

## NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

### Równanie różniczkowe belki zginanej i ściskanej (rozciąganej):

- ściskanie:  $w^{(4)} + k^2 w^{(2)} = \frac{q(x)}{EI}$      $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ ,  $N > 0$   
CORJ:  $w_{og} = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + C_3 x + C_4$
- rozciąganie:  $w^{(4)} - k^2 w^{(2)} = \frac{q(x)}{EI}$      $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ ,  $N > 0$   
CORJ:  $w_{og} = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(kx) + C_3 x + C_4$

### Przy znanym rozkładzie momentów zginających od sił poprzecznych:

- ściskanie:  $w^{(2)} + k^2 w = -\frac{M_0(x)}{EI}$      $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ ,  $N > 0$   
CORJ:  $w_{og} = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$
- rozciąganie:  $w^{(2)} - k^2 w = -\frac{M_0(x)}{EI}$      $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ ,  $N > 0$   
CORJ:  $w_{og} = C_3 \sinh(kx) + C_4 \cosh(kx)$

### Równanie różniczkowe belki zginanej na podłożu sprężystym Winklera:

$$w^{(4)} + z^4 \cdot w = \frac{q(x)}{EI}, \quad z = \sqrt[4]{\frac{c \cdot b}{EI}}$$

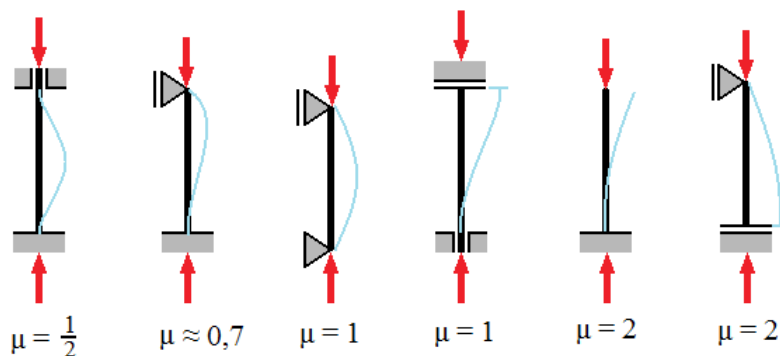
c – odpór gruntu [MPa/m]

b – szerokość belki [m]

$$\text{CORJ: } w_{og} = e^{\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[ C_1 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right] + e^{-\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[ C_3 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_4 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

## WYBOCZENIE

Współczynnik długości wyboyczeniowej i postać wyboyczenia dla różnych schematów utwierdzenia:



Długość wyboyczeniowa pręta:

$$L_w = \mu \cdot L$$

Smukłość pręta:

$$\lambda = \frac{L_w}{i_{min}}$$

Smukłość graniczna:

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$$

■  $\lambda > \lambda_{gr}$   $\Rightarrow$  **wyboczenie w zakresie sprężystym**

- Napężenie krytyczne:  $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
- Siła krytyczna (wyboczeniowa) Eulera:  $N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_w^2}$

■  $\lambda < \lambda_{gr}$   $\Rightarrow$  **wyboczenie w zakresie niesprężystym**  $N_{cr} = \sigma_{cr}(\lambda) \cdot A$

- wzór Tetmajera-Jasińskiego:  $\sigma_{cr}(\lambda) = a - b \cdot \lambda$   $a = R_e$   $b = \frac{(R_e - R_H)}{\lambda_{gr}}$
- wzór Johnsona-Ostenfelda:  $\sigma_{cr}(\lambda) = a - b \cdot \lambda^2$

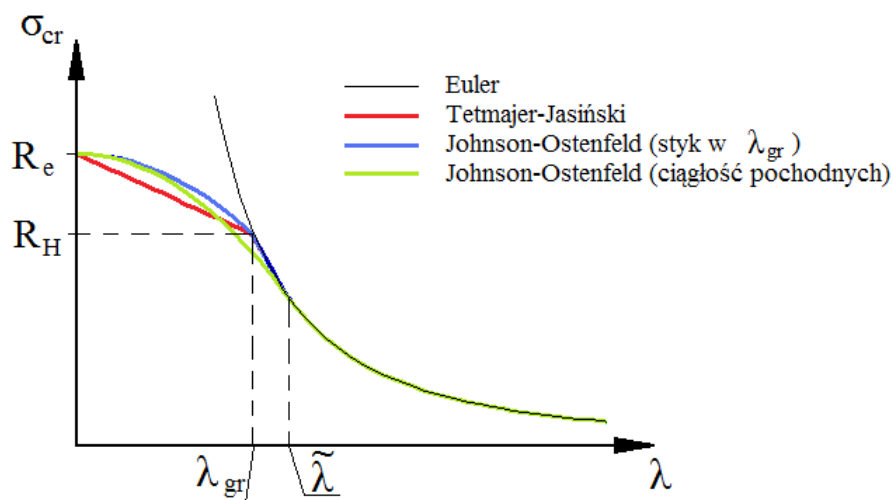
Wartości współczynników  $a$  i  $b$  wyznaczać można w różny sposób, w zależności od wymaganej charakterystyki krzywej:

