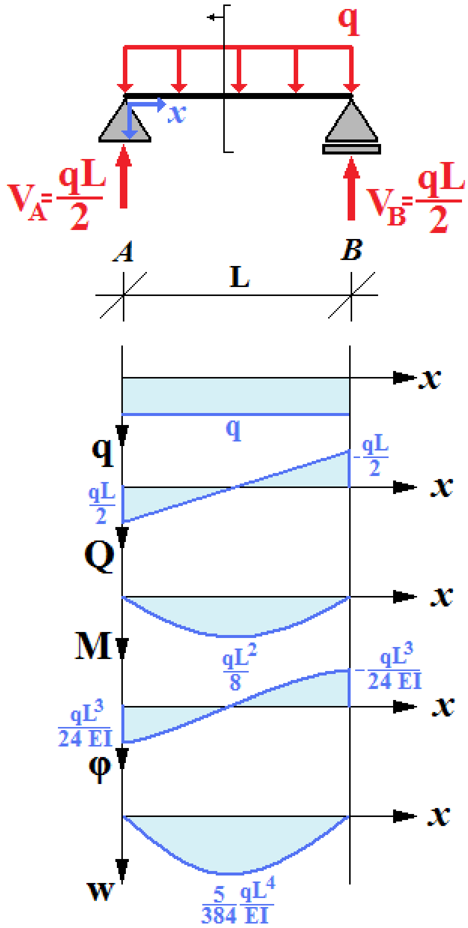
ZADANIE 14.1

Obliczyć maksymalne ugięcie belki swobodnie podpartej obciążonej obciążeniem ciągłym. Wykorzystać metodę Clebscha.



Reakcje podporowe:

$$V_A=\frac{q\,L}{2}\qquad V_B=\frac{q\,L}{2}$$

Rozkład momentów zginających:

$$M(x)=V_A\cdot x-q\cdot x\cdot\frac{x}{2}=\frac{q\,L}{2}\cdot(x-0)^1-\frac{q}{2}(x-0)^2$$

Rozkład kąta ugięcia:

$$\varphi(x)=-\frac{1}{EI}\left[C_1+\frac{q\,L}{2\cdot 2}\cdot(x-0)^2-\frac{q}{2\cdot 3}(x-0)^3\right]=$$

$$-\frac{1}{EI}\left[C_1+\frac{q\,L}{4}\cdot x^2-\frac{q}{6}x^3\right]$$

Rozkład ugięć:

$$w(x)=\frac{1}{EI}\left[C_2+C_1x+\frac{q\,L}{4\cdot 3}\cdot(x-0)^3-\frac{q}{2\cdot 3\cdot 4}(x-0)^4\right]=$$

$$-\frac{1}{EI}\left[C_2+C_1x+\frac{q\,L}{12}\cdot x^3-\frac{q}{24}x^4\right]$$

Warunki brzegowe:

lewa podpora: $w(0)=0 \quad\Rightarrow\quad w(0)=-\frac{1}{EI}[C_2]=0 \quad\Rightarrow\quad C_2=0$

prawa podpora: $w(L)=0 \quad\Rightarrow\quad w(L)=-\frac{1}{EI}\left[C_1L+\frac{1}{12}qL^4-\frac{1}{24}qL^4\right]=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=-\frac{1}{24}qL^3$

$$w(x)=\frac{q}{EI}\left[\frac{L^3}{24}x-\frac{L}{12}x^3+\frac{1}{24}x^4\right]$$

Maksymalne ugięcie występuje w połowie długości belki: $w\left(x=\frac{L}{2}\right)=\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI}$

Kąty ugięcia na podporach: $\varphi(0)=-\varphi(L)=\frac{qL^3}{24\,EI}$

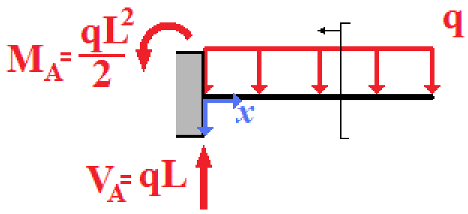
ZADANIE 14.2

Balkon żelbetowy o wysięgu L = 1,6 m obciążony jest obciążeniem równomiernym q' = 2,25 kN/m^2. Pomijając aspekty wykonawcze oraz wymagania wytrzymałościowe, wyznaczyć minimalną grubość płyty balkonowej tak, aby maksymalne ugięcie nie przekroczyło $w_{dop}=1\,\text{cm}$. Przyjąć E = 34 GPa. Wykorzystać metodę Clebscha.

Rozpatrujemy wycinek wspornika o szerokości b równej 1 metr bieżący.

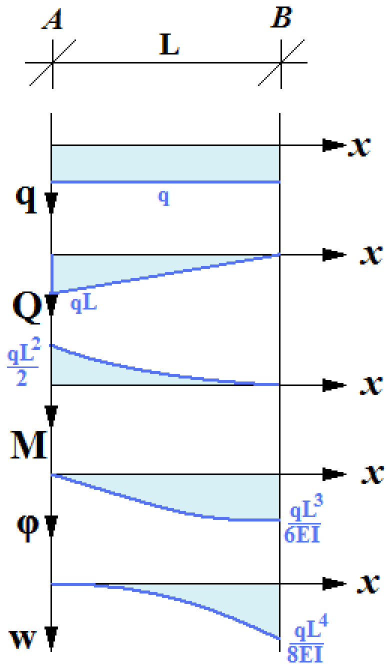
Obciążenie wycinka: $q = q'\cdot 1 = 2{,}25$ kN/m

Moment bezwładności: $I = \dfrac{b\cdot h^3}{12} = \dfrac{h^3}{12}$



Reakcje podporowe:

$$V_A = qL \qquad M_A = \frac{qL^2}{2}$$



Rozkład momentów zginających:

$$M(x) = -M_A + V_A\cdot x - q\cdot x\cdot\frac{x}{2} =$$

$$\frac{-qL^2}{2}(x-0)^0 + qL\cdot(x-0)^1 - \frac{q}{2}(x-0)^2$$

Rozkład kąta ugięcia:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_1 - \frac{qL^2}{2}(x-0)^1 + \frac{qL}{2}\cdot(x-0)^2 - \frac{q}{2\cdot 3}(x-0)^3\right] =$$

$$-\frac{1}{EI}\left[C_1 - \frac{qL^2}{2}x + \frac{qL}{2}\cdot x^2 - \frac{q}{6}x^3\right]$$

Rozkład ugięć:

$$w(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_2 + C_1 x - \frac{qL^2}{2\cdot 2}(x-0)^2 + \frac{qL}{2\cdot 3}\cdot(x-0)^3 - \frac{q}{6\cdot 4}(x-0)^4\right] =$$

$$-\frac{1}{EI}\left[C_2 + C_1 x - \frac{qL^2}{4}x^2 + \frac{qL}{6}\cdot x^3 - \frac{q}{24}x^4\right]$$

Warunki brzegowe:

lewa podpora:

$$\left.\begin{array}{lllll} w(0)=0 & \Rightarrow & w(0) = -\dfrac{1}{EI}[C_2]=0 & \Rightarrow & C_2 = 0 \\ \varphi(0)=0 & \Rightarrow & w'(0) = -\dfrac{1}{EI}[C_1]=0 & \Rightarrow & C_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad w(x) = \frac{q}{EI}\left[\frac{L^2}{4}x^2 - \frac{L}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{24}x^4\right]$$

Maksymalne ugięcie i kąt ugięcia występują na końcu wspornika:

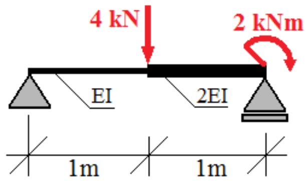
$$w(L) = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \varphi(L) = \frac{qL^3}{6EI}$$

Z warunku sztywności wyznaczamy minimalną grubość płyty:

$$w_{max} < w_{dop} \quad\Rightarrow\quad \frac{12qL^4}{8Eh^3} < w_{dop} \quad\Rightarrow\quad h > \sqrt[3]{\frac{3qL^4}{2Ew_{dop}}} = 40{,}2\text{ mm}$$

ZADANIE 14.3

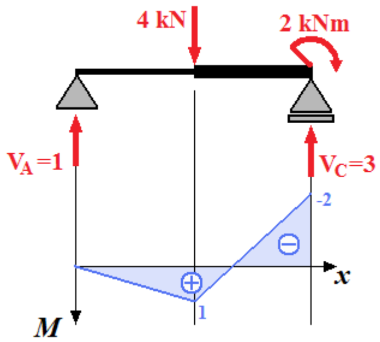
Wyznaczyć maksymalne ugięcie belki o zmiennej sztywności, obciążonej jak na rysunku. Wykorzystać metodę Mohra.



