NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

Zginanie ukośne z rozciąganiem

Naprężenia normalne: $$\sigma(x,y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y$$

Rozciąganie mimośrodowe:

Naprężenia normalne: $$\sigma(x,y) = \frac{N}{A}\cdot\left[1 + \frac{e_z\cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y\cdot y}{i_z^2}\right]$$

Rdzeń przekroju – współrzędne przyłożenia siły osiowej, dla których oś obojętna pokrywa się z prostą konturu przekroju poprzecznego wyznaczoną przez punkty A i B:

$$e_y = i_z^2 \frac{(z_B - z_A)}{z_A(y_B - y_A) - y_A(z_B - z_A)} \qquad e_z = i_y^2 \frac{(y_B - y_A)}{y_A(z_B - z_A) - z_A(y_B - y_A)}$$

Zginanie ze skręcaniem:

Zredukowany moment zginający: $$M_{g,\mathrm{red}} = \sqrt{M_g^2 + \left(\frac{\alpha\cdot M_s}{2}\right)^2}$$

Zredukowany moment skręcający: $$M_{s,\mathrm{red}} = \sqrt{\left(\frac{2}{\alpha}\cdot M_g\right)^2 + M_s^2}$$

- Zginanie jednostronne, skręcanie obustronne $\alpha = 2\sqrt{3}$
- Zginanie obustronne, skręcanie jednostronne $\alpha = \sqrt{3}/2$
- Jednostronne zginanie, jednostronne skręcanie lub obustronne zginanie i obustronne skręcanie $\alpha = \sqrt{3}$

Naprężenia zredukowane:

GALILEUSZ-RANKINE:

Naprężenie zredukowane:

- przypadek ogólny $\sigma_{\mathrm{red}}^{GR} = \sigma_{ekstr} = \max(|\sigma_{max}|, |\sigma_{min}|)$
- proste przypadki wytrzymałościowe: $\sigma_{\mathrm{red}}^{GR} = \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

COULOMB-TRESCA-GUEST:

Naprężenie zredukowane:

- przypadek ogólny $\sigma_{\mathrm{red}}^{CTG} = 2\tau_{ekstr} = |\sigma_{max} - \sigma_{min}|$
- proste przypadki wytrzymałościowe: $\sigma_{\mathrm{red}}^{CTG} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

MAXWELL-HUBER-MISES-HENCKY:

Naprężenie zredukowane:

- przypadek ogólny: $\sigma_{\mathrm{red}}^{MHMH} = \Phi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}$
- proste przypadki wytrzymałościowe: $\sigma_{\mathrm{red}}^{MHMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

ZADANIE 12.1

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju prostokątnym $b\times h$ obciążonym

a) siłą osiową N
b) momentem zginającym M_y
c) momentem zginającym M_y oraz siłą osiową N
d) momentami zginającymi M_y i M_z
e) momentami zginającymi M_y i M_z oraz siłą osiową N

Wprowadźmy typowe oznaczenia:

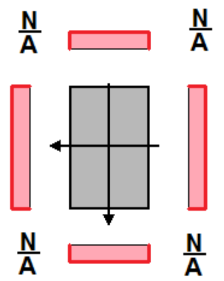
$$A=b\cdot h$$

$$I_y=\frac{b\,h^3}{12}\qquad z_{max}=\frac{h}{2}\qquad z_{min}=-\frac{h}{2}\qquad W_{yd}=\frac{I_y}{z_{max}}=\frac{b\,h^2}{6}=W_y\qquad W_{yg}=\frac{I_y}{z_{min}}=-\frac{b\,h^2}{6}=-W_y$$

$$I_z=\frac{h\,b^3}{12}\qquad y_{max}=\frac{b}{2}\qquad y_{min}=-\frac{b}{2}\qquad W_{zl}=\frac{I_z}{y_{max}}=\frac{h\,b^2}{6}=W_z\qquad W_{zp}=\frac{I_z}{y_{min}}=-\frac{h\,b^2}{6}=-W_z$$

Ogólny wzór na rozkład naprężeń normalnych: $\sigma(y,z)=\frac{N}{A}+\frac{M_y}{I_y}\cdot z+\frac{M_z}{I_z}\cdot y$

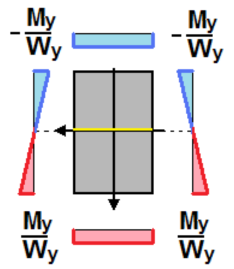
a) <u>Obciążenie siłą osiową N</u> – proste rozciąganie



$$\sigma=\frac{N}{A}=const.$$

- rozkład stały

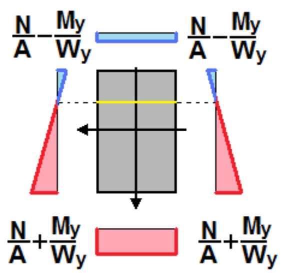
b) <u>Obciążenie momentem zginającym</u> M_y – proste zginanie



$$\sigma=\frac{M_y}{I_y}\cdot z$$

- rozkład liniowy
- oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju
- oś obojętna równoległa do wektora momentu i osi układu

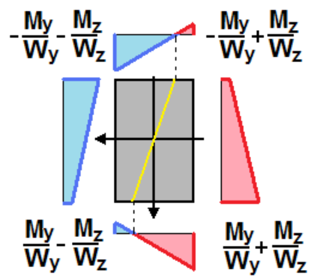
c) <u>Obciążenie momentem zginającym</u> M_y <u>oraz siłą osiową N</u> – proste zginanie z prostym rozciąganiem



$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M_y}{I_y}\cdot z$$

- rozkład liniowy
- oś obojętna przesunięta względem środka ciężkości
- oś obojętna równoległa do wektora momentu i osi układu

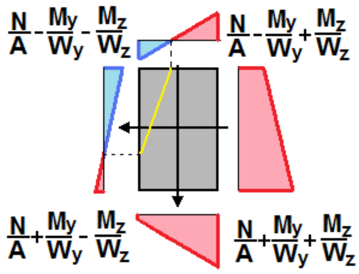
d) <u>Obciążenie momentami zginającymi</u> M_y <u>i</u> M_z – zginanie ukośne



$$\sigma=\frac{M_y}{I_y}\cdot z-\frac{M_z}{I_z}\cdot y$$

- rozkład liniowy
- oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju
- oś obojętna nie jest równoległa ani do wypadkowego wektora momentu ani do osi układu.

e) <u>Obciążenie momentami zginającymi</u> M_y <u>i</u> M_z <u>oraz siłą osiową N</u> – zginanie z rozciąganiem (rozciąganie mimośrodowe)

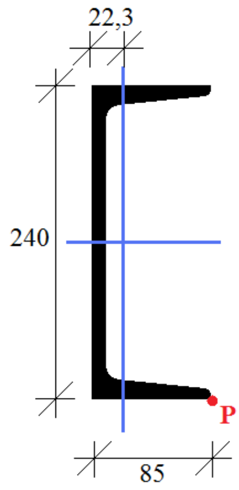


$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

- rozkład liniowy
- oś obojętna przesunięta względem środka ciężkości
- oś obojętna nie jest równoległa ani do wypadkowego wektora momentu ani do osi układu.

ZADANIE 12.2

Ceownik C240 obciążony jest mimośrodowo siłą 50 kN, przyłożoną punkcie *P*. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych.



Charakterystyki geometryczne przekroju C240:

$A = 42{,}30 \text{ cm}^2 \qquad I_y = 3600 \text{ cm}^4 \qquad I_z = 248 \text{ cm}^4$

$i_y = 9{,}22 \text{ cm} \qquad i_z = 2{,}42 \text{ cm}$

Położenie punktu przyłożenia siły:

$$e_y = -b_f + e = -6{,}27 \text{ cm} \qquad e_z = \frac{h}{2} = 12 \text{ cm}$$

Momenty zginające od mimośrodu przyłożenia siły:

$$M_y = N \cdot e_z = 6 \text{ kNm} \qquad M_z = -N \cdot e_y = 3{,}135 \text{ kNm}$$

<u>Rozkład naprężeń normalnych:</u>

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = \frac{N}{A}\left[1 + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2}\right] = 11{,}820 \cdot 10^6 \cdot [14{,}116\, z - 107{,}062\, y + 1] \quad [\text{Pa}]$$

Naprężenia normalne w punktach skrajnych:

$$\sigma_A = \sigma\left(y = e \; ; \; z = \frac{h}{2}\right) = 3{,}622 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \sigma\left(y = e \; ; \; z = -\frac{h}{2}\right) = -36{,}424 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \sigma\left(y = e - b_f \; ; \; z = -\frac{h}{2}\right) = 71{,}145 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = \sigma\left(y = e - b_f \; ; \; z = \frac{h}{2}\right) = 111{,}191 \text{ MPa}$$

Jak widać, mimośrodowe przyłożenie obciążenia osiowego może skutkować występowaniem naprężeń ściskających nawet wtedy, gdy siła osiowa jest rozciągające (i na odwrót).

Dla porównania, naprężenie normalne od rozciągania wyznaczone przy pominięciu wpływu mimośrodu jest ok. 10 razy mniejsze od rzeczywistego naprężenia maksymalnego:

$$\tilde{\sigma} = \frac{N}{A} = 11{,}820 \text{ MPa}$$

<u>Oś obojętna:</u>

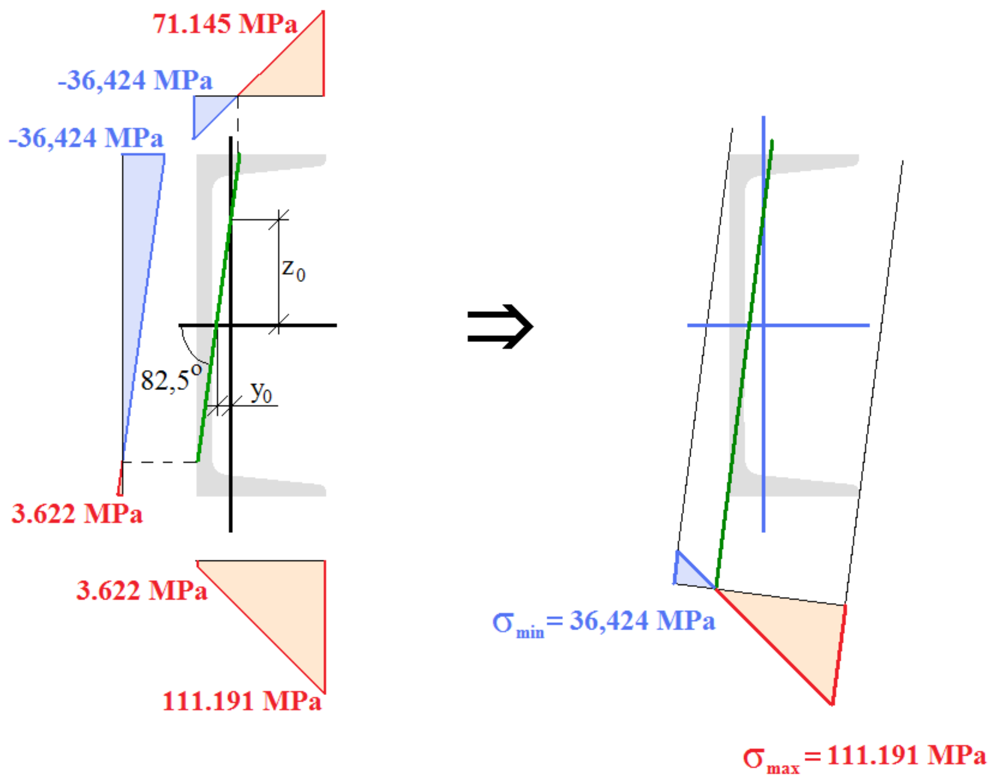
Równanie osi obojętnej: $\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad 14{,}116\, z - 107{,}062\, y + 1 = 0$

Orientacja osi obojętnej: $\operatorname{arctg} \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} = -\operatorname{arctg} \frac{e_y i_y^2}{e_z i_z^2} \approx 82{,}5^\circ$

Punkty przecięcia się osi obojętnej z osiami:

$$z_0 = -\frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y} = -\frac{i_y^2}{e_z} \approx -7{,}1 \text{ cm}$$

$$y_0 = \frac{N}{A} \frac{I_z}{M_z} = -\frac{i_z^2}{e_y} \approx 0{,}94 \text{ cm}$$



ZADANIE 12.3

Stan naprężenia w pewnym punkcie opisany jest tensorem:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 50 & -20 & -30 \\ -20 & 0 & 10 \\ -30 & 10 & -80 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

Wyznaczyć naprężenia zredukowane wg hipotez Galileusza-Rankine'a, Coulomba-Tresci-Guesta oraz Maxwella-Hubera-Misesa-Henckyego.