- Styk krzywych w  $\lambda_{gr}$ , brak ciągłości pochodnej na styku krzywych

$$a = R_e \quad b = \frac{(R_e - R_H)}{\lambda_{gr}}$$

- Ciągłość pochodnej na styku krzywych, styk krzywych w  $\tilde{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{2E}{R_e}}$

$$a = R_e \quad b = \frac{R_e^2}{4\pi^2 E}$$



### ZADANIE 13.1



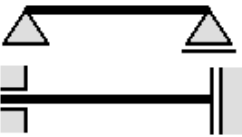

Wyznaczyć smukłość i siłę wyboczeniową dla pręta IPN300 długości 5m wykonanego ze stali St3S (przyjąć:  $E = 200$  GPa,  $R_H = R_e = 215$  MPa) dla każdego ze stosowanych schematów podparcia. Wyznaczyć smukłość graniczną dla podanego materiału. Porównać obliczoną siłę wyboczeniową z nośnością sprężystą profilu

Profil: IPN 300  
 • pole przekroju:  $A = 69,1 \text{ cm}^2$   
 • min. moment i promień bezwładności:  $I_{min} = 451 \text{ cm}^4$   $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 2,555 \text{ cm}$

Długość:  $L = 5 \text{ m}$

Materiał: Stal St3S  
 • moduł Younga:  $E = 200$  GPa  
 • granica sprężystości:  $R_e = 215$  MPa  
 • smukłość graniczna:  $\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 95,818$  [-]

Nośność sprężysta profilu:  $N_R = A R_e = 1485,65 \text{ kN}$

Schemat	Wsp. dł. wyboczeniowej [-]	Długość wyboczeniowa $L_e = \mu L$ [m]	Smukłość $\lambda = \frac{L_e}{i_{min}}$ [-]	Siła krytyczna $N_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_w^2}$ [kN]	$\frac{N_{cr}}{N_R}$ [-]
	$\mu = \frac{1}{2}$	2,5	97,847	1424,381	95,88%
	$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$	3,536	138,395	712,003	47,93%
	$\mu = 1$	5	195,695	356,095	23,97%
	$\mu = 2$	10	391,389	89,024	5,99%

### ZADANIE 13.2

Dany jest stalowy słupek o przekroju kwadratowym, długości 1m, utwierdzony z jednej strony i obciążony siłą osiową 1500 kN z drugiej. Dobrać minimalny wymiar przekroju poprzecznego  $a$ . Przyjąć  $R_H = 190$  MPa  $R_e = 215$  MPa  $E = 210$  GPa.

Wstępnego oszacowania wymiaru przekroju poprzecznego dokonujemy sprawdzając nośność sprężystą przekroju:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{N}{a^2} < R_e \Rightarrow a > \sqrt{\frac{N}{R_e}} = 8,35 \text{ cm}$$

Po przyjęciu  $a = 8,5$  cm charakterystyki geometryczne pręta są następujące:

Pole powierzchni przekroju:	$A = a^2 = 72,23 \text{ cm}^2$
Moment bezwładności przekroju:	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} = 435,01 \text{ cm}^4$
Minimalny promień bezwładności przekroju:	$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = 2,45 \text{ cm}$
Współczynnik wyboczeniowy dla wspornika:	$\mu = 2$
Długość wyboczeniowa:	$L_w = \mu \cdot L = 2 \text{ m}$
Smukłość pręta:	$\lambda = \frac{L_w}{i_{min}} = 81,63 \quad [-]$

Smukłość graniczna dla materiału pręta:

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 104,44 \quad [-]$$

Smukłość pręta jest mniejsza od smukłości granicznej, zatem wyboczenie nastąpi po przekroczeniu granicy proporcjonalności, zatem w zakresie niesprężystym. Jeśli stateczność będzie wymagać większego wymiaru przekroju, wtedy smukłość jeszcze się obniży i dalej będziemy w zakresie niesprężystym. Gdyby wymagany wymiar był mniejszy od założonego, to warunek nośności sprężystej zapewnia również stateczność pręta.