Reakcje podporowe:

$$\Sigma M_A = 0: \quad -4\cdot 1 - 2 + V_C \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 3$$

$$\Sigma Y = 0: \quad V_A - 4 + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 1$$



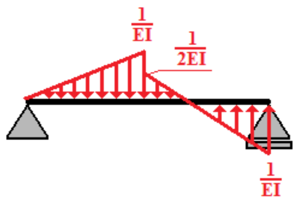
Rozkład momentów zginających:

$$M_{AB} = 1\cdot x = x$$

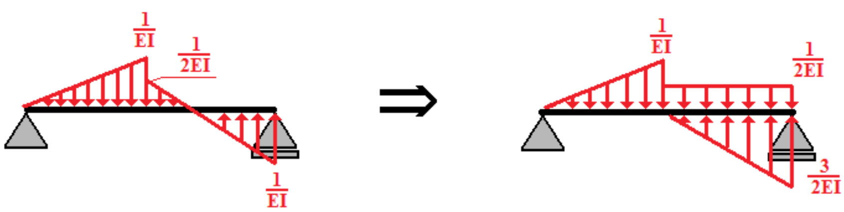
$$M_{BC} = 1\cdot x - 4\cdot(x-1) = 4 - 3x$$

Wyznaczanie ugięć i kątów ugięć – belka zastępcza:

- skrajna podpora przegubowa z lewej strony nie zamienia się;
- skrajna podpora przegubowa z prawej strony nie zamienia się;
- obciążenie belki zastępczej stanowi odwrócony wykres momentów zginających podzielony przez sztywność belki odpowiednią dla danego przedziału;



Obciążenie liniowo zmienne, zmieniające znak na prawej połowie belki zastąpimy sumą obciążenie równomiernego i trójkątnego:



Reakcje na belce zastępczej:

$$\Sigma \tilde{M}_A = 0: \quad -\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{EI}\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1\right) - \frac{1}{2EI}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot 1\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2EI}\cdot 1\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3}\cdot 1\right) + \tilde{V}_C\cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_C = -\frac{1}{12EI}$$

$$\Sigma Y = 0: \quad \tilde{V}_A - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{EI}\cdot 1 - \frac{1}{2EI}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2EI}\cdot 1 + \tilde{V}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_A = \frac{1}{3EI}$$

Rozkład kątów ugięć i ugięć belki rzeczywistej (fikcyjnych sił poprzecznych i momentów fikcyjnych na belce zastępczej):

Przedział AB $x \in (0\ ;\ 1)$

$$\varphi = \tilde{Q} = \frac{1}{3\,EI} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{x}{1} \cdot x = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2\right]$$

$$w = \tilde{M} = \frac{1}{3\,EI} \cdot x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot x \cdot x\right) \cdot \frac{x}{3} = \frac{1}{3\,EI}\left[x - \frac{1}{2}x^3\right]$$

Ekstrema lokalne rozkładu ugięć występują w punktach zerowania się kąta ugięć:

$$\varphi = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = -\sqrt{2/3} \quad \notin \quad \text{AB} \\ x = \sqrt{2/3} \approx 0{,}816 \quad \in \quad \text{AB} \end{array} \quad \Rightarrow \quad w(0{,}816) \approx \frac{0{,}181}{EI}$$

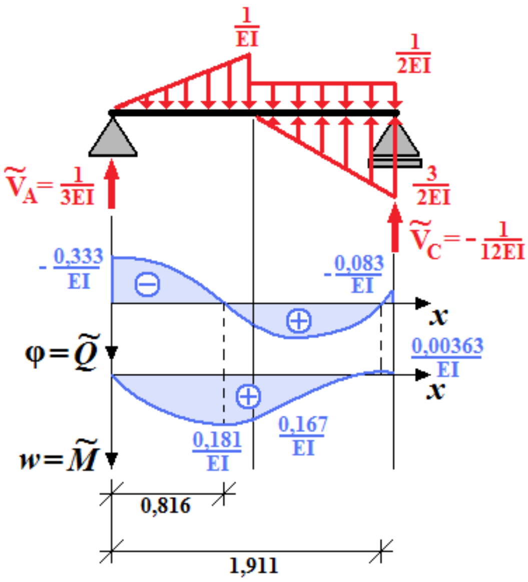
Przedział BC $x \in (1\ ;\ 2)$

$$\varphi = \tilde{Q} = \frac{1}{3\,EI} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot 1 - \frac{1}{2\,EI} \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2\,EI} \cdot \frac{(x-1)}{1} \cdot (x-1) = \frac{1}{12\,EI}\left[9x^2 - 24x + 13\right]$$

$$w = \tilde{M} = \frac{1}{3\,EI} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot \left(x - \frac{2}{3} \cdot 1\right) - \frac{1}{2\,EI} \cdot (x-1) \cdot \frac{(x-1)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2\,EI} \cdot \frac{(x-1)}{1} \cdot (x-1) \cdot \frac{(x-1)}{3} =$$
$$= \frac{1}{12\,EI}\left[3x^3 - 12x^2 + 13x - 2\right]$$

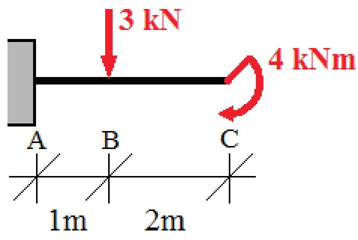
Ekstrema lokalne rozkładu ugięć występują w punktach zerowania się kąta ugięć:

$$\varphi = \frac{1}{12\,EI}\left[9x^2 - 24x + 13\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 0{,}756 \quad \notin \quad \text{BC} \\ x = \sqrt{2/3} \approx 1{,}911 \quad \in \quad \text{BC} \end{array} \quad \Rightarrow \quad w(1{,}911) \approx -\frac{0{,}00363}{EI}$$

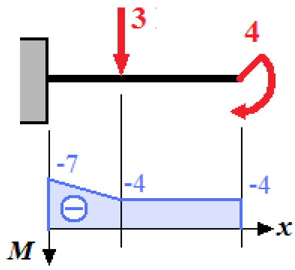


ZADANIE 14.4

Wyznaczyć ugięcie oraz kąt ugięcia punktów B i C wspornika obciążonego jak na rysunku. Przyjąć, że belka wykonana jest ze stali o module Younga $E = 210\ \text{GPa}$. Przekrój belki dobrać z uwagi na nośność na zginanie (pomijając wpływ ścinania) spośród profili walcowanych IPE, przyjmując graniczne naprężenie normalne $k_r = 215\ \text{MPa}$. Wykorzystać metodę Mohra.



Redukując układ sił z prawej strony powierzchni cięcia w każdym przedziale charakterystycznym możemy wyznaczyć rozkład momentów zginających bez wyznaczania reakcji podporowych:



$$M_{AB}(x) = -3\cdot(1-x) - 4 \qquad [\text{kNm}]$$
$$M_{BC}(x) = -4$$

Maksymalny moment zginający występuje w przekroju utwierdzenia:
$$M_{max} = M_{AB}(x=0) = -7\ \text{kNm}$$

Minimalny wymagany wskaźnik wytrzymałości: $\quad W_{min} = \dfrac{M_{max}}{k_r} = 32{,}56\ \text{cm}^3$

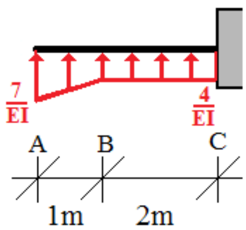
Najmniejszym profilem IPE o wymaganym wskaźniku jest IPE100:

Wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie: $W = 34{,}2\ \text{cm}^3$

Moment bezwładności przekroju: $I = 171\ \text{cm}^4$

Sztywność na zginanie: $EI = 359{,}1\ \text{kNm}^2$

Wyznaczanie ugięć i kątów ugięć – belka zastępcza:



- utwierdzony koniec z lewej strony zamienia się w koniec swobodny;
- swobodny koniec z prawej strony zamienia się w utwierdzenie;
- obciążenie belki zastępczej stanowi odwrócony wykres momentów zginających podzielony przez sztywność belki;

Wartość ugięcia (kąta ugięcia) w danym punkcie jest liczbowo równa wartości fikcyjnego momentu zginającego (fikcyjnej siły poprzecznej) w odpowiednim punkcie belki zastępczej. Wartości na wykresach momentów (i w obciążeniu fikcyjnym) zapisano w kNm. Biorąc te wartości do obliczeń i podstawiając EI w kNm² otrzymujemy wyniki w jednostkach układu SI. Redukcja układu sił z lewej strony każdego punktu pozwala uniknąć konieczności wyznaczania reakcji w belce fikcyjnej.

Ugięcie w B: $$w_B = \tilde{M}_B = \left[\frac{4}{EI}\cdot 1\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 1\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{EI}-\frac{4}{EI}\right)\cdot 1\right]\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 1\right] = \frac{3}{EI} = 8{,}35\cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

Kąt ugięcia w B: $$\varphi_B = \tilde{Q}_B = \left[\frac{4}{EI}\cdot 1\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{7}{EI}-\frac{4}{EI}\right)\cdot 1\right]\cdot = \frac{11}{2\,EI} = 0{,}0153\ \text{rad} \;\Rightarrow\; \varphi_B = 0{,}88^\circ$$

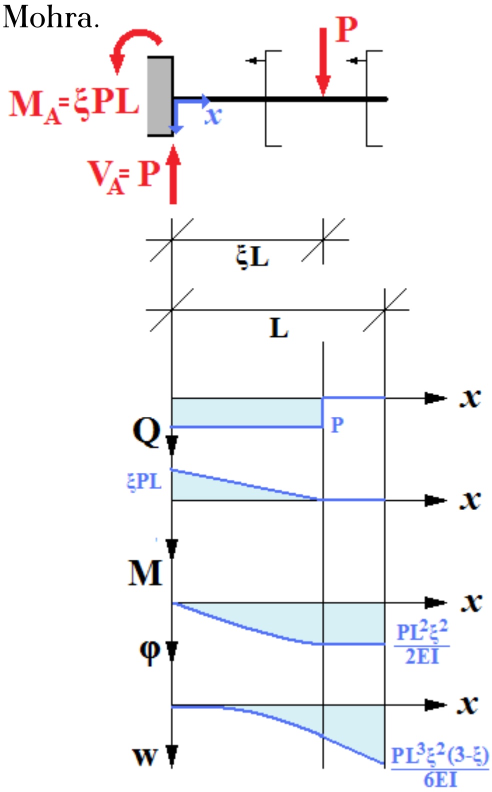
Ugięcie w C: $$w_C = \tilde{M}_C = \left[\frac{4}{EI}\cdot 3\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 3\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{EI}-\frac{4}{EI}\right)\cdot 1\right]\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot 1 + 2\right] = \frac{22}{EI} = 61{,}26\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Kąt ugięcia w C: $$\varphi_C = \tilde{Q}_C = \left[\frac{4}{EI}\cdot 3\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{7}{EI}-\frac{4}{EI}\right)\cdot 1\right]\cdot = \frac{27}{2\,EI} = 0{,}0376\ \text{rad} \;\Rightarrow\; \varphi_C = 2{,}15^\circ$$

ZADANIE 14.5

Wyznaczyć rozkład ugięć oraz obliczyć maksymalne ugięcie wspornika obciążonego siłą poprzeczną. Zadanie rozwiązać metodą Clebscha oraz metodą Mohra.