Aby wyznaczyć naprężenia zredukowane wg hipotez GR i CTG, konieczna jest znajomość naprężeń głównych. Wyznaczamy niezmienniki stanu naprężenia:

- naprężenie hydrostatyczne: $p = \frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = -10$ MPa
- niezmienniki dewiatora naprężenia:

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2\right]+\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right) = 5700 \text{ MPa}^2$$

$$J_3 = (\sigma_x-p)(\sigma_y-p)(\sigma_z-p) + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x-p)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y-p)\tau_{xz}^2 - (\sigma_z-p)\tau_{xy}^2 = -17000 \text{ MPa}^3$$

Wyróżnik równania wiekowego: $\Delta = \frac{1}{4}J_3^2 - \frac{1}{27}J_2^3 = -6786750000 \quad \text{MPa}^6 < 0$

Wyróżnik jest ujemny, zatem tensor naprężenia ma trzy różne wartości własne.

Wyznaczamy kolejne niezmienniki:

- Naprężenie dewiatorowe: $q = \sqrt{2J_2} = 106{,}771 \quad \text{MPa}$
- Kąt Lodego: $\theta = \frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} = 0{,}55787 \quad \text{rad}$

Naprężenia główne:

$$\sigma_{k+1} = p + \sqrt{\frac{2}{3}}\,q\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = 63{,}960 \quad \text{MPa} = \sigma_{max} \\ \sigma_2 = -7{,}013 \quad \text{MPa} \\ \sigma_3 = -86{,}948 \quad \text{MPa} = \sigma_{min} \end{cases}$$

Naprężenia zredukowane:

- Galileusz-Rankine

$$\sigma_{\text{red}}^{GR} = \sigma_{ekstr} = \max(|\sigma_{max}|, |\sigma_{min}|) = 86{,}948 \quad \text{MPa}$$

- Coulomb-Tresca-Guestt

$$\sigma_{\text{red}}^{CTG} = 2\tau_{ekstr} = |\sigma_{max}-\sigma_{min}| = 150{,}908 \quad \text{MPa}$$

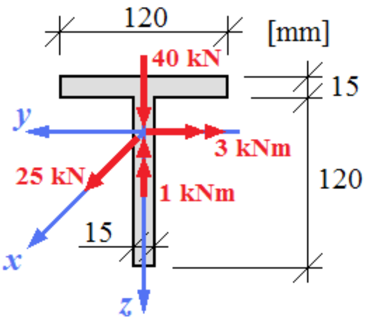
- Maxwell-Huber-Mises-Hencky

$$\sigma_{\text{red}}^{MHMH} = \Phi_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2+6(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2} = 130{,}767 \quad \text{MPa}$$

ZADANIE 12.4

Dany jest przekrój teowy, obciążony układem sił przekrojowych jak na rysunku. Wyznaczyć wartości naprężeń normalnych i stycznych oraz naprężeń zredukowanych wg hipotezy HMH w punktach A, B, C, D oraz w środku ciężkości przekroju O.



Charakterystyki geometryczne przekroju:

Pole powierzchni:

$$A = [1{,}5\cdot 12]+[1{,}5\cdot 12] = 36 \quad [\mathrm{cm}^2]$$

Położenie środka ciężkości:

$$S_{y'} = [1{,}5\cdot 12\cdot 0{,}75]+[1{,}5\cdot 12\cdot (1{,}5+6)] = 148{,}5 \quad [\mathrm{cm}^3] \qquad \Rightarrow \qquad z'_C = \frac{S_{y'}}{A} = 4{,}125 \text{ cm}$$

Momenty bezwładności:

$$I_y = \left[\frac{1{,}5^3\cdot 12}{12}+1{,}5\cdot 12\cdot (0{,}75-4{,}125)^2\right]+\left[\frac{12^3\cdot 1{,}5}{12}+1{,}5\cdot 12\cdot (1{,}5+6-4{,}125)^2\right] = 629{,}44 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

$$I_z = \left[\frac{12^3\cdot 1{,}5}{12}\right]+\left[\frac{1{,}5^3\cdot 12}{12}\right] = 219{,}38 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

Siły przekrojowe:

$$N = F_x = 25 \text{ kN} \qquad M_x = 0$$
$$Q_y = F_y = 0 \qquad M_y = -3 \text{ kNm}$$
$$Q_z = F_z = 40 \text{ kN} \qquad M_z = -1 \text{ kNm}$$

Naprężenia normalne: $\sigma_x = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_y}{I_y} z - \dfrac{M_z}{I_z} y$

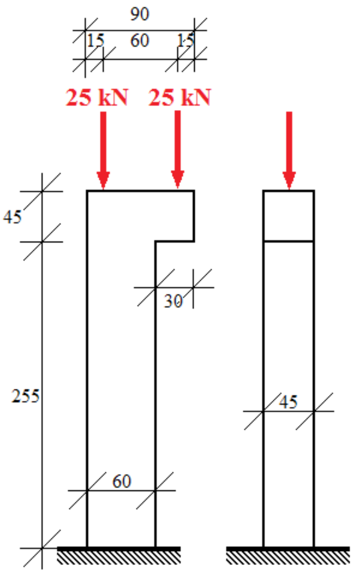
Naprężenia styczne: $\tau_{xz} = \dfrac{Q_z S_y(z)}{b(z) I_y}$

Naprężenia zredukowane: $\sigma_{\mathrm{red}}^{HMH} = \sqrt{\sigma_x^2+3\tau_{xz}^2}$

Punkt	y [cm]	z [cm]	[MPa]	$b(z)$ [cm]	$S_y(z)$ [cm³]	τ_{xz} [MPa]	$\sigma_{\mathrm{red}}^{HMH}$ [MPa]
A	6	-4,125	53,95	12	0	0	53,95
B	-6	-4,125	-0,75	12	0	0	-0,75
C	0,75	-2,625	22,87	1,5	$12\cdot 1{,}5\cdot(2{,}625+0{,}75)=60{,}75$	25,74	50,10
O	0	0	6,94	1,5	$9{,}375\cdot 1{,}5\cdot(0{,}5\cdot 9{,}375)=65{,}92$	27,93	48,87
D	0,75	9,375	-34,32	1,5	0	0	-34,32

ZADANIE 12.5

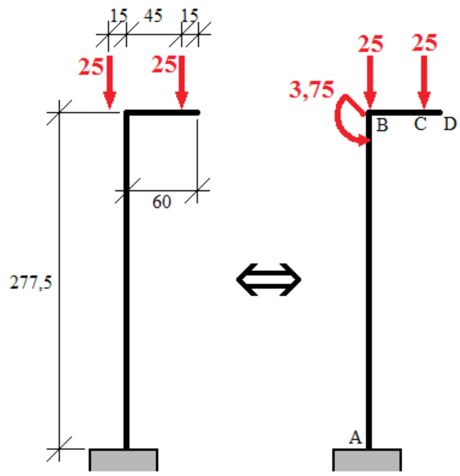
Dany jest żelbetowy słup obciążony jak na rysunku. Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych od obciążenia zewnętrznego. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych w przekroju utwierdzenia słupa uwzględniając ciężar własny słupa. Przyjąć ciężar objętościowy żelbetu: $\gamma = 24\ \mathrm{kN/m^3}$.



Schemat statyczny – zastępujemy obiekt przestrzenny układem prętów położonych w osiach ciężkości odpowiednich elementów. Obciążenie zewnętrzne zastępujemy obciążeniem statycznie równoważnym przyłożonym do osi prętów. Sprowadzenie siły z lewej do osi słupa:

$$M = 25\cdot 0{,}15 = 3{,}75 \quad [\mathrm{kNm}]$$

Rozkład sił przekrojowych od obciążenia zewnętrznego:



Przedział AB $x\in(0\ ;\ 2{,}775)$

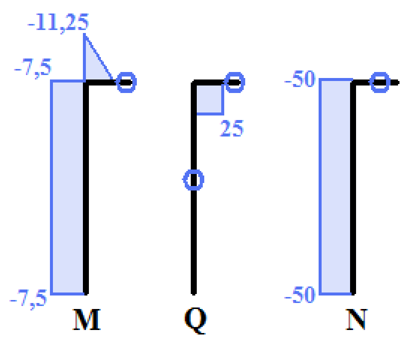
$$\begin{cases} N = -25-25 = -50 \\ Q = 0 \\ M = 3{,}75 - 25\cdot 0{,}45 = -7{,}5 \end{cases}$$

Przedział BC $x\in(0\ ;\ 0{,}45)$

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = 25 \\ M = -25\cdot(0{,}45 - x) \end{cases}$$

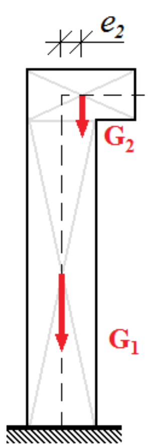
Przedział CD $x\in(0{,}45\ ;\ 0{,}6)$

$$\begin{cases} N = 0 \\ Q = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$



Siły przekrojowe w przekroju utwierdzenia:

$$\begin{cases} N = -50 \\ Q = 0 \\ M = -7{,}5 \end{cases}$$



Ciężar własny:

Ciężar słupa:

$$G_1 = 24\cdot(0{,}6\cdot 0{,}45\cdot 2{,}55) = 16{,}524 \quad [\mathrm{kN}]$$

Ciężar poziomego wspornika:

$$G_2 = 24\cdot(0{,}45\cdot 0{,}45\cdot 0{,}9) = 4{,}374 \quad [\mathrm{kN}]$$

Mimośród wypadkowej ciężaru wspornika poziomego:

$$e_2 = \frac{1}{2}\cdot 90 - 30 = 15 \quad [\mathrm{cm}]$$

Dodatkowa siła osiowa od ciężaru własnego:

$$N_G = -G_1 - G_2 = -20{,}898 \quad \text{kN}$$

Dodatkowy moment zginający od ciężaru poziomego wspornika:

$$M_G = -G_2 \cdot e_2 = -0{,}656 \quad \text{kNm}$$

Siły obciążające przekrój utwierdzenia:

$$N := N_{całk} = -50 - 20{,}898 = -70{,}898 \quad [\text{kN}]$$
$$M_y := M_{całk} = -7{,}5 - 0{,}656 = -8{,}156 \quad [\text{kNm}]$$

Rozkład naprężeń normalnych: $\sigma = \dfrac{N}{A} + \dfrac{M_y}{I_y} z$

Charakterystyki geometryczne przekroju utwierdzenia:

$$A = 0{,}6 \cdot 0{,}45 = 0{,}27 \quad [\text{m}^2]$$
$$I_y = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}60^3}{12} = 0{,}0081 \quad [\text{m}^4]$$