Siłę krytyczną w zakresie niesprężystym opisać można jednym z wielu wzorów empirycznych. Przyjmujemy schemat Tetmajera-Jasińskiego – naprężenia krytyczne są wtedy równe:

$$\sigma_{cr} = R_e - \frac{(R_e - R_H)}{\lambda_{gr}} \cdot \lambda \quad \text{a stąd siła krytyczna: } N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A$$

Smukłość i pole powierzchni zależą od nieznanego wymiaru przekroju  $a$ . Dobieramy go w ten sposób, aby siła obciążająca była mniejsza od siły krytycznej ( $N_{cr} > N$ ):

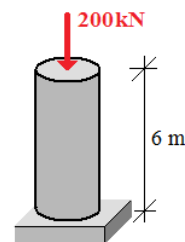
$$N_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \left[ R_e - \frac{(R_e - R_H)}{\lambda_{gr}} \cdot \frac{2\sqrt{3}L_w}{a} \right] a^2 = 215 \cdot 10^6 a^2 - 1,658 \cdot 10^6 a > 1500 \cdot 10^3$$

$$215 a^2 - 1,658 a - 1,5 > 0 \Rightarrow a > 0,0875 \text{ m}$$

Minimalny wymagany wymiar przekroju poprzecznego wynosi:  $a_{min} = 8,75$  cm.

### ZADANIE 13.3

Dany jest słup betonowy o przekroju kołowym, wysokości 6 m, ściskany siłą  $N = 200$  kN. Dobrać średnicę słupa. Moduł Younga betonu  $E = 30$  GPa, wytrzymałość betonu na ściskanie  $R_c = 30$  MPa. Założyć, że  $R_H = 0,9 R_c$ .



#### Dobór średnicy z uwagi na wytrzymałość przekroju:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4N}{\pi D^2} < R_c \quad \Rightarrow \quad D > \sqrt{\frac{4N}{\pi R_c}} \approx 9,21 \text{ cm}$$

Charakterystyki geometryczne przekroju dla założonej średnicy:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = 353,19 \text{ cm}^4 \quad A = \frac{\pi D^2}{4} = 66,62 \text{ cm}^2 \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{D}{4} = 2,30 \text{ cm}$$

#### Dobór średnicy z uwagi na stateczność:

Współczynnik długości wyboczeniowej i długość wyboczeniowa dla wspornika:

$$L = 6 \text{ m}$$

$$\mu = 2$$

$$L_w = \mu L = 12 \text{ m}$$

Smukłość graniczna betonu:

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 104,72 \text{ [-]}$$

Smukłość elementu dla założonej średnicy:

$$\lambda = \frac{L_w}{i} = \frac{4\mu L}{D} = 521,173 \text{ [-]}$$

$\lambda > \lambda_{gr}$ , co sugeruje, że wyboczenie nastąpi w zakresie sprężystym. Siła obciążająca musi być mniejsza od siły krytycznej. Siłę krytyczną wyznaczamy przy założeniu, że wyboczenie wystąpi w zakresie sprężystym (tj. wg wzoru Eulera):

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{L_w^2} = \frac{\pi^3 E D^4}{64 \mu^2 L^2} > N \quad \Rightarrow \quad D > \sqrt[4]{\frac{64 N \mu^2 L^2}{\pi^3 E}} \approx 21 \text{ cm}$$

Dla tak dobranej średnicy wyznaczamy rzeczywistą smukłość:  $\lambda = \frac{4\mu L}{D} = 228,571 \text{ [-]}$

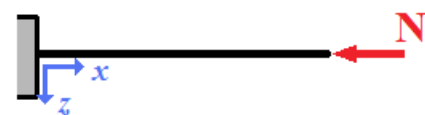
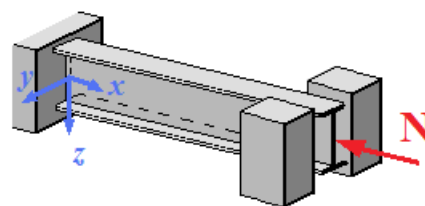
Rzeczywista smukłość jest w dalszym ciągu większa od smukłości granicznej, zatem założenie o wyboczeniu w zakresie sprężystym (i zastosowanie wzoru Eulera) było poprawne. Minimalna wymagana średnica słupa wynosi  $D_{min} = 21$  cm.

### ZADANIE 13.4

Dana jest belka dwuteowa o profilu IPE140 o długości 4 m. Schemat statyczny jak na rysunku. Obliczyć siłę krytyczną dla tej belki. Przyjąć stałe materiałowe jak dla stali:  $R_H = 185 \text{ MPa}$   
 $R_e = 225 \text{ MPa}$      $E = 205 \text{ GPa}$ .

$$L = 4 \text{ m} \qquad I_y = 541 \text{ cm}^4 \qquad i_y = 5,74 \text{ cm}$$

$$A = 23,9 \text{ cm}^2 \qquad I_z = 44,9 \text{ cm}^4 \qquad i_z = 1,65 \text{ cm}$$



Płaszczyzna wyboczenia	Sztwność	wsp. długości wboczeniowej, długość wyboczeniowa
(xz)	$I_y$	$\mu_y = 2 \Rightarrow L_{wy} = \mu_y L = 8 \text{ m}$
(xy)	$I_z$	$\mu_z = \frac{1}{2} \Rightarrow L_{wz} = \mu_z L = 2 \text{ m}$

Smukłość graniczna:  $\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 104,578$