$\xi \in (0;1)$



METODA CLEBSCHA:

Reakcje podporowe:

$V_A = P \qquad M_A = \xi L P$

Rozkład momentów zginających:

$$M(x) = V_A \cdot (x-0)^1 - M_A \cdot (x-0)^0 \Big|^{AB} - P \cdot (x - \xi L)^1 \Big|^{BC} =$$
$$P \cdot x - \xi L P \Big|^{AB} - P \cdot (x - \xi L) \Big|^{BC}$$

Rozkład kąta ugięcia:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_1 + \frac{P}{2}(x-0)^2 - \xi L P (x-0)^1 \Big|^{AB} - \frac{P}{2}(x-\xi L)^2 \Big|^{BC} \right]$$
$$-\frac{1}{EI}\left[C_1 + \frac{P}{2}x^2 - \xi L P x \Big|^{AB} - \frac{P}{2}(x-\xi L)^2 \Big|^{BC} \right]$$

Rozkład ugięcia:

$$w(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_2 + C_1 x + \frac{P}{2\cdot 3}(x-0)^3 - \frac{\xi L P}{2}(x-0)^2 \Big|^{AB} - \frac{P}{2\cdot 3}(x-\xi L)^3 \Big|^{BC} \right]$$
$$-\frac{1}{EI}\left[C_2 + C_1 x + \frac{P}{6}x^3 - \frac{\xi L P}{2}x^2 \Big|^{AB} - \frac{P}{6}(x-\xi L)^3 \Big|^{BC} \right]$$

Warunki brzegowe:

lewa podpora:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w(0) = -\frac{1}{EI}[C_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w'(0) = -\frac{1}{EI}[C_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$w(x) = \frac{P}{EI}\left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{\xi L}{2}x^2 \Big|^{AB} + \frac{1}{6}(x-\xi L)^3 \Big|^{BC} \right]$$

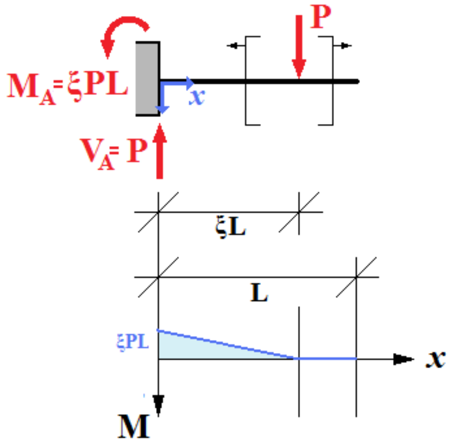
Maksymalne ugięcie występuje na końcu wspornika – podstawiamy $x = L$ do tych części wyrażenia na $w(x)$, które obowiązują w przedziale, do którego należy $x = L$. Punkt ten należy do przedziału BC – uwzględniamy więc wszystkie wyrażenia na lewo od kreski BC:

$$w(L) = \frac{1}{6}\frac{PL^3\xi^2(3-\xi)}{EI}$$

Maksymalny kąt ugięcia na końcu wspornika: $\qquad \varphi(L) = \frac{PL^2\xi^2}{2EI}$

Dla siły przyłożonej w połowie długości belki $(\xi = 0{,}5)$: $\qquad w(L) = \frac{5}{48}\frac{PL^3}{EI}$

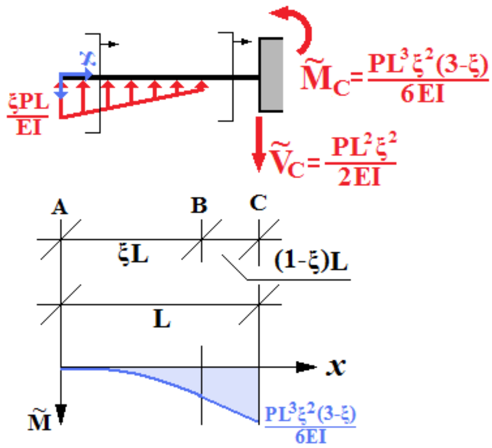
METODA MOHRA:



Belka rzeczywista:

Reakcje podporowe:
$V_A = P \qquad M_A = \xi L P$

Rozkład momentów zginających:
$$M(x) = \begin{cases} -\xi PL + Px & \Leftrightarrow \quad x \in (0; \xi L) \\ 0 & \Leftrightarrow \quad x \in (\xi L; L) \end{cases}$$



Belka zastępcza:
Reakcje podporowe:

$\Sigma \tilde{M}_C = 0$:
$$\frac{1}{2}\xi L \cdot \frac{\xi PL}{EI} \cdot \left[(1-\xi)L + \frac{2}{3}\xi L\right] - \tilde{M}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}_C = \frac{PL^3\xi^2(3-\xi)}{6EI}$$

ΣY:
$$\frac{1}{2}\xi L \cdot \frac{\xi PL}{EI} - \tilde{V}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_C = \frac{PL^2\xi^2}{2EI}$$

Ponieważ wiadomo, że maksymalne ugięcie w belce rzeczywistej występować będzie na końcu wspornika, zatem wartość momentu fikcyjnego w tym punkcie – tj. moment utwierdzenia belki zastępczej – jest wartością tego ugięcia. Wartość fikcyjnej reakcji pionowej na podporze belki zastępczej jest kątem ugięcia w tym punkcie belki rzeczywistej.

Rozkład momentów fikcyjnych – rozkład ugięć belki rzeczywistej
Przedział AB $\; x \in (0; \xi L)$
$$\tilde{M}(x) = \frac{1}{2}\tilde{q}(x)(\xi L - x) \cdot \frac{1}{3}(\xi L - x) + \tilde{M}_B - \tilde{V}_B(L-x)$$

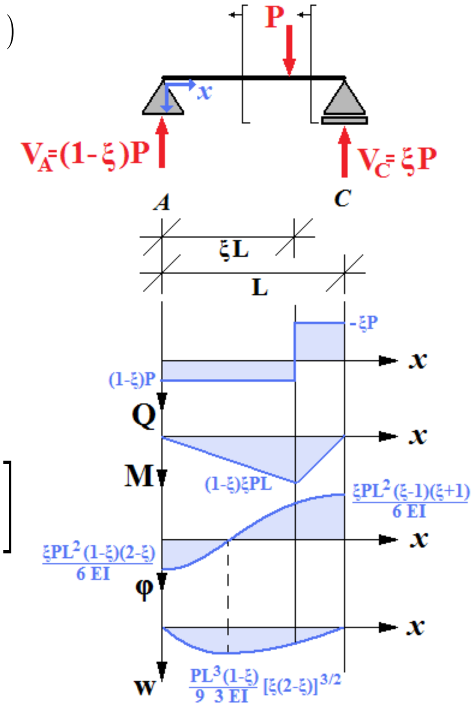
Gęstość trójkątnego obciążenia fikcyjnego w punkcie x:
$$\frac{\tilde{q}(x)}{\xi L - x} = \frac{\frac{\xi PL}{EI}}{\xi L} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}(x) = \frac{P}{EI}(\xi L - x)$$
$$\tilde{M}(x) = \frac{P}{6EI}(\xi L - x)^3 + \frac{PL^3\xi^2(3-\xi)}{6EI} - \frac{PL^2\xi^2}{2EI}(L-x) =$$
$$= \frac{P}{6EI}\left[(\xi L - x)^3 + L^3\xi^2(3-\xi) - 3L^2\xi^2(L-x)\right]$$

Przedział BC $\; x \in (\xi L; L)$
$$\tilde{M}(x) = \tilde{M}_B - \tilde{V}_B(L-x) = \frac{PL^2\xi^2}{2EI}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\xi\right)L - (L-x)\right]$$

ZADANIE 14.6

Obliczyć maksymalne ugięcie belki swobodnie podpartej obciążonej siłą poprzeczną. Zadanie rozwiązać metodą Clebscha.