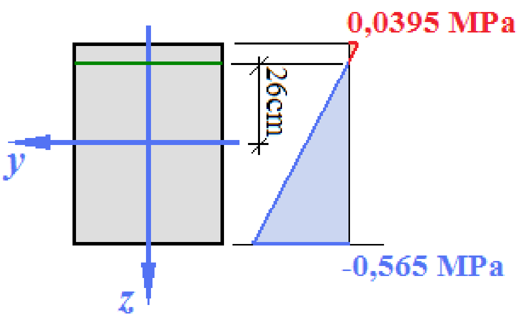
Naprężenia normalne w punktach skrajnych przekroju:

Krawędź dolna przekroju:

$$\sigma_d = \sigma\left(y = \frac{0{,}45}{2}\ ;\ z = \frac{0{,}60}{2}\right) = -0{,}565 \quad [\text{MPa}]$$

Krawędź górna przekroju:

$$\sigma_g = \sigma\left(y = \frac{0{,}45}{2}\ ;\ z = -\frac{0{,}60}{2}\right) = 0{,}0395 \quad [\text{MPa}]$$

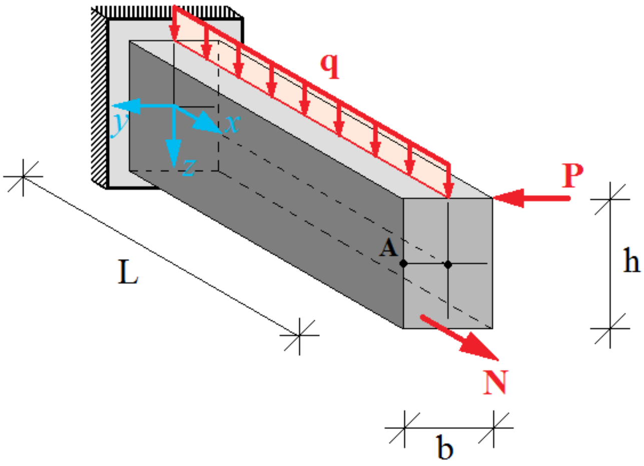


Położenie osi obojętnej $(\sigma = 0)$:

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y} \approx 26 \text{ cm}$$

ZADANIE 12.6

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych i rozkład naprężeń stycznych od zginania oraz maksymalne naprężenia ścinające τ_{xy} i τ_{xz} w przekroju utwierdzenia belki jak na rysunku. Wyznaczyć naprężenia zredukowane wg hipotez CTG i MHMH w punkcie A.



Wymiary:
$L = 2{,}5\,\mathrm{m}$
$b = 10\,\mathrm{cm}$
$h = 15\,\mathrm{cm}$

Obciążenie:
$P = 1500\,\mathrm{N}$
$N = 4000\,\mathrm{N}$
$q = 1000\,\mathrm{N/m}$

mimośród przyłożenia siły:
$e_y = 4\,\mathrm{cm}$
$e_z = 6\,\mathrm{cm}$

Charakterystyki geometryczne:

Pole przekroju: $A = b\cdot h = 150\,\mathrm{cm}^2$

Momenty bezwładności: $I_y = \dfrac{b\,h^3}{12} = 2812{,}5\,\mathrm{cm}^4$ $\quad I_z = \dfrac{b^3\,h}{12} = 1250\,\mathrm{cm}^4$

Stała skręcania: $I_x = b^3\,h\beta\left(\dfrac{h}{b}\right) = 2937\,\mathrm{cm}^4$

Redukcja układu sił do przekroju utwierdzenia:

Siła osiowa: $F_x = N = 4000\,\mathrm{N}$

Siły poprzeczne: $F_y = P = 1500\,\mathrm{N}$
$F_z = q\cdot L = 2500\,\mathrm{N}$

Moment skręcający: $M_x = P\cdot\dfrac{h}{2} = 112{,}5\,\mathrm{Nm}$

Momenty zginające: $M_y = -q\cdot L\cdot\dfrac{L}{2} + N\cdot e_z = -3125\,\mathrm{Nm} + 240\,\mathrm{Nm} = -2885\,\mathrm{Nm}$
$M_z = P\cdot L - N\cdot e_y = 3750\,\mathrm{Nm} - 160\,\mathrm{Nm} = 3590\,\mathrm{Nm}$

Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y = 0{,}2667\,\mathrm{MPa} - 102{,}58\,\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{m}}\cdot z - 287{,}20\,\frac{\mathrm{MPa}}{\mathrm{m}}\cdot y$$

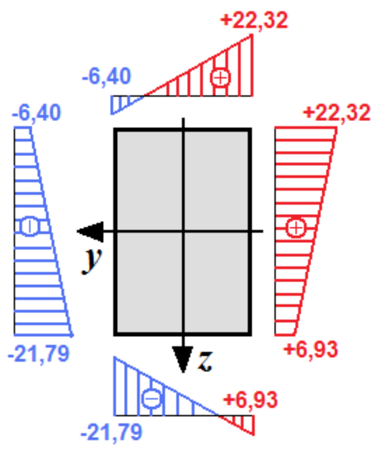
Wartości naprężeń w narożach przekroju:

$$\sigma_x\left(-\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right) = 22{,}320\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_x\left(\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right) = -6{,}400\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_x\left(\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right) = -21{,}787\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_x\left(-\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right) = 6{,}933\,\mathrm{MPa}$$



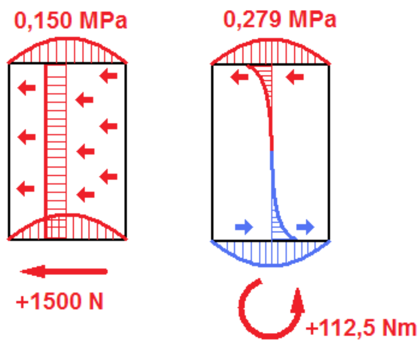
Rozkład naprężeń stycznych:

Naprężenia styczne τ_{xy} od zginania:

$$\tau_{xy} = \frac{F_y \cdot S_z(y)}{h(y) \cdot I_z} = \frac{6F_y}{bh}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0{,}150\,\mathrm{MPa} \cdot \left(1 - 400{,}000\,y^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{m}}\right)$$

Maksymalne naprężenia τ_{xy} zarówno od zginania jak i od skręcania występują w połowie długości poziomych krawędzi:

- Maksymalne naprężenia styczne τ_{xy} od zginania:
  $$\tau_{xy}(y=0) = \frac{3}{2}\frac{F_y}{A} = 0{,}150\,\mathrm{MPa}$$
- Maksymalne naprężenia styczne τ_{xy} od skręcania
  $$\tau_{xy}(y=0, z=h/2) = \frac{M_x b}{I_x}\delta\left(\frac{h}{b}\right) = 0{,}279\ \mathrm{MPa}$$
- Maksymalne naprężenia $\tau_{xy} = 0{,}447\ \mathrm{MPa}$

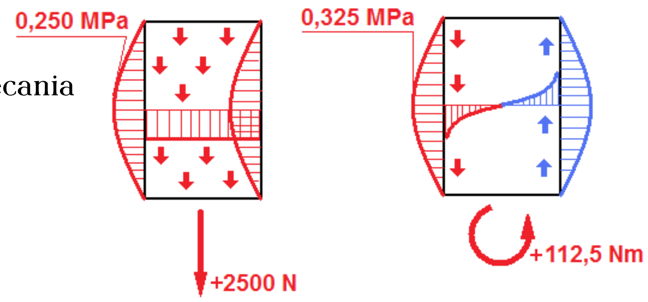


Naprężenia styczne τ_{xz} od zginania:

$$\tau_{xz} = \frac{F_z \cdot S_y(z)}{b(z) \cdot I_y} = \frac{6F_z}{bh}\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2}\right) = 0{,}250\,\mathrm{MPa} \cdot \left(1 - 177{,}778\,z^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{m}}\right)$$

Maksymalne naprężenia τ_{xz} zarówno od zginania jak i od skręcania występują w połowie długości pionowych krawędzi:

- Maksymalne naprężenia styczne τ_{xz} od zginania:
  $$\tau_{xz}(z=0) = \frac{3}{2}\frac{F_z}{A} = 0{,}250\,\mathrm{MPa}$$
- Maksymalne naprężenia styczne τ_{xz} od skręcania
  $$\tau_{xz}(y=b/2, z=0) = \frac{M_x b}{I_x}\gamma\left(\frac{h}{b}\right) = 0{,}325\ \mathrm{MPa}$$
- Maksymalne naprężenia $\tau_{xz} = 0{,}575\ \mathrm{MPa}$



Naprężenia zredukowane:

Stan naprężenia w punkcie A $(y=5\ ;\ z=0)$ [cm]

Naprężenie normalne: $\sigma = \sigma_x = -14{,}093\ \ \mathrm{MPa}$

Naprężenia styczne: $\tau_{xz} = 0{,}575\ \ \mathrm{MPa}$

$\tau_{xy} = 0\ \ \mathrm{MPa}$

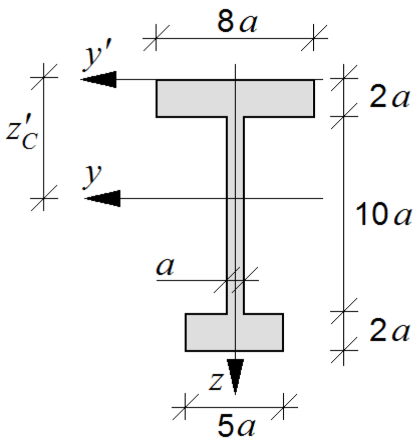
$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = 0{,}575\ \ \mathrm{MPa}$

Naprężenie zredukowane: $\sigma_{\mathrm{red}}^{CTG} = \sqrt{\sigma + 4\tau} = 14{,}140\ \ \mathrm{MPa}$

$\sigma_{\mathrm{red}}^{MHMH} = \sqrt{\sigma + 3\tau} = 14{,}128\ \ \mathrm{MPa}$

ZADANIE 12.7

Wyznaczyć rdzeń symetrycznego przekroju dwuteowego jak na rysunku:



Pole powierzchni przekroju:

$$A=[8a\cdot 2a]+[10a\cdot a]+[2a\cdot 5a]=36a^2$$

Moment statyczny przekroju względem osi poziomej y' zawierającą jego górną krawędź:

$$S_{y'}=[8a\cdot 2a\cdot a]+[10a\cdot a\cdot 7a]+[2a\cdot 5a\cdot 13a]=216a^3$$

Odległość środka ciężkości przekroju od górnej krawędzi:

$$z_C'=\frac{S_{y'}}{A}=6a$$

Momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności:

$$I_y=\left[\frac{8a\cdot(2a)^3}{12}+8a\cdot 2a\cdot(a-6a)^2\right]+\left[\frac{a\cdot(10a)^3}{12}+10a\cdot a\cdot(7a-6a)^2\right]+\left[\frac{5a\cdot(2a)^3}{12}+5a\cdot 2a\cdot(13a-6a)^2\right]=992a^4$$

$$I_z=\left[\frac{2a\cdot(8a)^3}{12}\right]+\left[\frac{10a\cdot a^3}{12}\right]+\left[\frac{2a\cdot(5a)^3}{12}\right]=107a^4$$

Promienie bezwładności:

$$i_y^2=\frac{I_y}{A}=27{,}555a \qquad i_z^2=\frac{I_z}{A}=2{,}972a$$

Przekrój jest symetryczny, zatem rdzeń również jest symetryczny – wystarczy rozpatrzeć połowę przekroju. Współrzędne punktów wyznaczających wierzchołki obrysu konturu przekroju w układzie głównych osi bezwładności

$$A=(4a;-6a) \qquad B=(4a;-4a) \qquad C=(2{,}5a;8a)$$
$$A'=(-4a;-6a) \qquad C'=(-2{,}5a;8a)$$