Dla każdego ze schematów wyboczenia możemy wyznaczyć smukłość pręta

$$\lambda_y = \frac{L_{wy}}{i_y} = 139,373 > \lambda_{gr}, \qquad \lambda_z = \frac{L_{wz}}{i_z} = 121,212 > \lambda_{gr}$$

W obydwu przypadkach wyboczenie nastąpi w zakresie sprężystym. Siły krytyczne określamy na podstawie wzoru Eulera:

$$N_{cr}^{(y)} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_{wy}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 541 \cdot 10^{-8}}{8^2} = 171,029 \text{ kN}$$

$$N_{cr}^{(z)} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_{wz}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 44,9 \cdot 10^{-8}}{2^2} = 227,112 \text{ kN}$$

### ZADANIE 13.5

Dana jest szyna kolejowa S49 długości 12 m wystawiona na działanie wysokiej temperatury. Szczelina dylatacyjna między sąsiednimi szynami ma szerokość 5 mm. Obliczyć jak duża musiałaby być zmiana temperatury aby spowodować wyboczenie szyny?

Ścisłe rozwiązanie zadanie jest stosunkowo trudne. Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że mocowania szyny do podkładów kolejowych nie powodują usztywnienia szyny oraz, że przemieszczenie na stykach jest zablokowane – układ opisuje zatem schemat statyczny belki swobodnie podpartej na końcach.

#### Dane:

Szyna:

- Długość:  $L = 12 \text{ m}$
- Minimalny moment bezwładności szyny S49:  $I = 320 \text{ cm}^4$
- Pole przekroju szyny S49:  $A = 62,9 \text{ cm}^2$

Materiał:

- Moduł Younga:  $E = 210 \text{ GPa}$
- współczynnik rozszerzalności cieplnej:  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{C}^\circ}$

Szczelina dylatacyjna:  $d = 5 \text{ mm}$

Współczynnik długości wyboczeniowej:  $\mu = 1$

Siła krytyczna dla szyny:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 320 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 12)^2} = 46,058 \text{ kN}$$

Rozpatrujemy dwa etapy deformacji szyny – najpierw zwiększamy temperaturę o  $\Delta T_1$  aż do momentu zniwelowania szczeliny dylatacyjnej i zetknięcia się sąsiednich szyn, a następnie zwiększamy temperaturę o  $\Delta T_2$ . Ten dodatkowy przyrost temperatury powoduje powstanie w szynach siły osiowej będącej reakcją na brak możliwości dalszej deformacji po zniknięciu dylatacji.

Zmiana temperatury powodująca zetknięcie się sąsiednich szyn – zakładamy, że każda z sąsiadujących szyn ulega podobnemu wydłużeniu. Każda z nich musi zatem wydłużyć się z obydwu stron o długość równą połowie szerokości szczeliny dylatacyjnej.

$$\Delta L_1 = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} d \right) = d \quad \Rightarrow \quad \Delta T_1 = \frac{\Delta L_1}{\alpha L} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 12} \approx 34,722 \text{ C}^\circ$$

Reakcja ściskająca na styku szyn kompensująca dodatkowe wydłużenie  $\Delta L_2 = \alpha L \Delta T_2$ , a mogąca spowodować wyboczenie:

$$N = \frac{AE \alpha L \Delta T_2}{L} = N_{cr} \quad \Rightarrow \quad \Delta T_2 = \frac{N_{cr}}{EA \alpha} = \frac{46,058 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 62,9 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}} = 2,906 \text{ C}^\circ$$

Całkowity przyrost temperatury powodujący wyboczenie szyny przy założonych warunkach wynosi  $\Delta T_1 + \Delta T_2 = 37,628 \text{ C}^\circ$ .

### ZADANIE 13.6

Obliczyć nośność słupa wspornikowego o profilu HEB 320 i wysokości 3 m wykonanego ze stali konstrukcyjnej o module Younga  $E=210$  GPa, granicy proporcjonalności równej  $R_H = 190$  MPa i granicy plastyczności  $R_e = 215$  MPa.

Pole przekroju:  $A = 161 \text{ cm}^2$   
Moment bezwładności:  $I_{min} = 9240 \text{ cm}^4$   
Promień bezwładności:  $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 7,576 \text{ cm}$   
Długość:  $L = 3 \text{ m}$   
Współczynnik dł. wyboczeniowej:  $\mu = 2$   
Długość wyboczeniowa:  $L_w = \mu L = 6 \text{ m}$   
Smukłość:  $\lambda = \frac{L_w}{i} = 79,197 \text{ [-]}$

#### Nośność z uwagi na uplastycznienie całego przekroju:

Nośność sprężysta:  $N_R = R_e A = 3461,5 \text{ kN}$

#### Nośność z uwagi na utratę stateczności:

Smukłość graniczna stali:  $\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = 104,444 \text{ [-]}$

$\lambda_{gr} > \lambda$  a zatem wyboczenie nastąpi w zakresie niesprężystym.