$$\xi\in(0;1)$$



Reakcje podporowe:

$$V_A=(1-\xi)P \qquad V_C=\xi P$$

Rozkład momentów zginających:

$$M(x)=V_A\cdot(x-0)^1\Big|^{AB}-P\cdot(x-\xi L)^1\Big|^{BC}=$$

$$=(1-\xi)P\cdot(x-0)^1\Big|^{AB}-P\cdot(x-\xi L)^1\Big|^{BC}$$

Rozkład kąta ugięcia:

$$\varphi(x)=-\frac{1}{EI}\left[C_1+\frac{1}{2}(1-\xi)P(x-0)^2\Big|^{AB}-\frac{1}{2}P\cdot(x-\xi L)^2\Big|^{BC}\right]$$

Rozkład ugięć:

$$w(x)=-\frac{1}{EI}\left[C_2+C_1x+\frac{1}{6}(1-\xi)P(x-0)^3\Big|^{AB}-\frac{1}{6}P\cdot(x-\xi L)^3\Big|^{BC}\right]$$

Warunki brzegowe:

lewa podpora:

$$w(0)=0 \quad\Rightarrow\quad w(0)=-\frac{1}{EI}[C_2]=0 \quad\Rightarrow\quad C_2=0$$

prawa podpora:

$$w(L)=0 \quad\Rightarrow\quad w(L)=-\frac{1}{EI}\left[C_1L+\frac{(1-\xi)}{6}PL^3-\frac{(1-\xi)^3}{6}PL^3\right]=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=-\frac{(2-\xi)(1-\xi)\xi L^2P}{6}$$

$$w(x)=\frac{P}{6EI}\left[(2-\xi)(1-\xi)\xi L^2x-(1-\xi)x^3\Big|^{AB}+(x-\xi L)^3\Big|^{BC}\right]$$

Maksymalne ugięcie występuje w miejscu zerowania się kąta ugięcia:

$$\varphi_{AB}(x)=\frac{\mathrm{d}w_{AB}}{\mathrm{d}x}=\frac{P}{2EI}\left[\frac{1}{3}(2-\xi)(1-\xi)\xi L^2-(1-\xi)x^2\right] \qquad \wedge \qquad x\in(0;\xi L)$$

$$x_w=L\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\xi(2-\xi)} \qquad x_w\in(0;\xi L) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_w>0 \quad\Leftrightarrow\quad L>0,\ \xi\in(0;1) \\ x_w<\xi L \quad\Rightarrow\quad L\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\xi(2-\xi)}<\xi L \quad\Rightarrow\quad \xi>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Jeśli siła znajduje się za środkiem przęsła belki $\xi>0{,}5$, wtedy ugięcie znajduje się przed punktem przyłożenia siły ($x\in(0;\xi L)$ - korzystamy ze wzoru na ugięcie i kąt ugięcia na przedziale *AB*).

Maksymalne ugięcie:

$$w(x_w)=\frac{PL^3(1-\xi)}{9\sqrt{3}EI}[\xi(2-\xi)]^{3/2} \qquad \text{np. dla } \xi=\frac{1}{2}: \qquad w=\frac{PL^3}{48EI}$$

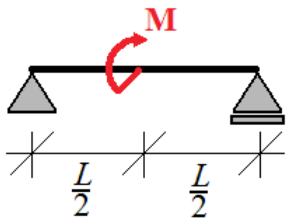
Kąty ugięcia przy podporach:

$$\varphi(0)=\frac{\xi PL^2(1-\xi)(2-\xi)}{6EI}, \qquad \varphi(L)=\frac{\xi PL^2(\xi-1)(\xi+1)}{6EI} \qquad \text{np. dla } \xi=\frac{1}{2}: \qquad \varphi=\frac{PL^2}{16EI}$$

Jeśli siła znajduje się przed środkiem przęsła, wtedy ugięcie znajduje się za punktem przyłożenia siły i możemy zastosować te same wzory odmierzając jednak x_w od prawej podpory.

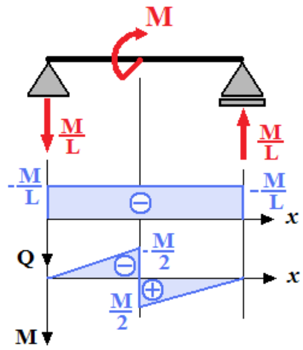
ZADANIE 14.7

Dany jest pręt długości $L=4\,\mathrm{m}$ o średnicy D, obustronnie podparty, obciążony w połowie swojej długości skupionym momentem zginającym $M=8\,\mathrm{kNm}$. Dobrać średnicę pręta w taki sposób, aby nie przekroczone zostały maksymalne dopuszczalne naprężenia $f_d=215\ \mathrm{MPa}$ oraz aby maksymalne wygięcie nie przekroczyło dopuszczalnej wartości $w_{max}=L/500=8\,\mathrm{mm}$, jeśli moduł Younga $E=210\ \mathrm{GPa}$. Dla przyjętej średnicy wyznaczyć rzeczywiste naprężenia maksymalne i ugięcia maksymalne.



Reakcje podporowe:

$$V_A=-\frac{M}{L}\qquad V_C=\frac{M}{L}$$



Rozkład momentów zginających:

$$M(x)=V_A\cdot(x-0)^1\Big|^{AB}+M\cdot\left(x-\frac{L}{2}\right)^0\Big|^{BC}=$$

$$=-\frac{M}{L}\cdot(x-0)^1\Big|^{AB}+M\cdot\left(x-\frac{L}{2}\right)^0\Big|^{BC}$$

Projektowanie z uwagi na nośność:

Maks. moment zginający: $\quad M_{max}=|M(0{,}5L^+)|=|M(0{,}5L^-)|=\frac{M}{2}$

Wskaźnik wytrz. na zginanie: $\quad W_y=\frac{\pi D^3}{32}$

Z warunku wytrzymałości: $\quad \sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_y}<f_d \quad\Rightarrow\quad D>\sqrt[3]{\frac{16M}{\pi f_d}}=57{,}44\,\mathrm{mm}$

Rozkład kąta ugięcia:

$$\varphi(x)=-\frac{1}{EI}\left[C_1-\frac{M}{2L}(x-0)^2\Big|^{AB}+\frac{M}{1}\cdot\left(x-\frac{L}{2}\right)^1\Big|^{BC}\right]$$

Rozkład ugięć:

$$w(x)=-\frac{1}{EI}\left[C_2+C_1x-\frac{M}{6L}(x-0)^3\Big|^{AB}+\frac{M}{2}\cdot\left(x-\frac{L}{2}\right)^2\Big|^{BC}\right]$$

Warunki brzegowe:

lewa podpora:

$$w(0)=0\quad\Rightarrow\quad w(0)=-\frac{1}{EI}[C_2]=0\quad\Rightarrow\quad C_2=0$$

prawa podpora:

$$w(L)=0\quad\Rightarrow\quad w(L)=-\frac{1}{EI}\left[C_1L-\frac{ML^2}{6}-\frac{ML^2}{8}\right]=0\quad\Rightarrow\quad C_1=\frac{ML}{24}$$

Szukając ekstremum lokalnego rozkładu ugięć musimy znaleźć miejsca zerowe rozkładu kątów ugięć.

$$\varphi_{AB}(x) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{ML}{24} - \frac{M}{2L}x^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \mp\frac{L}{2\sqrt{3}}, \quad x_1 \notin AB$$

$$\varphi_{BC}(x) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{ML}{24} - \frac{M}{2L}x^2 + M\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = \left(1 \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)L, \quad x_4 \notin BC$$

Ugięcia maksymalne:

$$w(x_2) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{ML}{24}\cdot\frac{L}{2\sqrt{3}} - \frac{M}{6L}\cdot\left(\frac{L}{2\sqrt{3}}\right)^3\right] = -\frac{ML^2}{144\sqrt{3}\,EI}$$

$$w(x_3) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{ML}{24}\cdot\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)L - \frac{M}{6L}\cdot\left(\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)L\right)^3 + \frac{M}{2}\cdot\left(\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)L - \frac{L}{2}\right)^2\right] = \frac{ML^2}{144\sqrt{3}\,EI}$$

Projektowanie z uwagi na sztywność:

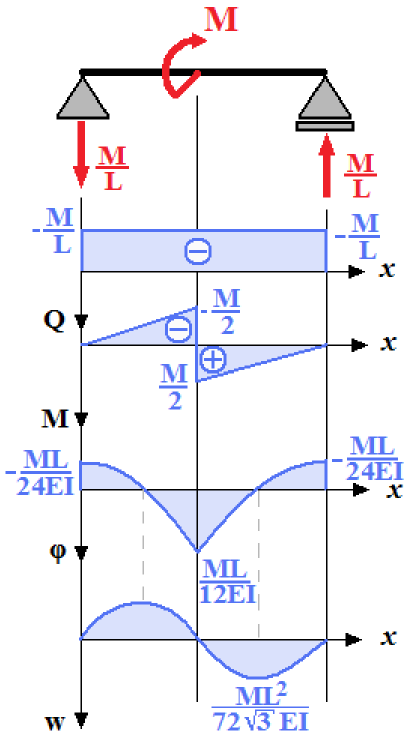
Maksymalne ugięcie: $w_{max} = \dfrac{ML^2}{72\sqrt{3}\,EI}$

Moment bezwładności przekroju: $I = \dfrac{\pi D^4}{64}$

Z warunku sztywności: $w_{max} < w_{dop} \quad \Rightarrow \quad D > \sqrt[4]{\dfrac{8ML^2}{9\sqrt{3}\pi E w_{dop}}} = 59{,}39\,\text{mm}$