Współrzędne wierzchołka rdzenia $(Y;Z)$ odpowiadającego prostej zawierającej obrys konturu przekroju przechodzącej przez punkty P i Q wyznacza się ze wzoru:

$$Y=i_z^2\frac{(z_P-z_Q)}{z_Q(y_P-y_Q)-y_Q(z_P-z_Q)} \qquad Z=i_y^2\frac{(y_P-y_Q)}{y_Q(z_P-z_Q)-z_Q(y_P-y_Q)}$$

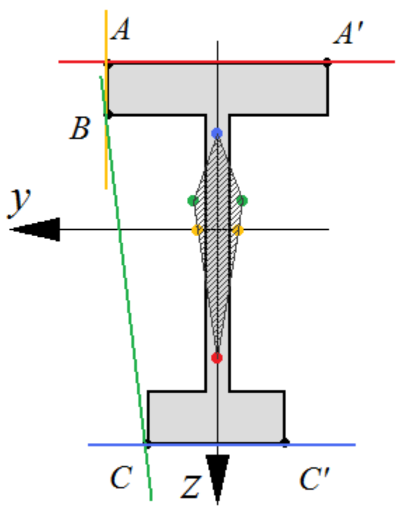
Wierzchołki rdzenia odpowiadające kolejnym odcinkom obrysu przekroju:

$Y_{AA'}=0$ $\qquad$ $Z_{AA'}=4{,}593a$

$Y_{AB}=-0{,}743a$ $\qquad$ $Z_{AB}=0$

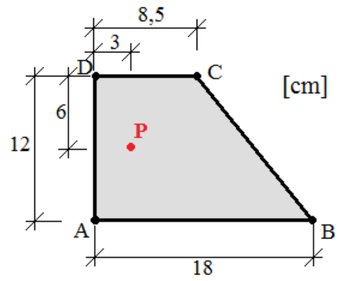
$Y_{BC}=-0{,}849a$ $\qquad$ $Z_{BC}=-0{,}984a$

$Y_{CC'}=0$ $\qquad$ $Z_{CC'}=-3{,}444a$



ZADANIE 12.8

Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych oraz oś obojętną w pręcie o przekroju trapezowym, rozciąganym mimośrodowo – siła $F = 2$ kN przyłożona jest w punkcie P. Wyznaczyć rdzeń przekroju.



Konieczne jest wyznaczenie głównych centralnych osi bezwładności przekroju. Przyjmujemy globalny układ współrzędnych w punkcie A. Oś X jest równoległa do AB, oś Y zaś do AD.

Pole przekroju:

$$A = [12\cdot 8{,}5] + \left[\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9{,}5\right] = 159 \quad [\mathrm{cm}^2]$$

Momenty statyczne:

$$S_X = \left[12\cdot 8{,}5\cdot\frac{12}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9{,}5\cdot\frac{12}{3}\right] = 612+228 = 840 \quad [\mathrm{cm}^3]$$

$$S_Y = \left[12\cdot 8{,}5\cdot\frac{8{,}5}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9{,}5\cdot\left(8{,}5+\frac{9{,}5}{3}\right)\right] = 433{,}5+665 = 1098{,}5 \quad [\mathrm{cm}^3]$$

Współrzędne środka ciężkości: $X_C = \dfrac{S_Y}{A} = 6{,}909 \qquad Y_C = \dfrac{S_X}{A} = 5{,}283 \qquad [\mathrm{cm}]$

Centralne momenty bezwładności:

$$I_x = \left[\frac{8{,}5\cdot 12^3}{12} + 8{,}5\cdot 12\cdot\left(\frac{12}{2}-5{,}283\right)^2\right] + \left[\frac{9{,}5\cdot 12^3}{36} + \frac{1}{2}\cdot 9{,}5\cdot 12\cdot\left(\frac{12}{3}-5{,}283\right)^2\right] = 1826{,}264 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

$$I_y = \left[\frac{8{,}5^3\cdot 12}{12} + 8{,}5\cdot 12\cdot\left(\frac{8{,}5}{2}-6{,}909\right)^2\right] + \left[\frac{9{,}5^3\cdot 12}{36} + \frac{1}{2}\cdot 9{,}5\cdot 12\cdot\left(8{,}5+\frac{9{,}5}{3}-6{,}909\right)^2\right] = 2911{,}303 \ [\mathrm{cm}^4]$$

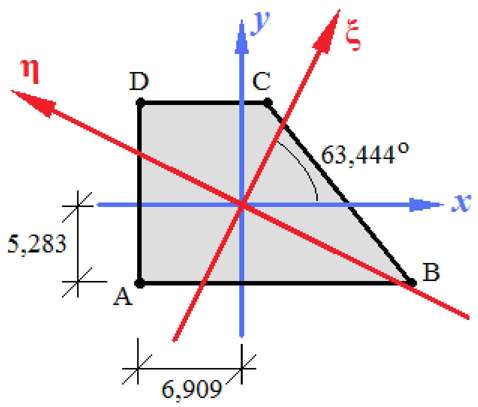
$$D_{xy} = \left[0 + 8{,}5\cdot 12\cdot\left(\frac{12}{2}-5{,}283\right)\cdot\left(\frac{8{,}5}{2}-6{,}909\right)\right] +$$

$$+\left[-\frac{9{,}5^2\cdot 12^2}{72} + \frac{1}{2}\cdot 9{,}5\cdot 12\cdot\left(\frac{12}{3}-5{,}283\right)\left(8{,}5+\frac{9{,}5}{2}-6{,}909\right)\right] = -722{,}896 \quad [\mathrm{cm}^4]$$

Główne centralne momenty bezwładności:

$$I_\xi = \frac{I_x+I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2} = 3272{,}612 \ [\mathrm{cm}^4]$$

$$I_\eta = \frac{I_x+I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2} = 1464{,}955 \ [\mathrm{cm}^4]$$



Promienie bezwładności:

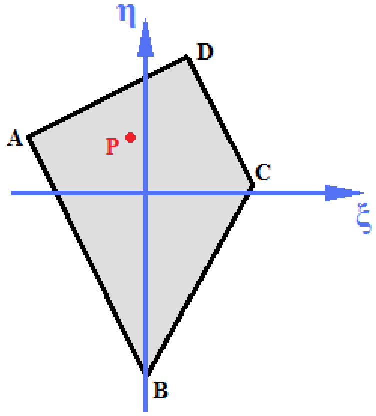
$$i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}} = 4{,}537 \quad [\mathrm{cm}] \qquad\qquad i_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}} = 3{,}035 \quad [\mathrm{cm}]$$

Orientacja głównych centralnych osi bezwładności:

$$\varphi_\xi = \mathrm{arctg}\frac{D_{xy}}{I_y - I_\xi} = 1{,}1073 \quad [\mathrm{rad}] \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 63{,}444^\circ$$

Transformacja współrzędnych wierzchołków przekroju oraz punktu przyłożenia siły do głównego centralnego układu współrzędnych – współrzędne podane w cm.

Pkt.	Układ globalny (X, Y)	Układ centralny $\begin{cases} x = X - X_C \\ y = Y - Y_C \end{cases}$	Układ główny centralny $\begin{cases} \xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ \eta = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$
A	(0 ; 0)	(-6,909 ; -5,283)	(-7,814 ; 3,818)
B	(18 ; 0)	(11,091 ; -5.283)	(0,233 ; -12,283)
C	(9,5 ; 12)	(2,591 ; 6,717)	(7,167 ; 0,685)
D	(0 ; 12)	(-6,909 ; 6,717)	(2,919 ; 9,183)
P	(3 ; 6)	(-3,909 ; 0,717)	(-1,106 ; 3,817)



Mimośród przyłożenia siły osiowej:

$$e_\xi = \xi_P = -1{,}106 \text{ cm}$$
$$e_\eta = \eta_P = 3{,}817 \text{ cm}$$

Redukcja układu sił do środka ciężkości przekroju:

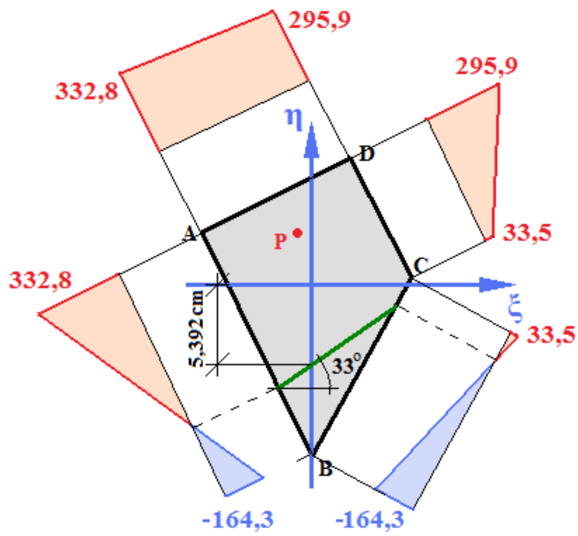
$$N = F = 2000 \quad [\text{N}]$$
$$M_\xi = +F\cdot e_\eta = 2000\cdot 0{,}03817 = 76{,}34 \quad [\text{Nm}]$$
$$M_\eta = -F\cdot e_\xi = -2000\cdot(-0{,}01106) = 22{,}12 \quad [\text{Nm}]$$

Rozkład naprężeń normalnych:

$$\sigma(x,y) = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{I_\xi}\cdot\eta - \frac{M_\eta}{I_\eta}\cdot\xi = \frac{F}{A}\cdot\left[1 + \frac{e_\eta\cdot\eta}{i_\xi^2} + \frac{e_\xi\cdot\xi}{i_\eta^2}\right]$$

Wartości naprężeń normalnych w narożach przekroju:

$$\sigma_A = 332{,}835 \text{ kPa}$$
$$\sigma_B = -164{,}257 \text{ kPa}$$
$$\sigma_C = 33{,}547 \text{ kPa}$$
$$\sigma_D = 295{,}922 \text{ kPa}$$



Oś obojętna.