Naprężenie odpowiadające sile krytycznej w zakresie niesprężystym szacujemy na podstawie:

- hipotezy Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma^{TJ}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_{gr}} (R_H - R_e) + R_e = 196,043 \text{ MPa}$$

Siła krytyczna:

$$N_{cr}^{TJ} = \sigma_{cr}^{TJ} \cdot A = 3156,292 \text{ kN}$$

- hipotezy Johnsona-Ostenfelda:

$$\sigma^{JO}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda_{gr}^2} (R_H - R_e) + R_e = 200,626 \text{ MPa}$$

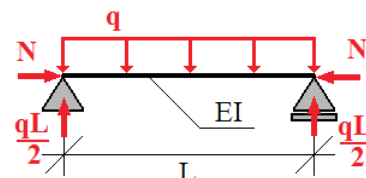
Siła krytyczna:

$$N_{cr}^{JO} = \sigma_{cr}^{JO} \cdot A = 3230,079 \text{ kN}$$



### ZADANIE 13.7

Dana jest belka swobodnie podparta, obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym, oraz skupionymi siłami osiowymi na podporach jak na rysunku. Wyznaczyć rozkład sił przekrojowych uwzględniając efekty II rzędu.



Wyznaczamy rozkład momentów zginających od obciążenia poprzecznego:

$$M_0(x) = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q}{2} x^2$$

Po uwzględnieniu wpływu sił osiowych funkcja rozkładu momentów przyjmuje postać:

$$M(x) = M_0(x) + N \cdot w(x) = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q}{2} x^2 + N \cdot w(x)$$

Równanie różniczkowe rządzące zagadnieniem przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = -\frac{M_0}{EI} \quad \text{gdzie } k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

z warunkami brzegowymi  $w(0)=0$ ,  $w(L)=0$ .

Jest to liniowe, niejednorodne równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego ze stałymi współczynnikami. Rozwiązanie tego równania można zapisać jako sumę ogólnego rozwiązania równania jednorodnego (z prawą stroną równą 0)  $w_{og}$  oraz dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego  $w_{sz}$  tj. :  $w = w_{og} + w_{sz}$

#### Całka ogólna równania jednorodnego (CORJ):

$$w_{og}(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

#### Całka szczególna równania niejednorodnego (CSRN):

Funkcję tę można wyznaczyć np. metodą przewidywania – skoro prawa strona równania niejednorodnego jest wielomianem stopnia 2, stąd możemy założyć, że rozwiązanie również jest wielomianem odpowiedniego stopnia. Ponieważ najniższym rzędem pochodnej występującej w równaniu jest 0, stąd rozwiązanie szczególne na pewno nie będzie wielomianem wyższego stopnia niż 2:

$$w_{sz}(x) = ax^2 + bx + c$$

Współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$  całki szczególnej znajdujemy podstawiając przewidywaną funkcję do równania i porównując wielomiany po obydwu stronach.

$$\frac{d^2 w_{sz}}{dx^2} + k^2 w_{sz} = 2a + k^2 ax^2 + k^2 bx + k^2 c \equiv \frac{q}{2EI} x^2 - \frac{qL}{2EI} x$$

Dwa wielomiany są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej niezależnej są sobie równe:

$$\begin{cases} k^2 a = \frac{q}{2EI} \\ k^2 b = -\frac{qL}{2EI} \\ 2a + k^2 c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{q}{2EI k^2} = \frac{q}{2N} \\ b = -\frac{qL}{2EI k^2} = -\frac{qL}{2N} \\ 2a + k^2 c = -\frac{q}{EI k^4} = -\frac{qEI}{N^2} \end{cases}$$

A zatem całka ogólna równania niejednorodnego (rozwiązanie zadania) jest równa:

$$w(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + \frac{q}{2N} x^2 - \frac{qL}{2N} x - \frac{qEI}{N^2}$$

Stałe całkowania rozwiązania ogólnego wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\begin{cases} w(0) = C_2 - \frac{qEI}{N^2} = 0 \\ w(L) = C_1 \sin(kL) + C_2 \cos(kL) + \frac{qL^2}{2N} - \frac{qL^2}{2N} - \frac{qEI}{N^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{qEI}{N^2} \frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \\ C_2 = \frac{qEI}{N^2} \end{cases}$$

Funkcja rozkładu ugięć belki jest równa:

$$w(x) = \frac{q}{N} \left[ \frac{EI[1 - \cos(kL)]}{N \sin(kL)} \sin(kx) + \frac{EI}{N} \cos(kx) + \frac{1}{2} x^2 - \frac{L}{2} x - \frac{EI}{N} \right]$$

lub inaczej:

$$w(x) = \frac{q}{N} \left[ \frac{[1 - \cos(kL)]}{k^2 \sin(kL)} \sin(kx) + \frac{1}{k^2} \cos(kx) + \frac{1}{2} x^2 - \frac{L}{2} x - \frac{EI}{N} \right]$$