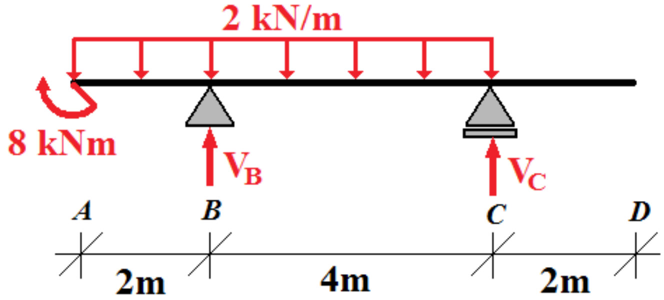
Przyjęto średnicę $D = 60\,\text{mm}$

Naprężenie maksymalne: $\sigma_{max} = 188{,}6\ \text{MPa}$
Ugięcie maksymalne: $w_{max} = 7{,}68\,\text{mm}$



ZADANIE 14.8

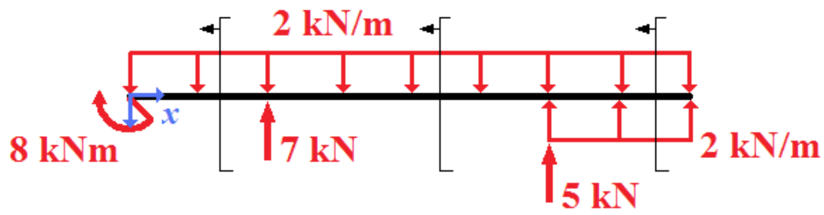
Wyznaczyć maksymalne ugięcie belki jak na rysunku i porównać ją z wartością ugięcia środka przęsła. Wykorzystać metodę Clebscha. Sztywność pręta $EI = 13500\ \text{kN m}^2$:



Reakcje podporowe:

$$\Sigma M_B = 0:$$
$$-8 - 2\cdot 6\cdot 1 + 4\cdot V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C = 5$$
$$\Sigma Y = 0:$$
$$-2\cdot 6 + V_B + V_C = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 7$$

UWAGA – ponieważ rozkład momentów musi być dany pojedynczą funkcją, która w każdym kolejnym przedziale jest określona takim samym wzorem jak w poprzednich powiększonym o dodatkowe obciążenie na tym przedziale – tam gdzie, zanika obciążenie ciągłe, dodajemy fikcyjne obciążenie ciągłe zwrócone przeciwnie:



Rozkład sił poprzecznych:

$$Q(x) = -q x\Big|^{AB} + V_B\Big|^{BC} + V_C + q(x-6)\Big|^{CD} = -2x\Big|^{AB} + 7\Big|^{BC} + 5 + 2(x-6)\Big|^{CD}$$

Rozkład momentów:

$$M(x) = M(x-0)^0 - \frac{q}{2}(x-0)^2\Bigg|^{AB} + V_B(x-2)^1\Bigg|^{BC} + V_C(x-6)^1 + \frac{q}{2}(x-6)^2\Bigg|^{CD} =$$
$$= 8(x-0)^0 - (x-0)^2\Big|^{AB} + 7(x-2)^1\Big|^{BC} + 5(x-6)^1 + (x-6)^2\Big|^{CD}$$

Rozkład kąta ugięcia:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_1 + 8(x-0)^1 - \frac{1}{3}(x-0)^3\Bigg|^{AB} + \frac{7}{2}(x-2)^2\Bigg|^{BC} + \frac{5}{2}(x-6)^2 + \frac{1}{3}(x-6)^3\Bigg|^{CD}\right]$$

Rozkład ugięcia:

$$w(x) = -\frac{1}{EI}\left[C_2 + C_1 x + \frac{8}{2}(x-0)^2 - \frac{1}{12}(x-0)^4\Bigg|^{AB} + \frac{7}{6}(x-2)^3\Bigg|^{BC} + \frac{5}{6}(x-6)^3 + \frac{1}{12}(x-6)^4\Bigg|^{CD}\right]$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{cases} w(x=2)=0 \\ w(x=6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1+C_2=-\frac{44}{3} \\ 6C_1+C_2=-\frac{332}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-24 \\ C_2=\frac{100}{3} \end{cases}$$

$$w(x)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{100}{3}+24x-4x^2+\frac{1}{12}x^4\Big|^{AB}-\frac{7}{6}(x-2)^3\Big|^{BC}-\frac{5}{6}(x-6)^3-\frac{1}{12}(x-6)^4\Big|^{CD}\right]$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{EI}\left[24-8x+\frac{1}{3}x^3\Big|^{AB}-\frac{7}{2}(x-2)^2\Big|^{BC}-\frac{5}{2}(x-6)^2-\frac{1}{3}(x-6)^3\Big|^{CD}\right]$$

Maksymalne ugięcie występuje w miejscu zerowania się kąta ugięcia:

$$\frac{dw_{AB}}{dx}=\varphi_{AB}(x)==\frac{1}{EI}\left[24-8x+\frac{1}{3}x^3\right]=0 \quad \wedge \quad x\in(0,2)$$

- brak rozwiązań

$$\frac{dw_{BC}}{dx}=\varphi_{BC}(x)==\frac{1}{EI}\left[24-8x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}(x-2)^2\right]=0 \quad \wedge \quad x\in(2,6)$$

- $x\approx 3{,}89\,\mathrm{m}$
  $w(x=3{,}890)\approx 7{,}929\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$

$$\frac{dw_{CD}}{dx}=\varphi_{CD}(x)==\frac{1}{EI}\left[24-8x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}(x-2)^2-\frac{5}{2}(x-6)^2-\frac{1}{3}(x-6)^3\right]=0 \quad \wedge \quad x\in(6,8)$$

- brak rozwiązań

Maksymalne ugięcia mogą wystąpić również na końcach belki:
$w(0)=-2{,}469\cdot 10^{-3}$ m $\qquad w(8)=-1{,}185\cdot 10^{-3}$ m

Maksymalne wychylenie belki (ugięcie ujemne – wychylenie w górę) występuje na jej lewym krańcu i wynosi:

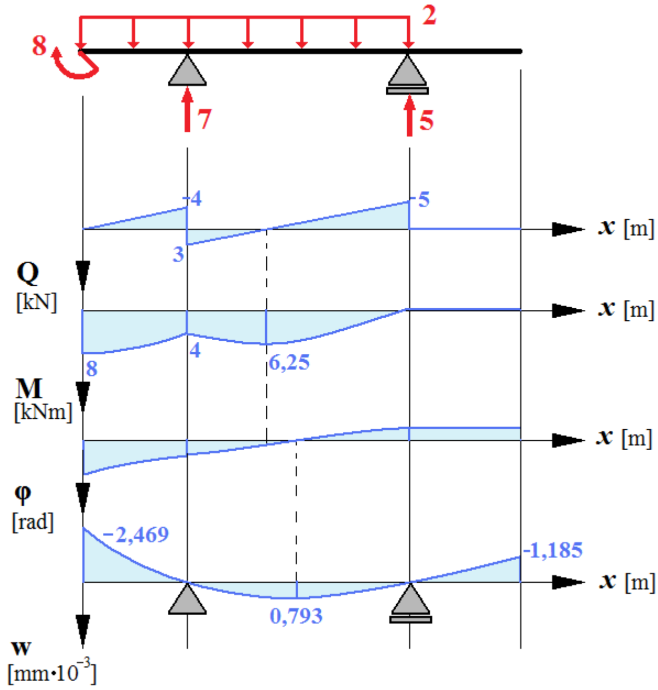
$$w(0)=-2{,}469\,\mathrm{mm}$$

Maksymalne ugięcie (w dół) leży w środkowym przęśle w odległości $x\approx 3{,}89\,\mathrm{m}$ od lewego krańca belki i wynosi:

$$w(3{,}89)\approx 0{,}7929\,\mathrm{mm}$$

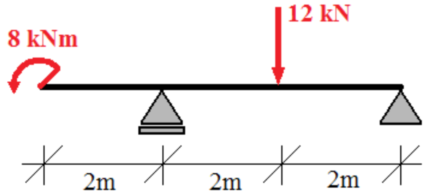
Ugięcie środka przęsła – we wzorze na $w(x)$ podstawiamy $x=4$. Punkt ten leży w przedziale BC, uwzględniamy więc tylko te części wzoru, które leżą na lewo ok kreski BC:

$$w(4)\approx 0{,}7901\,\mathrm{mm}$$



ZADANIE 14.9

Wyznaczyć maksymalne ugięcie w belce zginanej o profilu IPE200, obciążonej jak na rysunku obok. Wykorzystać metodę Mohra. Moduł Younga E = 210 GPa.