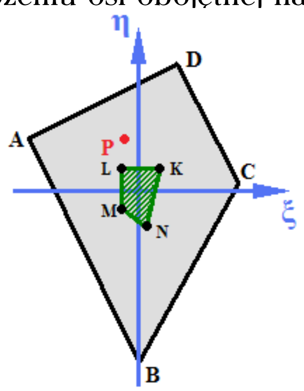
$$\eta = \frac{I_\xi}{I_\eta}\frac{M_\eta}{M_\xi}\cdot\xi - \frac{N}{A}\frac{I_\xi}{M_\xi} \quad \Rightarrow \quad \eta = 0{,}6473\,\xi - 0{,}05392$$

$$\eta_0 = -\frac{N}{A}\frac{I_\xi}{M_\xi} = -5{,}392 \text{ cm} \qquad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{I_\xi}{I_\eta}\frac{M_\eta}{I_\xi} \approx 33^\circ$$

Współrzędne wierzchołka rdzenia odpowiadające granicznemu położeniu osi obojętnej na krawędzi przekroju zadanej punktami A i B:

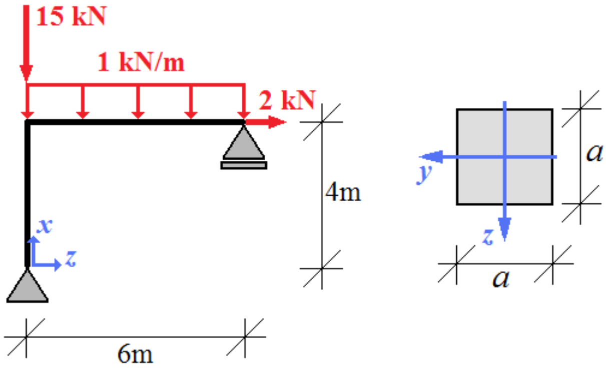
$$\xi_{AB} = i_\eta^2\frac{(\eta_B - \eta_A)}{\eta_A(\xi_B - \xi_A) - \xi_A(\eta_B - \eta_A)} \qquad \eta_{AB} = i_\xi^2\frac{(\xi_B - \xi_A)}{\xi_A(\eta_B - \eta_A) - \eta_A(\xi_B - \xi_A)}$$

Pkt	Odp. krawędź przekroju	ξ_R	η_R
K	AB	1,560	1,742
L	BC	-1,355	1,618
M	CD	-1,227	-1,370
N	DA	0,596	-2,665



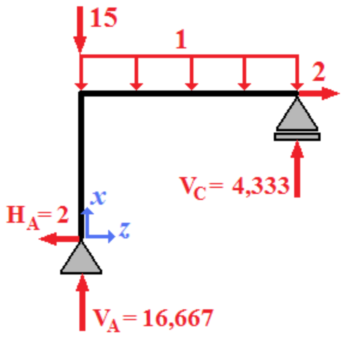
ZADANIE 12.9

Dobrać minimalny wymiar a przekroju ramy jak na rysunku. Przyjąć, że przekrojami kluczowymi dla wymiarowania są przekroje występowania ekstremalnych naprężeń normalnych oraz przekrój występowania największych naprężeń stycznych. Posłużyć się hipotezą MHMH. Przyjąć $f_d = 190$ MPa .



Reakcje podporowe:

$$\Sigma X=0:\ -H_A+2=0 \quad \Rightarrow \quad H_A=2$$
$$\Sigma M_A=0:\ -1\cdot 6\cdot 3-2\cdot 4+6\cdot V_C=0 \quad \Rightarrow \quad V_C=4{,}333$$
$$\Sigma Y=0:\ -15-1\cdot 6+V_A+V_C=0 \quad \Rightarrow \quad V_A=16{,}667$$

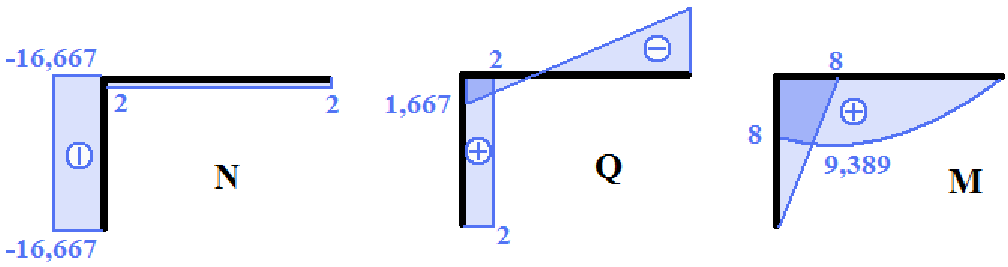


Siły przekrojowe:

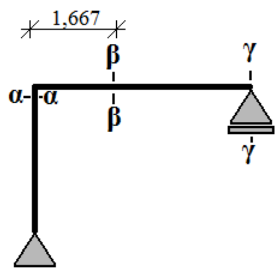
$AB:\ x\in(0\ ;\ 4)$ $\qquad$ $BC:\ x\in(0\ ;\ 6)$

$$\begin{cases} N=-16{,}667 \\ Q=2 \\ M=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} N=2 \\ Q=16{,}667-15-1x \\ M=(16{,}667-15)x-\frac{1}{2}x^2+4\cdot 2 \end{cases}$$

$$Q_{BC}=0 \quad \Rightarrow \quad x_e=1{,}667 \quad \Rightarrow \quad M_{BC}(x_e)=9{,}389$$



Największe naprężenia normalne występować będą w tym przekroju w którym łączne działanie momentu zginającego i siły osiowej jest największe. Przekrojami tymi są przekroje $\alpha-\alpha$ (przedział AB $x=4$ - największa siła osiowa i odpowiadający moment zginający) oraz $\beta-\beta$ (przedział BC $x=1{,}667$ - największy moment zginający i odpowiadająca siła osiowa)[1].



Przekrój $\alpha-\alpha$:	$N=-16{,}667$ kN	$Q=1{,}667$ kN	$M=8$ kNm
Przekrój $\beta-\beta$:	$N=2$ kN	$Q=0$ kN	$M=9{,}389$ kNm

1) W zależności od geometrii układu i proporcji obciążeń osiowych i poprzecznych, konieczne może być sprawdzenie większej ilości przekrojów - np. mogą istnieć przekroje obciążone mniejszym momentem zginającym niż ten ekstremalny i siłą osiową mniejszą od ekstremalnej, w których kombinacja tych sił przekrojowych daje jednak największe naprężenia. W przypadku przekrojów o jednej tylko osi symetrii oraz w przypadku materiałów o różnej wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie, należy rozróżniać i osobno sprawdzać przekroje z siłami rozciągającymi i ściskającymi oraz osobno sprawdzać skrajne włókna górne i dolne – siły osiowe o różnych znakach w różny sposób wzmacniają lub osłabiają działanie momentu zginającego we włóknach skrajnych po jednej lub drugiej stronie przekroju.

W belkach i ramach zginanych, naprężenia styczne są z reguły istotnie mniejsze od naprężeń normalnych. Punktami przekroju, w których występować będą największe naprężenia zredukowane są najczęściej punkty skrajne – w których naprężenia od zginania są największe, zaś naprężenia styczne są równe 0. W takim przypadku, naprężenia zredukowane, są równe naprężeniom normalnym:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y}$$

Dla przekroju prostokątnego: $A = a^2 \quad W_y = \frac{1}{6} a^3$

Przekrój $\alpha-\alpha$ **:**

$$|\sigma_{max}| = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{16{,}667 \cdot 10^3}{a^2} + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10^3}{a^3} < f_d$$

W stanie granicznym: $|\sigma_{max}| = f_d \quad \Rightarrow \quad 190 \cdot 10^6 a^3 - 16667 \cdot a - 48000 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6{,}37\,\mathrm{cm}$

Ponadto należy sprawdzić warunek wytrzymałości dla środka ciężkości przekroju, w którym występują stałe naprężenia normalne od sił osiowych (naprężenia od zginania są tam równe 0) i największe naprężenia styczne:

Naprężenia styczne w środku ciężkości: $\tau(z=0) = \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A} = \frac{2{,}5 \cdot 10^3}{a^2}$

Naprężenia normalne w środku ciężkości: $\sigma(z=0) = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_y} \cdot z = \frac{N}{A} = -\frac{16{,}667 \cdot 10^3}{a^2}$

Naprężenia zredukowane: $\sigma_{\mathrm{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{17220{,}30}{a^2} < f_d \quad \Rightarrow \quad a > 0{,}95\,\mathrm{cm}$

W uzasadnionych przypadkach (gdy wielkości maksymalnych naprężeń stycznych i normalnych są porównywalne) konieczne może być sprawdzenie również i innych punktów przekroju[2].

Przekrój $\beta-\beta$ **:**

$$|\sigma_{max}| = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{2 \cdot 10^3}{a^2} + \frac{6 \cdot 9{,}389 \cdot 10^3}{a^3} < f_d$$

W stanie granicznym: $|\sigma_{max}| = f_d \quad \Rightarrow \quad 190 \cdot 10^6 a^3 - 2000 \cdot a - 56334 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6{,}67\,\mathrm{cm}$

Z uwagi na zerową siłę poprzeczną nie wymiarujemy z uwagi na maksymalne naprężenia styczne w środku przekroju.

2) W takiej sytuacji, w niektórych punktach przekroju łączony wpływ obu naprężeń może okazać się większy niż w punktach występowania ekstremalnych wartości bądź naprężeń stycznych bądź normalnych – trzeba zauważyć, że tam, gdzie jedne osiągają wartości maksymalne (naprężenia normalne od zginania we włóknach skrajnych, naprężenia styczne w środku ciężkości), te drugie przyjmują wartość 0. Problem komplikuje się jeszcze bardziej, gdy pojawia się siła osiowa powodująca dodatkowy stały rozkład naprężeń normalnych – w takim przypadku wszystko zależy od wzajemnych proporcji wielkości sił przekrojowych oraz od kształtu przekroju poprzecznego.

Największe naprężenia styczne występować będą w środku ciężkości przekroju występowania największej siły poprzecznej (przekrój $\gamma-\gamma$).

Przekrój $\gamma-\gamma$ **:** $N=2$ kN $Q=4{,}333$ kN $M=0$ kNm

Naprężenia styczne w środku ciężkości: $\tau(z=0)=\frac{3}{2}\frac{4{,}333\cdot 10^3}{a^2}=\frac{6{,}5\cdot 10^3}{a^2}$

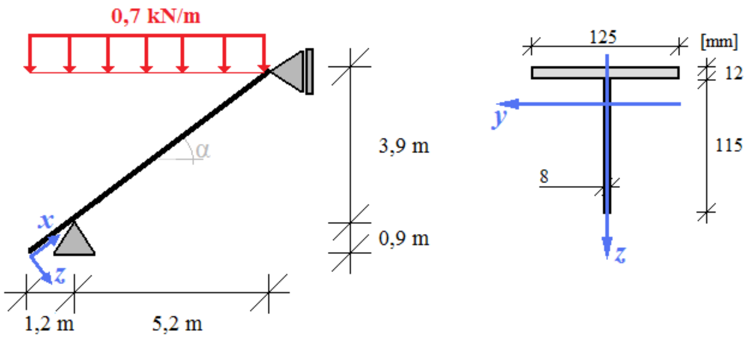
Naprężenia normalne w środku ciężkości $\sigma(z=0)=\frac{N}{A}=\frac{2\cdot 10^3}{a^2}$

Naprężenia zredukowane: $\sigma_{\mathrm{red}}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\frac{11433{,}74}{a^2}<f_d \Rightarrow a>0{,}78\,\mathrm{cm}$

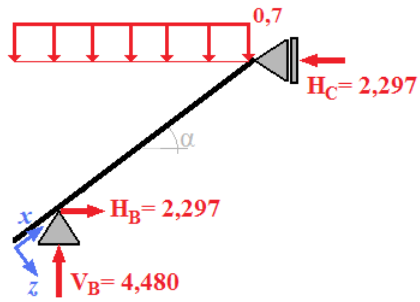
Minimalny wymagany wymiar przekroju: $a_{min}=6{,}67\,\mathrm{cm}$.

ZADANIE 12.10

Dana jest belka o przekroju teowym, obciążona jak na rysunku. Sprawdzić czy nie zostały przekroczone dopuszczalne naprężenia normalne, jeśli wytrzymałość na rozciąganie $f_t = 45$ MPa, wytrzymałość na ściskanie $f_c = 20$ MPa.



