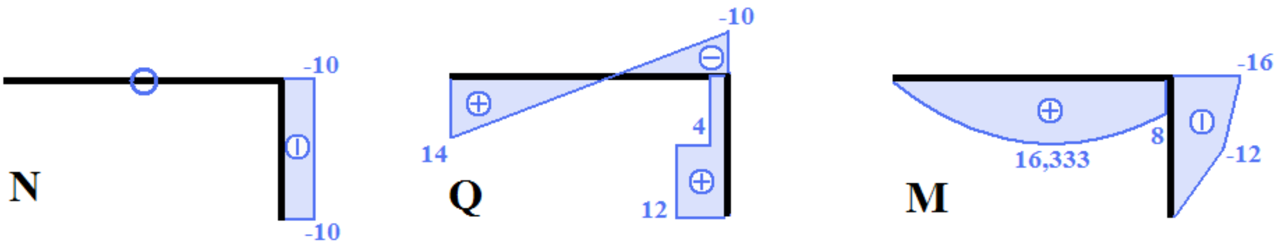
$CD:\ x\in(1;2)$
$$\begin{cases} N(x) = -10 \\ Q(x) = 12 \\ M(x) = -12\cdot(2-x) \end{cases}$$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Ekstremum rozkładu momentów zginających:

$$Q_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad 14 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e = \frac{7}{3} \approx 2{,}333$$

$$M(x_e) = \frac{49}{3} \approx 16{,}333$$

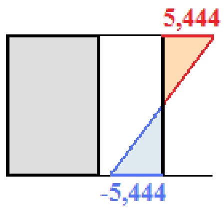


Maksymalne naprężenia normalne występują w przekroju najniekorzystniejszej kombinacji momentu zginającego i siły osiowej:

Przekrój $\alpha - \alpha$ na przedziale AB $(x = 2{,}333)$:

- największy moment zginający i odpowiadająca siła osiowa

$$\begin{cases} M_\alpha = 16{,}333 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad \sigma_M^{max} = \dfrac{M_\alpha}{W_y} = 5{,}444 \text{ MPa} \\ N_\alpha = 0 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \sigma_N^{max} = \dfrac{N_\alpha}{A} = 0 \text{ MPa} \end{cases}$$

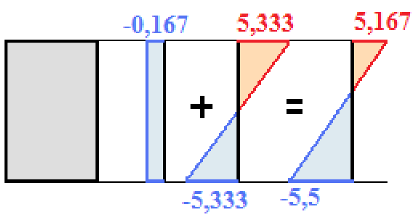


$$|\sigma_{max}| = \frac{|N_\alpha|}{A} + \frac{|M_\alpha|}{W_y} = 5{,}444 \text{ MPa}$$

Przekrój $\beta - \beta$ na przedziale BC $(x = 0)$:

-największa siła osiowa i odpowiadający moment zginający

$$\begin{cases} M_\beta = -16 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad \sigma_M^{max} = \dfrac{M_\beta}{W_y} = 5{,}333 \text{ MPa} \\ N_\beta = -10 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \sigma_N^{max} = \dfrac{N_\beta}{A} = -0{,}167 \text{ MPa} \end{cases}$$

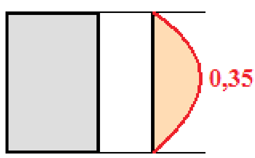


$$|\sigma_{max}| = \frac{|N_\beta|}{A} + \frac{|M_\beta|}{W_y} = 5{,}5 \text{ MPa}$$

Maksymalne naprężenia styczne występują w przekroju największej siły poprzecznej:

Przekrój $\gamma - \gamma$ na przedziale AB $(x = 0)$:

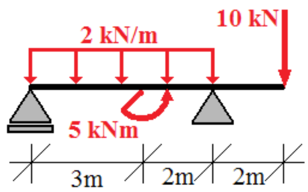
$$Q_\gamma = 14 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_\gamma}{A} = 0{,}35 \text{ MPa}$$

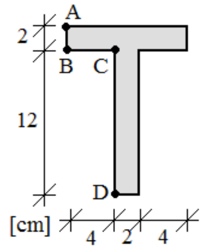


© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

ZADANIE 10.18

Wyznaczyć naprężenia normalne i styczne w punktach A, B, C, D oraz na wysokości środka ciężkości przekroju występowania maksymalnego momentu zginającego nad podporą pośrednią w belce teowej obciążonej jak na rysunku.





Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = H_C = 0$$
$$\Sigma M_A = -2\cdot 5\cdot 2{,}5+5+V_C\cdot 5-10\cdot 7 = 0 \quad\Rightarrow\quad V_C = 18$$
$$\Sigma Y = V_A-2\cdot 5+V_C-10 = 0 \quad\Rightarrow\quad V_A=2$$

Siły przekrojowe:

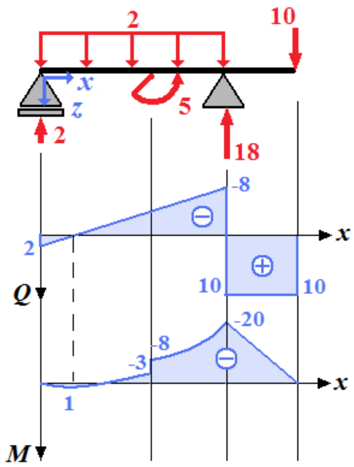
$AB:\ x\in(0;3)$
$$\begin{cases} Q(x) = 2-2\cdot x \\ M(x) = 2\cdot x-\dfrac{2}{2}\cdot x^2 \end{cases}$$

$BC:\ x\in(3;5)$
$$\begin{cases} Q(x) = 2-2\cdot x \\ M(x) = 2\cdot x-\dfrac{2}{2}\cdot x^2-5 \end{cases}$$

$CD:\ x\in(5;7)$
$$\begin{cases} Q(x) = 10 \\ M(x) = -10\cdot(7-x) \end{cases}$$

Poszukiwanie ekstremum lokalnego rozkładu momentów:

$$Q_{AB} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2-2x=0 \quad\Rightarrow\quad x=1\in AB$$
$$M(x=1)=1$$
$$Q_{BC} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2-2x=0 \quad\Rightarrow\quad x=1\notin BC$$



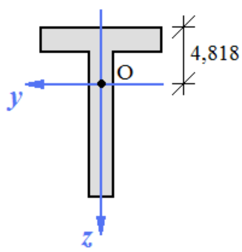
Siły przekrojowe w przekroju nad podporą pośrednią:

$$M = -20 \text{ kNm}$$
$$Q = 10 \text{ kN}$$

Charakterystyki geometryczne przekroju:

Pole powierzchni:

$$A = [10\cdot 2] + [12\cdot 2] = 44 \quad [\text{cm}^2]$$



Położenie środka ciężkości:

$$S_{y'} = [10\cdot 2\cdot 1] + [12\cdot 2\cdot(2+6)] = 212 \quad [\text{cm}^3]$$

$$z'_C = \frac{S_{y'}}{A} = 4{,}818 \quad [\text{cm}]$$

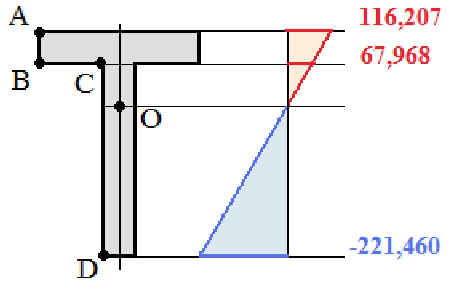
Moment bezwładności względem osi zginania:

$$I_y = \left[\frac{10\cdot 2^3}{12}+10\cdot 2\cdot(1-4{,}818)^2\right] + \left[\frac{2\cdot 12^3}{12}+2\cdot 12\cdot(8-4{,}818)^2\right] = 829{,}212 \quad [\text{cm}^4]$$

© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL

Naprężenia normalne $\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$ $M_y = -20 \cdot 10^3$ Nm
$I_y = 829{,}212 \cdot 10^{-8}$ m^4

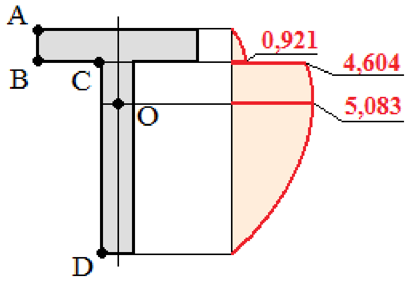
	z [cm]	σ [MPa]
A	-4,818	116,207
B	-2,818	67,968
C	-2,818	67,968
D	9,182	-221,460
O	0,000	0,000



Naprężenia styczne $\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$ $Q_z = 10 \cdot 10^3$ N
$I_y = 829{,}212 \cdot 10^{-8}$ m^4

Moment statyczny odciętej części przekroju $S_y(z)$ w prostych przypadkach – tj. gdy wszystkie figury składowe odciętej części mają swoje środki ciężkości po jednej stronie centralnej osi bezwładności przekroju – można liczyć z pominięciem znaku współrzędnej środka ciężkości i pomijając znak „-” przy rozpatrywaniu części leżącej po stronie mniejszych wartości *z*.

	z [cm]	b [cm]	$S_y(z)$ [cm^3]	τ [MPa]
A	-4,818	10	$S_y = 0$	0,000
B	-2,818	10	$S_y = [2 \cdot 10 \cdot (4{,}818 - 1)] = 76{,}360$	0,921
C	-2,818	2	$S_y = [2 \cdot 10 \cdot (4{,}818 - 1)] = 76{,}360$	4,6
D	9,182	2	$S_y = 0$	0,000
O	0,000	2	$S_y = [2 \cdot (14 - 4{,}818) \cdot (0{,}5 \cdot (14 - 4{,}818))] = 84{,}309$	5,083



© Copyright: Paweł Szeptyński - Creative Commons CC BY-NC-SA 3.0 PL