Wyznaczamy rozkład momentów w belce rzeczywistej:

Reakcje podporowe:

$$\Sigma M_B = 0:\ 8 - 12\cdot 2 + 4\cdot V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D = 4$$

$$\Sigma Y = 0:\ V_B - 12 + V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = 8$$

Rozkład momentów:

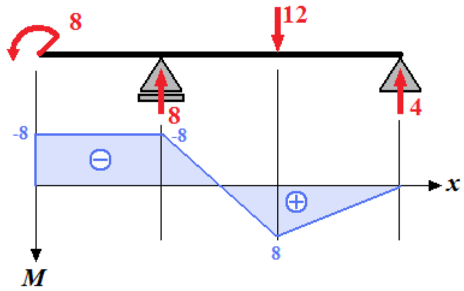
Brak obciążenia ciągłego – rozkład momentów jest przedziałami liniowo zmienny. Wystarczy zatem wyznaczyć momenty na krańcach przedziałów charakterystycznych.

$$M_A = -8$$

$$M_B^L = M_B^P = -8$$

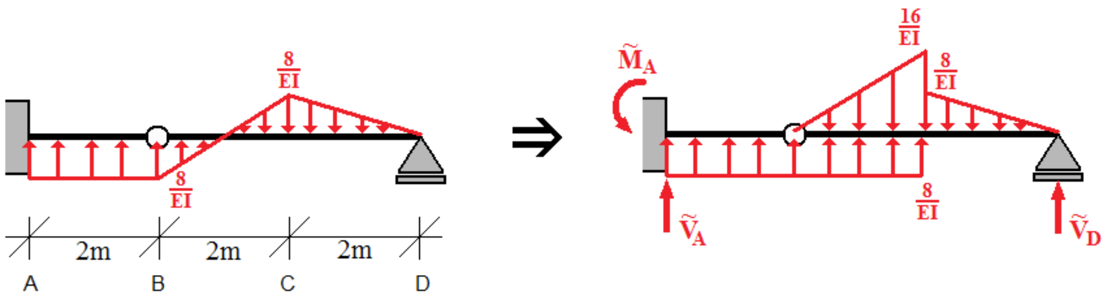
$$M_C^L = M_C^P = -8 + V_B\cdot 2 = 8$$

$$M_D = 0$$



Belka zastępcza:

- swobodny koniec z lewej strony zamienia się w utwierdzenie;
- pośrednia podpora przegubowa zamienia się w przegub;
- prawa podpora przegubowa skrajna nie zmienia się;
- obciążenie belki zastępczej stanowi odwrócony wykres momentów zginających podzielony przez sztywność belki;



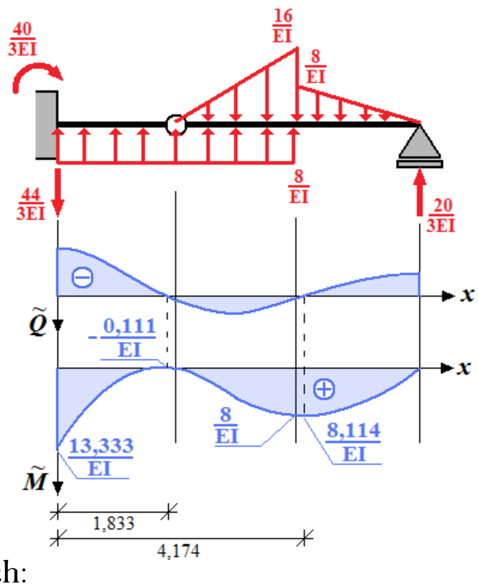
Obciążenie zmieniające znak na przedziale BC, zastąpimy złożeniem obciążenia prostokątnego i trójkątnego. Reakcje podporowe:

$$\Sigma M_B^P = 0:\ \frac{8}{EI}\cdot 2\cdot 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{EI}\cdot 2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{EI}\cdot 2\right)\cdot\left(2 + \frac{1}{3}\cdot 2\right) + \tilde{V}_D\cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_D = \frac{20}{3\,EI}$$

$$\Sigma Y = 0:\ \tilde{V}_A + \frac{8}{EI}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{EI}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{EI}\cdot 2 + \tilde{V}_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_A = -\frac{44}{3\,EI}$$

$$\Sigma M_B^L = 0:\ \tilde{M}_A - \tilde{V}_A\cdot 2 - \frac{8}{EI}\cdot 2\cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{M}_A = -\frac{40}{3\,EI}$$

Rozkład fikcyjnych momentów i fikcyjnych sił poprzecznych na belce zastępczej. Maksymalne ugięcie (moment fikcyjny) występuje w miejscu zerowania się kąta ugięcia (fikcyjnej siły poprzecznej):



Przedział AB $x \in (0;2)$

$$w = \tilde{M} = \frac{1}{EI}\left[\frac{40}{3} - \frac{44}{3}\cdot x + 8\cdot x\cdot\frac{x}{2}\right]$$

$$\varphi = \tilde{Q} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{44}{3} + 8\cdot x\right]$$

$$\tilde{Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_e \approx 1{,}833 \qquad \tilde{M}(x_e) = -\frac{0{,}111}{EI}$$

Przedział BC $x \in (2;4)$

$$w = \tilde{M} = \frac{1}{EI}\left[\frac{40}{3} - \frac{44}{3}\cdot x + 8\cdot x\cdot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot(x-2)\cdot\frac{16}{2}(x-2)\cdot\frac{1}{3}\cdot(x-2)\right]$$

$$\varphi = \tilde{Q} = \frac{d\tilde{M}}{dx} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{44}{3} + 8\cdot x - \frac{1}{2}\cdot(x-2)\cdot\frac{16}{2}\cdot(x-2)\right]$$

$$\tilde{Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_e \approx 1{,}845 \notin BC \\ x_e \approx 4{,}155 \notin BC \end{array}$$

Przedział CD $x \in (4;6)$

$$w = \tilde{M} = \frac{1}{EI}\left[\frac{20}{3}\cdot(6-x) - \frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot\frac{8}{2}\cdot(6-x)\cdot\frac{1}{3}\cdot(6-x)\right]$$

$$\varphi = \tilde{Q} = \frac{d\tilde{M}}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\frac{-20}{3} + \frac{1}{2}\cdot(6-x)\cdot\frac{8}{2}\cdot(6-x)\right]$$

$$\tilde{Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_e \approx 4{,}174 \quad \Rightarrow \quad M(x_e) \approx \dfrac{8{,}114}{EI} \\ x_e \approx 7{,}826 \notin CD \end{array}$$

Wartości ugięcia na krańcach przedziałów charakterystycznych:

$$w_A = \tilde{M}(0) = \frac{13{,}333}{EI}$$

$$w_B = \tilde{M}(2) = 0$$

$$w_C = \tilde{M}(4) = \frac{8}{EI}$$

$$w_D = \tilde{M}(6) = 0$$

Moment bezwładności IPE200: $I = 1940 \text{ cm}^4$
Sztywność giętna belki: $EI = 4074 \text{ kNm}^2$

Maksymalne ugięcie:
Celem uzyskania wartości liczbowej, maksymalną wartość momentu fikcyjnego, który obliczony był przy użyciu jednostki kN, należy podzielić przez sztywność giętną wyrażoną w kNm^2 – uzyskany wynik jest w metrach.

$$w_{max} = \frac{\tilde{M}_{max}}{EI} = \frac{13{,}333}{4074} = 3{,}273\cdot 10^{-3}\text{m}$$

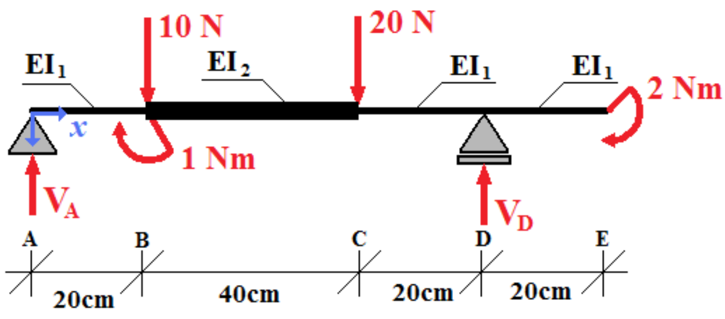
Maksymalne ugięcie wynosi $w_{max} = 3{,}273 \text{ mm}$.

ZADANIE 14.10

Wyznaczyć ugięcie pręta kołowego jak na rysunku – wykorzystać metodę Mohra. Moduł Younga $E=210\ \text{GPa}$. Pręt ma zmienną średnicę:

$$\phi_1=10\ \text{mm} \qquad I_1=\frac{\pi\phi_1^4}{64}\approx 0{,}0491\,\text{cm}^4$$

$$\phi_2=12\ \text{mm} \qquad I_2=\frac{\pi\phi_2^4}{64}\approx 0{,}1018\,\text{cm}^4$$



Sztywność porównawcza:

$$EI=EI_1=103{,}084\,\text{Nm}^2$$

$$EI_2=\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^4 EI=\frac{1296}{625}EI=2{,}0736\,EI$$

Reakcje podporowe:

$$\Sigma M_A=-10\cdot 0{,}2-1-20\cdot 0{,}6+V_B\cdot 0{,}8-2=0 \quad\Rightarrow\quad V_D=\frac{85}{4}=21{,}25\quad [N]$$

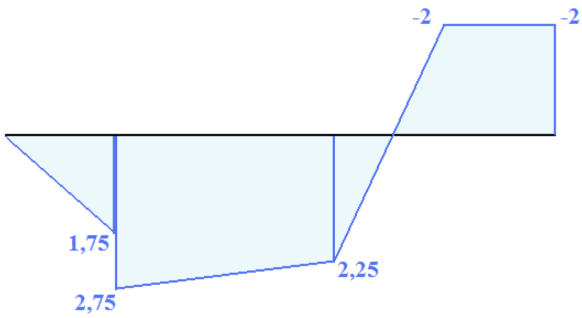
$$\Sigma M_D=-V_A\cdot 0{,}8-1+10\cdot 0{,}6+20\cdot 0{,}2-2=0 \quad\Rightarrow\quad V_A=\frac{35}{4}=8{,}75\quad [N]$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma Y=\frac{85}{4}+\frac{35}{4}-10-20=0$$