Funkcja rozkładu kątów ugięcia:

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{q}{N} \left[ \frac{[1 - \cos(kL)]}{k \sin(kL)} \cos(kx) - \frac{1}{k} \sin(kx) + x - \frac{L}{2} \right]$$

Siły przekrojowe znajdujemy poprzez odpowiednie różniczkowanie funkcji rozkładu ugięć:

$$M(x) = -EI \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q}{k^2} \left[ \frac{[1 - \cos(kL)]}{\sin(kL)} \sin(kx) + \cos(kx) - 1 \right]$$

$$Q(x) = -EI \cdot \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{q}{k} \left[ \frac{[1 - \cos(kL)]}{\sin(kL)} \cos(kx) - \sin(kx) \right]$$

### ZADANIE 13.8

Dana jest belka swobodnie podparta, obciążona skupioną siłą poprzeczną w połowie przęsła, obciążona ponadto siłami osiowymi na podporach. Sprawdzić, jak różnią się rozwiązania tego zadania (rozkład sił przekrojowych i przemieszczeń):

- przy pominięciu efektów II rzędu (efekt  $P-\delta$ ).
- przy uwzględnieniu efektów II rzędu, gdy siła osiowa jest siłą ściskającą
- przy uwzględnieniu efektów II rzędu, gdy siła osiowa jest siłą rozciągającą.

#### Rozwiązanie klasyczne (z pominięciem efektów II rzędu):

$$\begin{array}{l} \text{Przedział AB: } x \in (0 ; L/2) \\ \left\{ \begin{array}{l} N_0(x) = -N \\ Q_0(x) = \frac{P}{2} \\ M_0(x) = \frac{P}{2}x \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Przedział BC: } x \in (L/2 ; L) \\ \left\{ \begin{array}{l} N_0(x) = -N \\ Q_0(x) = -\frac{P}{2} \\ M_0(x) = \frac{P}{2}(L-x) \end{array} \right. \end{array}$$

Wyznaczenie rozkładu ugięcia metodą Clebscha:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{P}{2}(x-0)^1 \Big|^{AB} - P \left(x - \frac{L}{2}\right)^1 \Big|^{BC} \\ \varphi(x) &= -\frac{1}{EI} \left[ C_1 + \frac{P}{4}(x-0)^2 \Big|^{AB} - \frac{P}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \Big|^{BC} \right] \\ w(x) &= -\frac{1}{EI} \left[ C_2 + C_1 x + \frac{P}{12}(x-0)^3 \Big|^{AB} - \frac{P}{6} \left(x - \frac{L}{2}\right)^3 \Big|^{BC} \right] \end{aligned}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = -\frac{3}{48} PL^2 \end{cases}$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} w_{AB}(x) &= \frac{P}{EI} \left[ \frac{3}{48} L^2 x - \frac{1}{12} x^3 \right] & w_{BC}(x) &= \frac{P}{EI} \left[ \frac{3}{48} L^2 x - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{L}{2}\right)^3 \right] \\ \varphi_{AB}(x) &= \frac{P}{EI} \left[ \frac{3}{48} L^2 - \frac{1}{4} x^2 \right] & \varphi_{BC}(x) &= \frac{P}{EI} \left[ \frac{3}{48} L^2 - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

#### Rozwiązanie z uwzględnieniem efektów II rzędu – ściskanie

Ponieważ na długości belki przyłożone jest obciążenie skupione, stąd ugięcie opisane jest dwoma funkcjami – w każdym przedziale charakterystycznym osobną. Funkcje te muszą spełniać w swoim przedziale odpowiednie równanie różniczkowe i warunki brzegowe oraz warunki zszycia (równości ugięć i kątów na granicy przedziałów charakterystycznych).

$$\begin{aligned} w_{AB}^{(2)} + k^2 w_{AB} &= -\frac{1}{EI} M_{0,AB} & \Rightarrow & & w_{AB}^{(2)} + k^2 w_{AB} &= -\frac{Px}{2EI} & k &= \sqrt{\frac{N}{EI}} \\ w_{BC}^{(2)} + k^2 w_{BC} &= -\frac{1}{EI} M_{0,BC} & \Rightarrow & & w_{AB}^{(2)} + k^2 w_{AB} &= -\frac{P}{2EI}(L-x) & k &= \sqrt{\frac{N}{EI}} \end{aligned}$$

Całki ogólne równań jednorodnych:

$$w_{og, AB} = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) \quad w_{og, BC} = D_1 \sin(kx) + D_2 \cos(kx)$$