Reakcje:



$$\Sigma Y = 0:\quad -0{,}7\cdot 6{,}4 + V_B = 0$$
$$V_B = 4{,}480$$
$$\Sigma M_B = 0:\quad -0{,}7\cdot 6{,}4\cdot\left(\frac{6{,}4}{2} - 1{,}2\right) + H_C\cdot 3{,}9 = 0$$
$$H_C = 2{,}297$$
$$\Sigma X = 0:\quad H_B - H_C = 0 \quad\Rightarrow\quad H_B = 2{,}297$$

Siły przekrojowe:

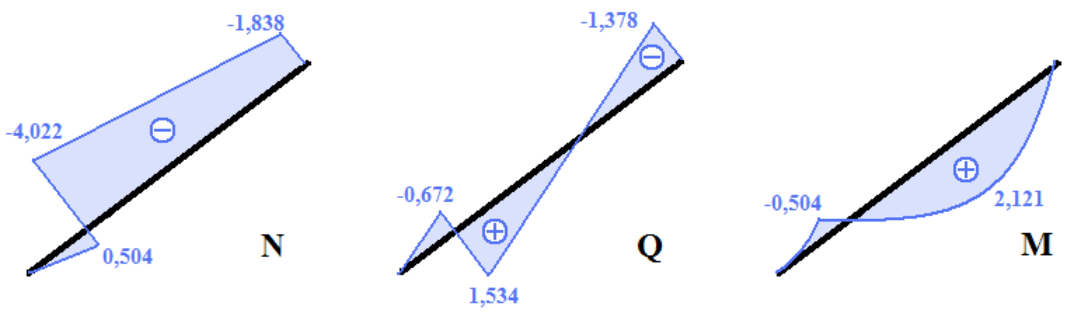
$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{3{,}9+0{,}9}{1{,}2+5{,}2} = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} = 36{,}87^\circ \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

Przedział AB: $x \in (0\ ;\ 1{,}5)$

$$N(x) = +0{,}7\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\sin\alpha = 0{,}336\,x$$
$$Q(x) = -0{,}7\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\cos\alpha = -0{,}448\,x$$
$$M(x) = -0{,}7\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{(x\cdot\cos\alpha)}{2} = -0{,}224\,x^2$$

Przedział BC: $x \in (1{,}5\ ;\ 8)$

$$N(x) = +0{,}7\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\sin\alpha - V_B\sin\alpha - H_B\cos\alpha = 0{,}336\,x - 4{,}526$$
$$Q(x) = -0{,}7\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\cos\alpha + V_B\cos\alpha - H_B\sin\alpha = -0{,}448\,x + 2{,}206$$
$$M(x) = -0{,}7\cdot(x\cdot\cos\alpha)\cdot\frac{(x\cdot\cos\alpha)}{2} + V_B\cdot(x\cdot\cos\alpha - 1{,}2) - H_B\cdot(x\sin\alpha - 0{,}9) =$$
$$= -0{,}224\,x^2 + 2{,}206\,x - 3{,}3087$$
$$Q_{BC} = 0 \quad\Rightarrow\quad x_e = 4{,}924 \quad\Rightarrow\quad M_{BC}(x_e) = 2{,}121 \qquad N_{BC}(x_e) = -2{,}872$$



Charakterystyki geometryczne przekroju:

Pole powierzchni:

$$A=[12{,}5\cdot 1{,}2]+[11{,}5\cdot 0{,}8]=24{,}2\quad[\mathrm{cm}^2]$$

Moment statyczny względem górnej krawędzi przekroju:

$$S_y{}'=\left[12{,}5\cdot 1{,}2\cdot\left(\frac{1{,}2}{2}\right)\right]+\left[11{,}5\cdot 0{,}8\cdot\left(1{,}2+\frac{11{,}5}{2}\right)\right]=72{,}94\quad[\mathrm{cm}^3]$$

Położenie środka ciężkości i odległości do włókien skrajnych:

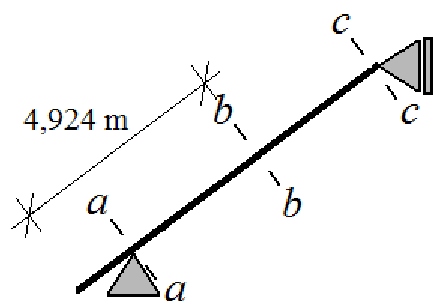
$$z'_C=\frac{S_{y'}}{A}=3{,}01\quad[\mathrm{cm}]\qquad z_d=1{,}2+11{,}5-z'_C=9{,}69\quad[\mathrm{cm}]\qquad z_g=-z'_C=-3{,}01\quad[\mathrm{cm}]$$

Moment bezwładności:

$$I_y=\left[\frac{1{,}2^3\cdot 12{,}5}{12}+1{,}2\cdot 12{,}5\cdot\left(\frac{1{,}2}{2}-3{,}01\right)^2\right]+\left[\frac{11{,}5^3\cdot 0{,}8}{12}+11{,}5\cdot 0{,}8\cdot\left(1{,}2+\frac{11{,}5}{2}-3{,}01\right)^2\right]=313{,}13\quad[\mathrm{cm}^4]$$

Mamy do czynienia z przypadkiem obciążenia złożonego – zginanie proste złożone z obciążeniem osiowym. Dla przekroju symetrycznego, maksymalne naprężenia normalne występują we włóknach skrajnych.

$$\sigma_g=\frac{N}{A}+\frac{M}{I_y}z_g\qquad\qquad \sigma_d=\frac{N}{A}+\frac{M}{I_y}z_d$$



Przekrój jest niesymetryczny a materiał belki ma różną wytrzymałość na rozciąganie i ściskanie. Rozpatrzeć musimy osobno następujące przypadki:

- **rozciąganie dołem**
  - przekrój *a-a* (z lewej): Siła rozciągająca i odpowiadający moment
  - przekrój *b-b*: Moment rozciągający dołem i odpowiadająca siła
- **ściskanie dołem**
  - przekrój *a-a* (z prawej): Moment ściskający dołem i siła ściskająca
- **rozciąganie górą**
  - przekrój *a-a* (z lewej): Moment rozciągający górą i siła rozciągająca
- **ściskanie górą**
  - przekrój *a-a* (z prawej): Siła ściskająca i odpowiadający moment
  - przekrój *c-c*: Siła ściskająca
  - przekrój *b-b*: Moment ściskający górą i siła ściskająca

Przekrój *a-a* (z lewej):

$$M=-0{,}504\ \mathrm{kNm}\quad N=0{,}504\ \mathrm{kN}\qquad \sigma_d=-15{,}39\ \mathrm{MPa}\qquad \sigma_g=5{,}05\ \mathrm{MPa}$$

Przekrój *a-a* (z prawej):

$$M=-0{,}504\ \mathrm{kNm}\quad N=-4{,}022\ \mathrm{kN}\qquad \sigma_d=-17{,}26\ \mathrm{MPa}\qquad \sigma_g=3{,}18\ \mathrm{MPa}$$

Przekrój *b-b*:

$$M=2{,}121\ \mathrm{kNm}\quad N=-2{,}872\ \mathrm{kN}\qquad \sigma_d=64{,}46\ \mathrm{MPa}\qquad \sigma_g=-21{,}58\ \mathrm{MPa}$$

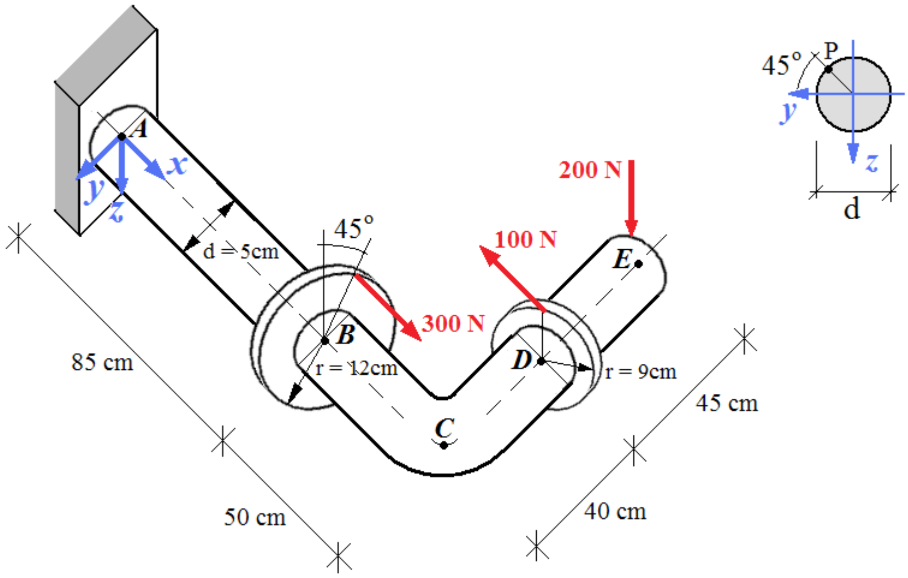
Przekrój *c-c*:

$$M=0\ \mathrm{kNm}\quad N=-1{,}838\ \mathrm{kN}\qquad \sigma_d=-0{,}76\ \mathrm{MPa}\qquad \sigma_g=-0{,}76\ \mathrm{MPa}$$

Naprężenia dopuszczalne przekroczone są w przekroju *b-b*.

ZADANIE 12.11

Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych w ramie przestrzennej jak na rysunku. Wyznaczyć naprężenia zredukowane wg hipotez GR, CTG i MHMH w punkcie P przekroju utwierdzenia.



Siły przekrojowe:

Przedział AB: $x \in (0\ ;\ 0{,}85)$

$$\begin{cases} F_x = +300-100=200 & M_x = -200\cdot 0{,}95 = -190 \\ F_y = 0 & M_y = -300\cdot\dfrac{0{,}06}{\sqrt{2}}+100\cdot 0{,}045-200\cdot(1{,}35-x)=-278{,}23+200\,x \\ F_z = +200 & M_z = +300\cdot\dfrac{0{,}06}{\sqrt{2}}-100\cdot 0{,}4=-27{,}27 \end{cases}$$

Przedział BC: $x \in (0{,}85\ ;\ 1{,}35)$

$$\begin{cases} F_x = -100 & M_x = -200\cdot 0{,}95 = -190 \\ F_y = 0 & M_y = +100\cdot 0{,}045-200\cdot(1{,}35-x)=-265{,}5+200\,x \\ F_z = +200 & M_z = -100\cdot 0{,}4=-40 \end{cases}$$

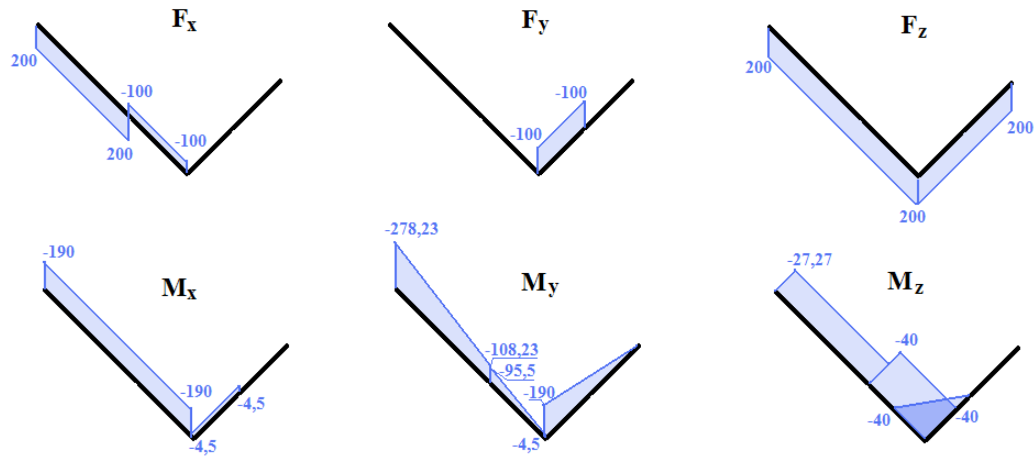
Przedział CD: $x \in (0\ ;\ 0{,}4)$

$$\begin{cases} F_x = 0 & M_x = -100\cdot 0{,}045 = -4{,}5 \\ F_y = -100 & M_y = -200\cdot(0{,}95-x)=-190+200\,x \\ F_z = +200 & M_z = -100\cdot(0{,}4-x)=-40+100\,x \end{cases}$$