Brak obciążenia ciągłego – rozkład momentów jest liniowy, wystarczy znaleźć wartości momentów w punktach charakterystycznych (w punktach przyłożenia momentów skupionych – z obu stron):

$$M_A=0$$
$$M_B^L=V_A\cdot 0{,}2=1{,}75$$
$$M_B^P=V_A\cdot 0{,}2+1=2{,}75$$
$$M_C=V_A\cdot 0{,}6+1-10\cdot 0{,}4=2{,}25$$
$$M_D=-2$$
$$M_E=-2$$

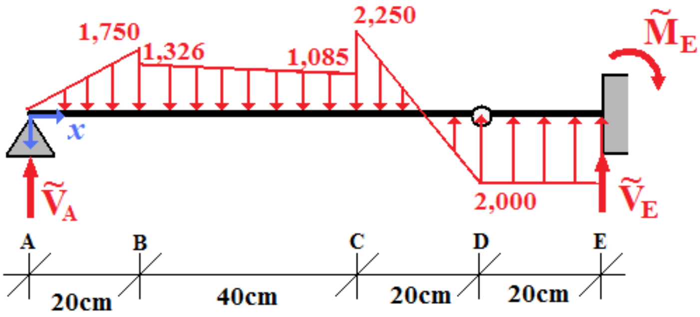


Belka zastępcza:

- lewa brzegowa podpora przegubowa nie zmienia się;
- pośrednia podpora przegubowa zmienia się na przegub;
- prawy brzeg swobodny zmienia się na utwierdzenie;
- obciążenie belki zastępczej stanowi odwrócony wykres momentów zginających w belce rzeczysitej podzielony przez odpowiednią dla danego odcinka sztywność giętną;

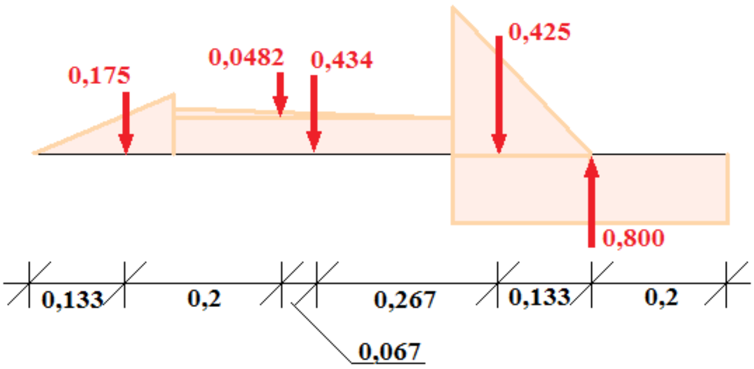
Gęstość obciążenia:

$$\frac{1{,}75}{EI_1}=\frac{1{,}75}{EI}$$
$$\frac{2{,}75}{EI_2}=\frac{6975}{5184\,EI}\approx 1{,}326\frac{1}{EI}$$
$$\frac{2{,}25}{EI_2}=\frac{5625}{5184\,EI}\approx 1{,}085\frac{1}{EI}$$
$$\frac{2{,}25}{EI_1}=\frac{2{,}25}{EI}$$
$$\frac{2}{EI_1}=\frac{2}{EI}$$



Tymczasowo pomijamy oznaczenie *EI*. Celem ułatwienia obliczeń statycznych, obciążenie zewnętrzne zapiszemy jako sumę obciężń prostokątnych i trójkątnych oraz wyznaczymy ich wypadkowe i ich położenie:

$$W_1=\frac{1}{2}\cdot 1{,}75\cdot 0{,}2=\frac{7}{40}=0{,}175 \qquad x_{W_1}=\frac{2}{3}\cdot 0{,}2=\frac{2}{15}\approx 0{,}133$$
$$W_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6975}{5184}-\frac{5625}{5184}\right)\cdot 0{,}4=\frac{125}{2596}\approx 0{,}0482 \qquad x_{W_2}=0{,}2+\frac{1}{3}\cdot 0{,}4=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$$
$$W_3=\frac{5625}{5184}\cdot 0{,}4=\frac{125}{288}\approx 0{,}434 \qquad x_{W_3}=0{,}2+\frac{1}{2}\cdot 0{,}4=\frac{2}{5}=0{,}4$$
$$W_4=\frac{1}{2}\cdot(2+2{,}25)\cdot 0{,}2=\frac{17}{40}=0{,}425 \qquad x_{W_4}=0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2=\frac{2}{3}\approx 0{,}667$$
$$W_5=2\cdot 0{,}4=\frac{4}{5}=0{,}8 \qquad x_{W_5}=1-\frac{1}{2}\cdot 0{,}4=\frac{4}{5}=0{,}8$$



Reakcje w belce zastępczej:

$$\Sigma M_D^P=-\tilde{M}_E+0{,}2\cdot\tilde{V}_E+2\cdot 0{,}2\cdot\frac{0{,}2}{2}=0$$
$$\Sigma M_A=-\frac{7}{40}\cdot\frac{2}{15}-\frac{125}{2596}\cdot\frac{1}{3}-\frac{125}{288}\cdot\frac{2}{5}-\frac{17}{40}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}+\tilde{V}_E\cdot 1-\tilde{M}_E=0$$
$$\Sigma Y=\tilde{V}_A-\frac{7}{40}-\frac{125}{2596}-\frac{125}{288}-\frac{17}{40}+\frac{4}{5}+\tilde{V}_E=0$$

$$\tilde{V}_A=\frac{153929}{373824}\approx 0{,}4118 \qquad \tilde{V}_E=-\frac{242219}{1869120}\approx -0{,}1296 \qquad \tilde{M}_E=\frac{26321}{1869120}\approx 0{,}0141$$

Siły przekrojowe w belce zastępczej:

Przedział AB $x\in(0\ ;\ 0{,}2)$ (normalna zewnętrzna w lewo)

$$\tilde{Q}(x)=\tilde{V}_A-\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}75}{0{,}2}\cdot x^2=0{,}4118-4{,}375\,x^2$$

$$\tilde{M}(x)=\tilde{V}_A\cdot x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}75}{0{,}2}\cdot x^2\cdot\frac{x}{3}=0{,}4118\,x-1{,}458\,x^3$$

Poszukiwanie lokalnego ekstremum ugięcia: $\tilde{Q}(x)=0 \quad\Rightarrow$ brak rozwiązań w przedziale

Przedział BC $x\in(0{,}2\ ;\ 0{,}6)$ (normalna zewnętrzna w prawo)

$$\tilde{Q}(x)=-\tilde{V}_E-0{,}8+0{,}425+1{,}085\cdot(0{,}6-x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{(1{,}326-1{,}085)}{0{,}4}\cdot(0{,}6-x)^2=$$

$$=0{,}3013\,x^2-1{,}447\,x+0{,}514$$

$$\tilde{M}(x)=-\tilde{M}_E+\tilde{V}_E\cdot(1-x)-0{,}8\cdot(0{,}8-x)+0{,}425\cdot\left(\frac{2}{3}-x\right)-\frac{1{,}085}{2}\cdot(0{,}6-x)^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1{,}326-1{,}085)}{0{,}4}\cdot(0{,}6-x)^3=$$

$$=0{,}100\,x^3-0{,}723\,x^2+0{,}514\,x-0{,}004$$

Poszukiwanie lokalnego ekstremum ugięcia: $\tilde{Q}(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x_0=0{,}386$

Lokalne ekstremum ugięcia: $w_{max}=\dfrac{\tilde{M}(x_0)}{EI}=0{,}092\dfrac{1}{EI}\approx 0{,}89\ \ [\mathrm{mm}]$

Przedział CD $x\in(0{,}6\ ;\ 0{,}8)$ (normalna zewnętrzna w prawo)

$$\tilde{Q}(x)=-\tilde{V}_E-2\cdot(1-x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4{,}25}{0{,}2}\cdot(0{,}8-x)^2=10{,}625\,x^2-15{,}000\,x+4{,}930$$

$$\tilde{M}(x)=-\tilde{M}_E+\tilde{V}_A\cdot(1-x)+\frac{2}{2}\cdot(1-x)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{4{,}25}{0{,}2}\cdot\frac{1}{3}(0{,}8-x)^3=$$

$$=3{,}542\,x^3-7{,}500\,x^2+4{,}930\,x-0{,}957$$

Poszukiwanie lokalnego ekstremum ugięcia: $\tilde{Q}(x)=0 \quad\Rightarrow$ brak rozwiązań w przedziale

Przedział DE $x\in(0{,}8\ ;\ 1)$ (normalna zewnętrzna w prawo)

$$\tilde{Q}(x)=-\tilde{V}_E-2\cdot(1-x)=-1{,}870+2\,x$$

$$\tilde{M}(x)=-\tilde{M}_E+\tilde{V}_A\cdot(1-x)+\frac{2}{2}\cdot(1-x)^2=x^2-1{,}870\,x+0{,}856$$

Poszukiwanie lokalnego ekstremum ugięcia: $\tilde{Q}(x)=0 \quad\Rightarrow\quad x_0=0{,}935$

Lokalne ekstremum ugięcia: $w_{max}=\dfrac{\tilde{M}(x_0)}{EI}=-0{,}018\dfrac{1}{EI}\approx -0{,}17\ \ [\mathrm{mm}]$

Globalne maksimum ugięcia może występować również na końcach pręta.