Całki szczególne równań niejednorodnych – wyznaczane metodą przewidywania:

$$w_{sz, AB} = ax + b \quad \Rightarrow \quad w_{sz, AB}^{(2)} + k^2 w_{sz, AB} = k^2 ax + k^2 b \equiv -\frac{Px}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{P}{2k^2 EI} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$w_{sz, BC} = cx + d \quad \Rightarrow \quad w_{sz, BC}^{(2)} + k^2 w_{sz, BC} = k^2 cx + k^2 d \equiv \frac{Px}{2EI} - \frac{PL}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = \frac{P}{2k^2 EI} \\ d = -\frac{PL}{2k^2 EI} \end{cases}$$

Stałe całkowania wyznaczane na podstawie warunków brzegowych i warunków zszycia:

$$\begin{cases} w_{AB}(0) = 0 \\ w_{BC}(L) = 0 \\ w_{AB}(L/2) = w_{BC}(L/2) \\ \varphi_{AB}(L/2) = \varphi_{BC}(L/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{P}{2k^3 \cos(kL/2)EI} \\ C_2 = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} D_1 = -\frac{P \cos(kL)}{2k^3 EI \cos(kL/2)} \\ D_2 = \frac{P \sin(kL)}{2k^3 EI \cos(kL/2)} \end{cases}$$

Przedział AB:  $x \in (0 ; L/2)$

$$\begin{cases} w = \frac{P}{2k^2 EI} \left[ \frac{1}{k} \frac{\sin(kx)}{\cos(kL/2)} - x \right] \\ \varphi = \frac{dw}{dx} = \frac{P}{2N} \left[ \frac{\cos(kx)}{\cos(kL/2)} - 1 \right] \\ M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 + N w = \frac{P}{2k} \frac{\sin(kx)}{\cos(kL/2)} \\ Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 + N \varphi = \frac{P}{2} \frac{\cos(kx)}{\cos(kL/2)} \\ N = N_0 - Q_0 \varphi = -N + \frac{P^2}{4N} \left[ \frac{\cos(kx)}{\cos(kL/2)} - 1 \right] \end{cases}$$

Przedział BC:  $x \in (L/2 ; L)$

$$\begin{cases} w = \frac{P}{2k^2 EI} \left[ \frac{1}{k} \frac{\sin(k(L-x))}{\cos(kL/2)} - (L-x) \right] \\ \varphi = \frac{dw}{dx} = -\frac{P}{2N} \left[ \frac{\cos(k(L-x))}{\cos(kL/2)} - 1 \right] \\ M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 + N w = \frac{P}{2k} \frac{\sin(k(L-x))}{\cos(kL/2)} \\ Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 + N \varphi = -\frac{P}{2} \frac{\cos(k(L-x))}{\cos(kL/2)} \\ N = N_0 - Q_0 \varphi = -N - \frac{P^2}{4N} \left[ \frac{\cos(k(L-x))}{\cos(kL/2)} - 1 \right] \end{cases}$$

### Rozwiązanie z uwzględnieniem efektów II rzędu - rozciąganie

Równania różniczkowe:

$$w_{AB}^{(2)} - k^2 w_{AB} = -\frac{1}{EI} M_{0,AB} \quad \Rightarrow \quad w_{AB}^{(2)} + k^2 w_{AB} = -\frac{Px}{2EI} \quad k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

$$w_{BC}^{(2)} - k^2 w_{BC} = -\frac{1}{EI} M_{0,BC} \quad \Rightarrow \quad w_{AB}^{(2)} + k^2 w_{AB} = -\frac{P}{2EI} (L-x) \quad k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Całki ogólne równań jednorodnych:

$$w_{og,AB} = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(kx) \quad w_{og,BC} = D_1 \sinh(kx) + D_2 \cosh(kx)$$

Całki szczególne równań niejednorodnych - wyznaczane metodą przewidywania:

$$w_{sz,AB} = ax + b \quad \Rightarrow \quad w_{sz,AB}^{(2)} - k^2 w_{sz,AB} = -k^2 ax - k^2 b \equiv -\frac{Px}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{P}{2k^2 EI} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$w_{sz,BC} = cx + d \quad \Rightarrow \quad w_{sz,BC}^{(2)} - k^2 w_{sz,BC} = -k^2 cx - k^2 d \equiv \frac{Px}{2EI} - \frac{PL}{2EI} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = -\frac{P}{2k^2 EI} \\ d = \frac{PL}{2k^2 EI} \end{cases}$$

Stałe całkowania wyznaczane na podstawie warunków brzegowych i warunków zszycia:

$$\begin{cases} w_{AB}(0) = 0 \\ w_{BC}(L) = 0 \\ w_{AB}(L/2) = w_{BC}(L/2) \\ \varphi_{AB}(L/2) = \varphi_{BC}(L/2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{P}{2k^3 EI \cosh(kL/2)} \\ C_2 = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} D_1 = \frac{P \cosh(kL)}{2k^3 EI \cosh(kL/2)} \\ D_2 = -\frac{P \sinh(kL)}{2k^3 EI \cosh(kL/2)} \end{cases}$$