Przedział DE: $x \in (0{,}4\ ;\ 0{,}95)$

$$\begin{cases} F_x = 0 & M_x = 0 \\ F_y = 0 & M_y = -200\cdot(0{,}95-x)=-195+200\,x \\ F_z = +200 & M_z = 0 \end{cases}$$

Wykresy sił przekrojowych:



<u>Siły przekrojowe w przekroju utwierdzenia</u>

$$\begin{cases} F_x = 200 & M_x = -190 \\ F_y = 0 & M_y = -278{,}23 \\ F_z = 200 & M_z = -27{,}27 \end{cases}$$

<u>Charakterystyki geometryczne przekroju</u>

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 19{,}63\ \text{cm}^2$$

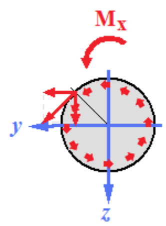
$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = 30{,}68\ \text{cm}^4$$

$$I_0 = I_y + I_z = 61{,}36\ \text{cm}^4$$

Współrzędne punktu P: $\left(y = +R\cos 45^\circ\ ;\ z = -R\sin 45^\circ\right) = (1{,}77\ ;\ -1{,}77)\quad [\text{cm}]$

Naprężenia normalne: $\sigma = \frac{F_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = 17{,}704\ \text{MPa}$

Naprężenia styczne od skręcania: $\tau^{(t)} = \frac{M_x}{I_0} r = -7{,}741\ \text{MPa}$



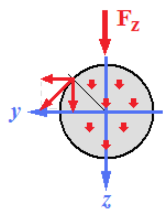
$$\tau_{xz}^{(t)} = +\tau^{(t)} \cos 45^\circ = -5{,}474\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy}^{(t)} = +\tau^{(t)} \sin 45^\circ = -5{,}474\ \text{MPa}$$

Naprężenia styczne od ścinania:

Siła poprzeczna F_z :

$$\tau_{xz}^{(F_z)} = \frac{4}{3} \frac{F_z}{\pi R^4} \left(R^2 - z^2\right) = 0{,}0679\ \text{MPa}$$

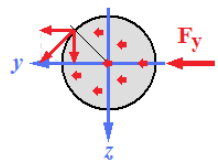


$$\tau_{xy}^{(F_z)} = -\frac{4}{3} \frac{F_z\, y\, z}{\pi R^4} = 0{,}0679\ \text{MPa}$$

Siła poprzeczne F_y :

$$\tau_{xy}^{(F_y)} = \frac{4}{3} \frac{F_y}{\pi R^4} \left(R^2 - y^2\right) = 0$$

$$\tau_{xz}^{(F_y)} = -\frac{4}{3} \frac{F_y\, y\, z}{\pi R^4} = 0$$



Wypadkowe naprężenie styczne:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\left(\tau_{xy}^{(t)} + \tau_{xy}^{(F_y)} + \tau_{xy}^{(F_z)}\right)^2 + \left(\tau_{xz}^{(t)} + \tau_{xz}^{(F_y)} + \tau_{xz}^{(F_z)}\right)^2} = 7{,}645\ \text{MPa}$$

Naprężenia zredukowane:

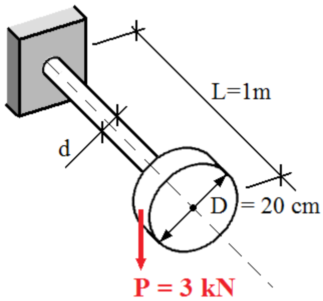
$$\sigma_{\text{red}}^{GR} = \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 20{,}548\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{red}}^{CTG} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 23{,}393\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{red}}^{MHMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 22{,}108\ \text{MPa}$$

ZADANIE 12.12

Dany jest pręt obciążony jak na rysunku, skręcany jednostronnie, zginany obustronnie $(\alpha=\sqrt{3}/2)$. Wyznaczyć rozkład momentów gnących, momentów skręcających oraz momentu zastępczego. Wyznaczyć minimalną wymaganą średnicę wału *d*. Naprężenia dopuszczalne przy zginaniu obustronnym $k_g = 180$ MPa.

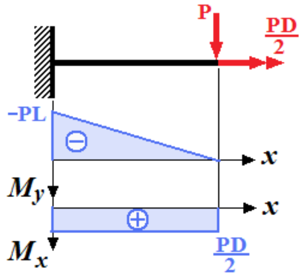


Dopuszczalne naprężenie normalne od zginania: $k_{go}=180$ MPa

Dopuszczalne naprężenie styczne od skręcania: $k_{sj}=\dfrac{k_{go}}{\alpha}=207{,}85$ MPa

Rozkład momentu zginającego: $M_y(x)=-P(L-x)$

Rozkład momentu skręcającego: $M_x(x)=\dfrac{PD}{2}=300$ Nm



Zadanie rozwiążemy stosując dwie możliwe formy zapisu – wyznaczenie zredukowanego momentu zginającego $M_{g,\mathrm{red}}$ i porównanie go do k_{go} oraz wyznaczenie zredukowanego momentu skręcającego $M_{s,\mathrm{red}}$ i porównanie go do k_{sj}.

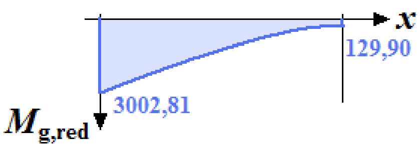
Zredukowany moment zginający:

$$M_{g,\mathrm{red}}=\sqrt{M_y^2+\left(\frac{\alpha}{2}M_x\right)^2}=$$
$$=P\sqrt{(L-x)^2+\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

Rozkład momentu zredukowanego:

$M_{g,\mathrm{red}}(0)=3002{,}81$ Nm

$M_{g,\mathrm{red}}(L)=129{,}90$ Nm



Maksymalny moment zredukowany:

$$M_{g,\mathrm{red}}^{max}=M_{g,\mathrm{red}}(x=0)=3002{,}81 \quad \text{Nm}$$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_y=\frac{\pi D^3}{32}$$

Minimalna wymagana średnica:

$$\frac{M_{g,\mathrm{red}}^{max}}{W_y}<k_{go} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad D>\sqrt[3]{\frac{32M_{g,\mathrm{red}}^{max}}{\pi k_{go}}}\approx 55{,}388 \quad \text{mm}$$

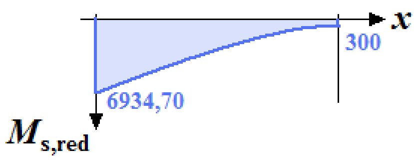
Zredukowany moment skręcający:

$$M_{s,\mathrm{red}}=\sqrt{\left(\frac{2}{\alpha}M_y\right)^2+M_x^2}=$$
$$=P\sqrt{\frac{16}{3}(L-x)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

Rozkład momentu zredukowanego:

$M_{s,\mathrm{red}}(0)=6934{,}70$ Nm

$M_{s,\mathrm{red}}(L)=300$ Nm



Maksymalny moment zredukowany:

$$M_{s,\mathrm{red}}^{max}=M_{s,\mathrm{red}}(x=0)=6934{,}70 \quad \text{Nm}$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie:

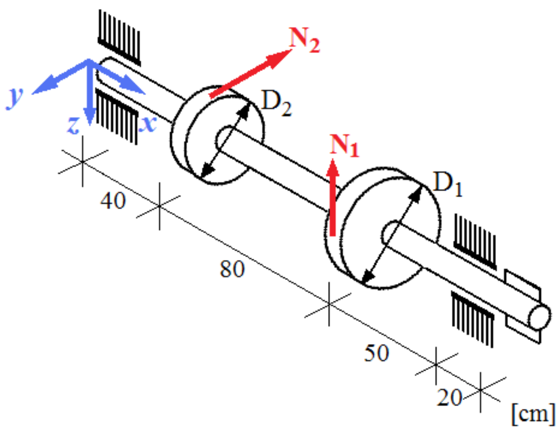
$$W_x=\frac{\pi D^3}{16}$$

Minimalna wymagana średnica:

$$\frac{M_{s,\mathrm{red}}^{max}}{W_x}<k_{sj} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad D>\sqrt[3]{\frac{16M_{s,\mathrm{red}}^{max}}{\pi k_{sj}}}\approx 55{,}388 \quad \text{mm}$$

ZADANIE 12.13

Dany jest wał napędzany silnikiem o mocy $P = 50$ kW i obrotach $n = 400\,\text{obr/min}$. Obroty przekazywane są przez sprzęgło z jednego krańca wału, na którym osadzone są koła pasowe o średnicach $D_1 = 50\,\text{cm}$ i $D_2 = 40\,\text{cm}$, przenoszące odpowiednio moc 30 kW i 20 kW. W każdym przedziale charakterystycznym wyznaczyć minimalną wymaganą średnicę wału dla obustronnego zginania i obustronnego skręcania $(\alpha = \sqrt{3})$ przy założeniu $k_{go} = 120$ MPa .



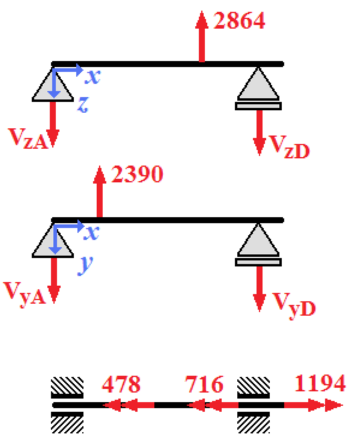
Przekazywanie obrotów przez sprzęgło realizuje się poprzez przyłożenie w tym miejscu skupionego momentu skręcającego. Jego wartość znajdujemy na podstawie relacji:

$$M_x = \frac{P}{2\pi \frac{n}{60}} \approx 9{,}55 \frac{P}{n} = 9{,}55 \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{400} = 1194 \cdot 10^3 \quad [\text{Nm}]$$

Znając obroty wału i moc przekazywaną na kołach pasowych, możemy wyznaczyć momenty obciążające wał w odpowiednich przekrojach i wreszcie wartości wypadkowych sił naciągu pasów obciążających wał.

$$M_{xi} = 9{,}55 \frac{P_i}{n} \qquad T_i = \frac{2 M_{xi}}{D_i} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} M_{x1} = 716\ \text{Nm} & T_1 = 2864\ \text{N} \\ M_{x2} = 478\ \text{Nm} & T_2 = 2390\ \text{N} \end{cases}$$

Schemat statyczny całego układu jest następujący:



Reakcje podporowe:

$$V_{zA} = 2864 \cdot \frac{0{,}5}{1{,}7} = 842 \qquad V_{zD} = 2864 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}7} = 2022$$

$$V_{yA} = 2390 \cdot \frac{1{,}3}{1{,}7} = 1828 \qquad V_{yD} = 2390 \cdot \frac{0{,}4}{1{,}7} = 562$$

Wypadkowy moment zginający: $M_g = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$

Zredukowany moment zginający dla $\alpha = \sqrt{3}$

$$M_{g,\text{red}} = \sqrt{M_g^2 + \left(\frac{\alpha}{2} M_x\right)^2} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + \frac{3}{4} M_x^2}$$

Rozkłady sił przekrojowych:

$AB: \ x \in (0\ ;\ 0{,}4)$

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = -842\,x \\ M_z = 1828\,x \\ M_g = 2012{,}6\,x \\ M_{g,\text{red}} = 2012{,}6\,x \end{cases}$$