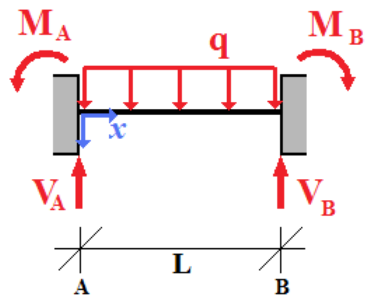
Ugięcie na końcu pręta: $w=\dfrac{\tilde{M}(1)}{EI}=-0{,}014\dfrac{1}{EI}\approx -0{,}14\ \ [\mathrm{mm}]$

Drugi koniec jest podparty $w=0$ [mm]

Maksymalne ugięcie belki wynosi 0,89 mm.

ZADANIE 14.11

Wyznaczyć reakcje oraz rozkład sił przekrojowych w belce statycznie niewyznaczalnej jak na rysunku.



Równanie rządzące zagadnieniem: $$\frac{d^4 w}{d x^4} = \frac{q}{EI}$$

Warunki brzegowe:

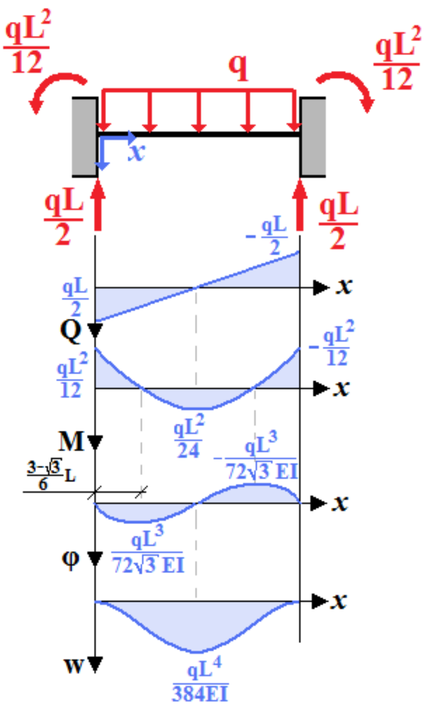
$$\begin{cases} w(0)=0 \\ \varphi(0)=0 \\ w(L)=0 \\ \varphi(L)=0 \end{cases}$$

Bezpośrednio całkując równanie różniczkowe:

$$w(x) = \frac{q}{24\,EI} x^4 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

Z warunków brzegowych wyznaczamy stałe całkowania:

$$\begin{cases} w(0)=C_4=0 \\ \varphi(0)=C_3=0 \\ w(L)=\dfrac{qL^4}{24\,EI}+C_1 L^3+C_2 L^2+C_3 L+C_4=0 \\ \varphi(L)=\dfrac{qL^3}{6\,EI}+3C_1 L^2+2C_2 L+C_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-\dfrac{qL}{12\,EI} \\ C_2=\dfrac{qL^2}{24\,EI} \\ C_3=0 \\ C_4=0 \end{cases}$$



Rozkład ugięcia:

$$w(x) = \frac{q}{EI}\left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{L}{12}x^3 + \frac{L^2}{24}x^2\right]$$

Rozkład kątów ugięcia:

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{q}{EI}\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{L}{4}x^2 + \frac{L^2}{12}x\right]$$

Rozkład momentów zginających:

$$M(x) = -EI\frac{d^2 w}{d x^2} = q\left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{L}{2}x - \frac{L^2}{12}\right]$$

Rozkład sił poprzecznych:

$$Q(x) = \frac{dM}{dx} = -EI\frac{d^3 w}{d x^3} = q\left[\frac{L}{2} - x\right]$$

Reakcje podporowe:

Momenty utwierdzenia: $M_A=-M(0)=\dfrac{qL^2}{12}$ $\quad M_B=-M(L)=\dfrac{qL^2}{12}$

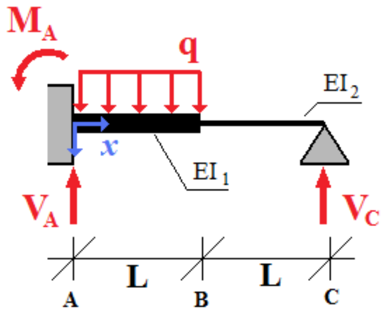
Reakcje pionowe: $V_A=Q(0)=\dfrac{qL}{2}$ $\quad V_B=-Q(L)=\dfrac{qL}{2}$

Moment w środku przęsła: $M\left(\dfrac{L}{2}\right)=\dfrac{qL^2}{24}$

Ugięcie maksymalne w połowie przęsła: $w\left(\dfrac{L}{2}\right) = \dfrac{q L^4}{384\,EI}$

ZADANIE 14.12

Wyznaczyć reakcje w belce statycznie niewyznaczalnej o zmiennej sztywności. Wykorzystać metodę Clebscha.



$I_1=2I_2$, $E=const.$

Równania równowagi:

$$\Sigma M_C=0: \quad \Rightarrow \quad M_A+q\cdot L\cdot\frac{3}{2}L-V_A\cdot 2L=0$$
$$\Sigma Y=0: \quad \Rightarrow \quad V_A-qL+V_C=0$$

Rozkład momentów:

Przedział AB $x\in(0;L)$

$$M_1(x)=-M_A(x-0)^0+V_A(x-0)^1-\frac{q}{2}(x-0)^2$$

Przedział BC $x\in(L;2L)$ (wprowadzamy fikcyjne obciążenie równoważące)

$$M_2(x)=-M_A(x-0)^0+V_A(x-0)^1-\frac{q}{2}(x-0)^2+\frac{q}{2}(x-L)^2$$

Rozkład kąta ugięcia:

Przedział AB $x\in(0;L)$

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{EI_1}\int M_1\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{EI_1}\left[C_1-M_A(x-0)^1+\frac{V_A}{2}(x-0)^2-\frac{q}{6}(x-0)^3\right]=$$
$$=-\frac{1}{EI_1}\left[C_1-M_Ax+\frac{V_A}{2}x^2-\frac{q}{6}x^3\right]$$

Przedział BC $x\in(L;2L)$

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{EI_2}\int M_2\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{EI_2}\left[D_1-M_A(x-0)^1+\frac{V_A}{2}(x-0)^2-\frac{q}{6}(x-0)^3+\frac{q}{6}(x-L)^3\right]=$$
$$=-\frac{1}{EI_2}\left[D_1-M_Ax+\frac{V_A}{2}x^2-\frac{q}{6}x^3+\frac{q}{6}(x-L)^3\right]$$

Rozkład ugięć:

Przedział AB $x\in(0;L)$

$$w_1(x)=-\frac{1}{EI_1}\left[C_2+C_1x-\frac{M_A}{2}(x-0)^2+\frac{V_A}{6}(x-0)^3-\frac{q}{24}(x-0)^4\right]=$$
$$=-\frac{1}{EI_1}\left[C_2+C_1x-\frac{M_A}{2}x^2+\frac{V_A}{6}x^3-\frac{q}{24}x^4\right]$$

Przedział BC $x\in(L;2L)$

$$w_2(x)=-\frac{1}{EI_2}\left[D_2+D_1x-\frac{M_A}{2}(x-0)^2+\frac{V_A}{6}(x-0)^3-\frac{q}{24}(x-0)^4+\frac{q}{24}(x-L)^4\right]=$$
$$=-\frac{1}{EI_2}\left[D_2+D_1x-\frac{M_A}{2}x^2+\frac{V_A}{6}x^3-\frac{q}{24}x^4+\frac{q}{24}(x-L)^4\right]$$

Nieznane reakcje oraz stałe całkowania wyznaczamy z równań równowagi, z warunków brzegowych oraz z warunków zszycia:

warunki brzegowe:

$$w_1(0)=0$$
$$\varphi_1(0)=0$$
$$w_2(2L)=0$$

warunki zszycia:

$$w_1(L)=w_2(L)$$
$$\varphi_1(L)=\varphi_2(L)$$

równania równowagi:

$$\Sigma M_C=0$$
$$\Sigma Y=0$$

$$w_1(0)=-\frac{1}{EI_1}[C_2]=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=0$$

$$\varphi_1(x)=-\frac{1}{EI_1}[C_1]=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0$$

$$\begin{cases} w_2(2L)=-\dfrac{1}{EI_2}\left[D_2+2D_1L-2M_AL^2+\dfrac{4}{3}V_AL^3-\dfrac{5}{8}qL^4\right]=0 \\ w_1(L)-w_2(L)=\dfrac{1}{EI_2}\left[\left(D_2+D_1L-\dfrac{M_A}{2}L^2+\dfrac{V_A}{6}L^3-\dfrac{q}{24}L^4\right)-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{M_A}{2}L^2+\dfrac{V_A}{6}L^3-\dfrac{q}{24}L^4\right)\right]=0 \\ \varphi_1(L)-\varphi_2(L)=\dfrac{1}{EI_2}\left[\left(D_1-M_AL+\dfrac{V_A}{2}L^2-\dfrac{q}{6}L^3\right)-\dfrac{1}{2}\left(-M_AL+\dfrac{V_A}{2}L^2-\dfrac{q}{6}L^3\right)\right]=0 \end{cases}$$

$$D_1=\frac{1}{96}qL^3 \qquad D_2=\frac{5}{432}qL^4 \qquad M_A=\frac{11}{36}qL^2 \qquad V_A=\frac{65}{72}qL$$

Reakcja na prawej podporze:

$$\Sigma Y=0: \quad \Rightarrow \quad V_A-qL+V_C=0 \quad \Rightarrow \quad V_C=\frac{7}{72}qL$$