$BC: \ x \in (0{,}4\ ;\ 1{,}2)$

$$\begin{cases} M_x = 478 \\ M_y = -842\,x \\ M_z = 562(1{,}7 - x) \\ M_g = \sqrt{(842\,x)^2 + [562(1{,}7 - x)]^2} \\ M_{g,\text{red}} = \sqrt{(842\,x)^2 + [562(1{,}7 - x)]^2 + \frac{3}{4} \cdot 478^2} \end{cases}$$

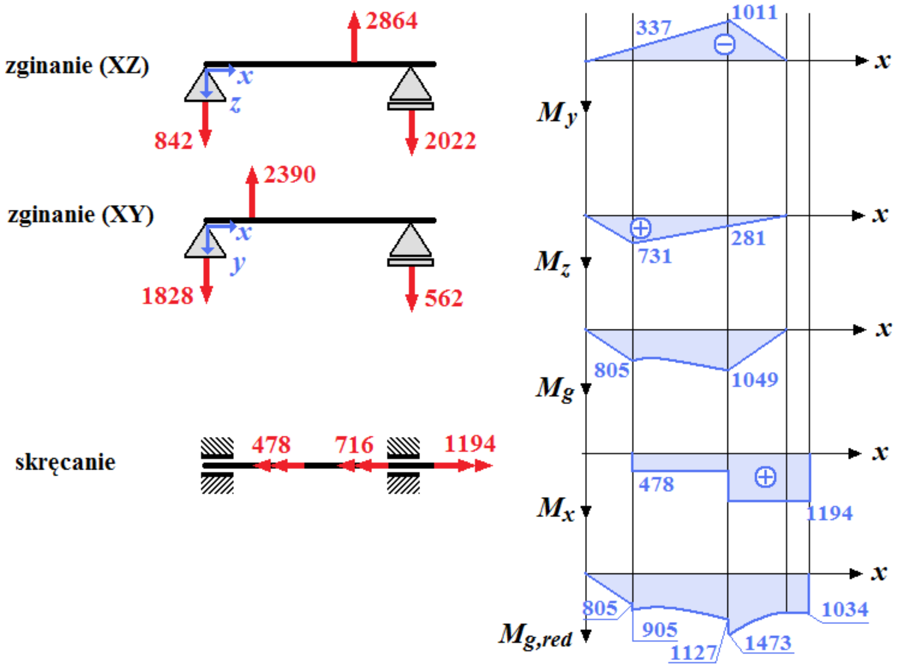
$CD: \quad x \in (1{,}2\ ;\ 1{,}7)$

$$\begin{cases} M_x = 1194 \\ M_y = -2022(1{,}7-x) \\ M_z = 562(1{,}7-x) \\ M_g = 2099(1{,}7-x) \\ M_{g,\mathrm{red}} = \sqrt{[2099(1{,}7-x)]^2 + \frac{3}{4}\cdot 1194^2} \end{cases}$$

$DE: \quad x \in (1{,}7\ ;\ 1{,}9)$

$$\begin{cases} M_x = 1194 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \\ M_g = 0 \\ M_{g,\mathrm{red}} = 1034 \end{cases}$$

	AB		BC		CD		DE	
	A	B	B	C	C	D	D	E
x	0	0,4	0,4	1,2	1,2	1,7	1,7	1,9
M_x	0	0	478	478	1194	1194	1194	1194
M_y	0	337	337	1011	1011	0	0	0
M_z	0	731	731	281	281	0	0	0
M_g	0	805	805	1049	1048	0	0	0
$M_{g,\mathrm{red}}$	0	805	905	1127	1473	1034	1034	1034



Minimalna wymagana średnica d wału:

Przedział AB: $\quad d > \sqrt[3]{\dfrac{32 M_{g,\mathrm{red}}}{\pi k_{go}}} = \sqrt[3]{\dfrac{32\cdot 805}{3{,}14\cdot 120\cdot 10^6}} = 40{,}89\cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = 42\ \mathrm{mm}$

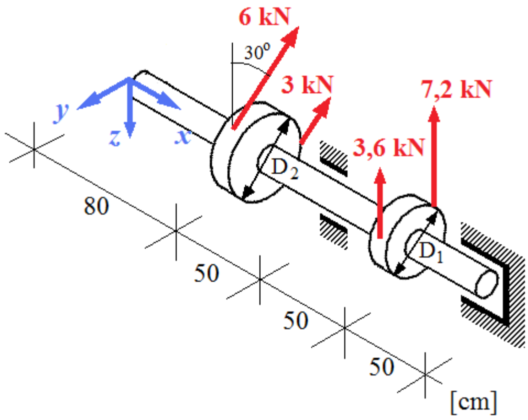
Przedział BC: $\quad d > \sqrt[3]{\dfrac{32 M_{g,\mathrm{red}}}{\pi k_{go}}} = \sqrt[3]{\dfrac{32\cdot 1127}{3{,}14\cdot 120\cdot 10^6}} = 45{,}74\cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad d_{BC} = 46\ \mathrm{mm}$

Przedział CD: $\quad d > \sqrt[3]{\dfrac{32 M_{g,\mathrm{red}}}{\pi k_{go}}} = \sqrt[3]{\dfrac{32\cdot 1473}{3{,}14\cdot 120\cdot 10^6}} = 50{,}01\cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad d_{CD} = 52\ \mathrm{mm}$

Przedział DE $\quad d > \sqrt[3]{\dfrac{32 M_{g,\mathrm{red}}}{\pi k_{go}}} = \sqrt[3]{\dfrac{32\cdot 1034}{3{,}14\cdot 120\cdot 10^6}} = 44{,}45\cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad d_{DE} = 46\ \mathrm{mm}$

ZADANIE 12.14

Dany jest wał o przekroju rurowym z osadzonymi kołami pasowymi o średnicach $D_1 = 50\,\mathrm{cm}$ i $D_2 = 60\,\mathrm{cm}$, i ciężarach odpowiednio $G_1 = 350\,\mathrm{N}$ $G_2 = 500\,\mathrm{N}$. Siły naciągu w pasach, oraz orientacja kierunku tych sił przedstawione są na rysunku. Wyznaczyć minimalną wymaganą średnicę zewnętrzną wału dla jednostronnego skręcania i obustronnego zginania, przyjmując naprężenia dopuszczalne równe k_{go}=110 MPa k_{sj}=127 MPa oraz stosunek średnicy wewnętrznej i zewnętrznej przekroju $\beta = d_w / d = 0{,}6$.



Wypadkowe siły i momenty skręcające działające na koła pasowe:

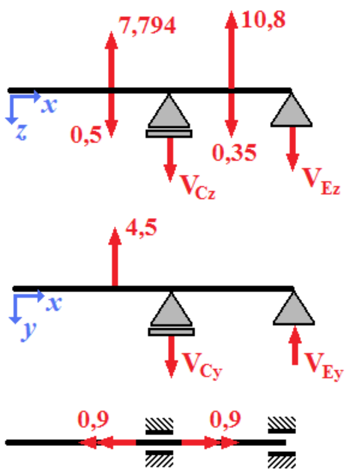
$$Q_1 = 7{,}2+3{,}6 = 10{,}8 \quad [\mathrm{kN}] \qquad M_{x1} = (7{,}2-3{,}6)\cdot\frac{D_1}{2} = 0{,}9 \quad [\mathrm{kNm}]$$

$$Q_2 = 6+3 = 9 \quad [\mathrm{kN}] \qquad M_{x2} = (6-3)\cdot\frac{D_2}{2} = 0{,}9 \quad [\mathrm{kNm}]$$

Siły te rozłożyć można na składowe w lokalnym układzie współrzędnych:

$$F_{z1} = -Q_1 = -10{,}8 \quad [\mathrm{kN}]$$
$$F_{z2} = -Q_2 \cos\varphi = -7{,}794 \quad [\mathrm{kN}]$$
$$F_{z2} = -Q_2 \sin\varphi = -4{,}5 \quad [\mathrm{kN}]$$

Schemat statyczny całego układu jest następujący:



Reakcje podporowe:

$$V_{Cz} = \frac{1}{1}\left[(10{,}8-0{,}35)\cdot 0{,}5 + (7{,}794-0{,}5)\cdot 1{,}5\right] = 16{,}166$$

$$V_{Ez} = \frac{1}{1}\left[(10{,}8-0{,}35)\cdot 0{,}5 - (7{,}794-0{,}5)\cdot 0{,}5\right] = 1{,}578$$

$$V_{Cy} = \frac{1}{1}\left[4{,}5\cdot 1{,}5\right] = 6{,}75$$

$$V_{Ey} = \frac{1}{1}\left[0{,}5\cdot 4{,}5\right] = 2{,}25$$

Rozkład sił przekrojowych:

$AB:\quad x \in (0\ ;\ 0{,}8)$
$$\begin{cases} M_y = 0 \\ M_z = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}$$

$BC:\quad x \in (0{,}8\ ;\ 1{,}3)$
$$\begin{cases} M_y = 7{,}294(x-0{,}8) \\ M_z = -4{,}5(x-0{,}8) \\ M_x = 0{,}9 \end{cases}$$

$CD:\quad x \in (1{,}3\ ;\ 1{,}8)$
$$\begin{cases} M_y = 7{,}294(x-0{,}8) - 16{,}166(x-1{,}3) \\ M_z = -4{,}5(x-0{,}8) + 6{,}75(x-1{,}3) \\ M_x = 0{,}9 \end{cases}$$

$DE:\quad x \in (1{,}8\ ;\ 2{,}3)$
$$\begin{cases} M_y = -1{,}578(2{,}3-x) \\ M_z = -2{,}25(2{,}3-x) \\ M_x = 0 \end{cases}$$

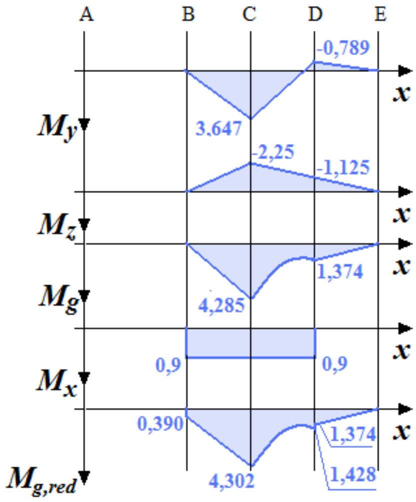
Wypadkowy moment zginający:

$$M_g = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

Moment zredukowany. Współczynnik α wyznaczamy na podstawie znajomości naprężeń dopuszczalnych:

$$\alpha = \frac{k_{go}}{k_{sj}} = 0{,}8661 \quad \Rightarrow \quad M_{g,\mathrm{red}} = \sqrt{M_g^2 + \left(\frac{\alpha}{2} M_x\right)^2} = \sqrt{M_g^2 + 0{,}1875\, M_x^2}$$

	AB		BC		CD		DE	
	A	B	B	C	C	D	D	E
x	0	0,8	0,8	1,3	1,3	1,8	1,8	2,3
M_y	0	0	0	3,647	3,647	-0,789	-0,789	0
M_z	0	0	0	-2,25	-2,25	-1,125	-1,125	0
M_g	0	0	0	4,285	4,285	1,374	1,374	0
M_x	0	0	0,9	0,9	0,9	0,9	0	0
$M_{g,\mathrm{red}}$	0	0	0,390	4,302	4,302	1,428	1,374	0



Największy moment zredukowany: $M_{g,\mathrm{red}}^{max} = 4{,}302\ \mathrm{kNm}$

Wymagana średnica wału: $$d > \sqrt[3]{\frac{32\, M_{g,\mathrm{red}}^{max}}{\pi k_g (1-\beta^4)}} = 77{,}06\ \mathrm{mm}$$

Przyjęto $d_z = 80\,\mathrm{mm}$, $d_w = \beta\, d_x = 48\,\mathrm{mm}$