Przedział AB:  $x \in (0 ; L/2)$

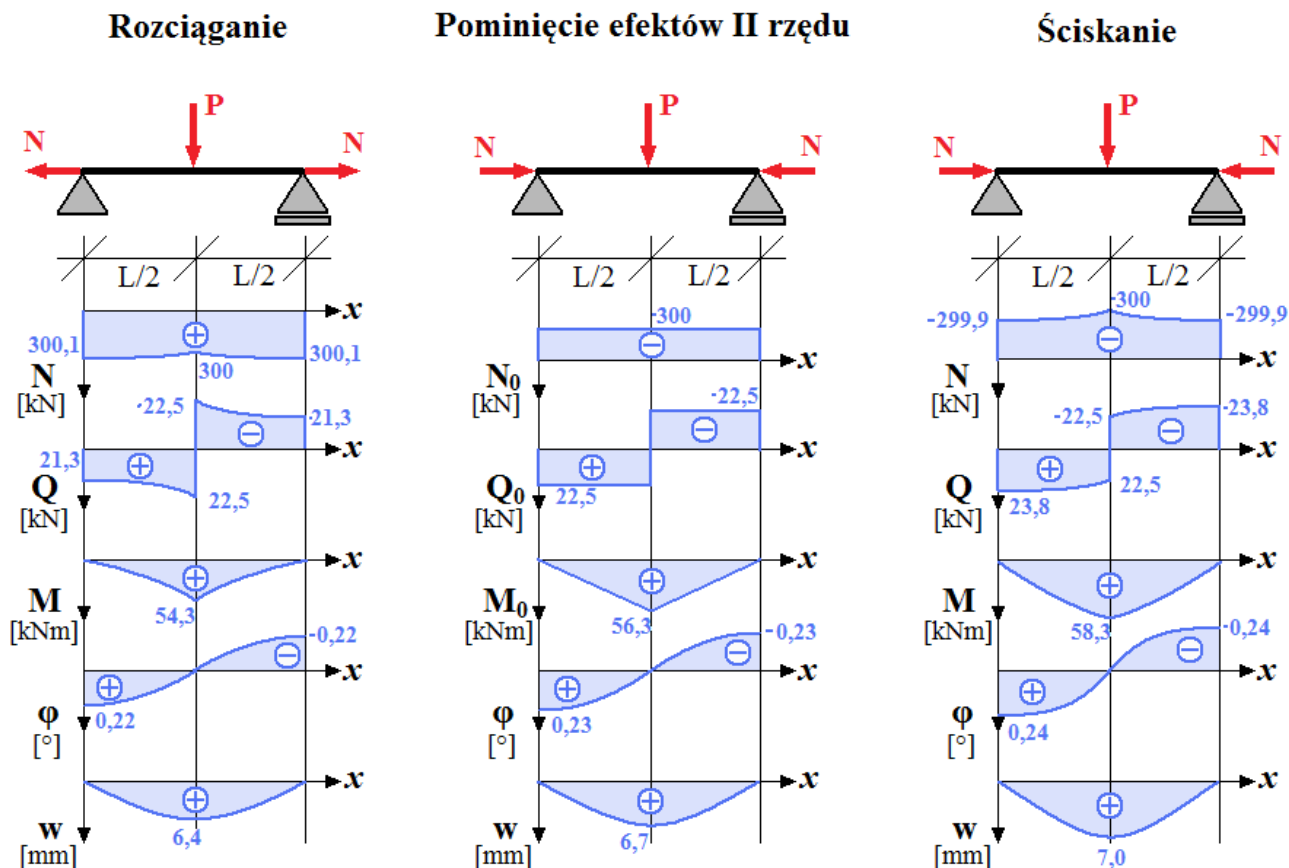
$$\begin{cases} w = -\frac{P}{2k^2 EI} \left[ \frac{1}{k} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(kL/2)} - x \right] \\ \varphi = \frac{dw}{dx} = -\frac{P}{2N} \left[ \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)} - 1 \right] \\ M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 + N w = \frac{P}{2k} \frac{\sinh(kx)}{\cosh(kL/2)} \\ Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 + N \varphi = \frac{P}{2} \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)} \\ N = N_0 - Q_0 \varphi = N - \frac{P^2}{4N} \left[ \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL/2)} - 1 \right] \end{cases}$$

Przedział BC:  $x \in (L/2 ; L)$

$$\begin{cases} w = -\frac{P}{2k^2 EI} \left[ \frac{1}{k} \frac{\sinh(k(L-x))}{\cosh(kL/2)} - (L-x) \right] \\ \varphi = \frac{dw}{dx} = \frac{P}{2N} \left[ \frac{\cosh(k(L-x))}{\cosh(kL/2)} - 1 \right] \\ M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 + N w = \frac{P}{2k} \frac{\sinh(k(L-x))}{\cosh(kL/2)} \\ Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 + N \varphi = -\frac{P}{2} \frac{\cosh(k(L-x))}{\cosh(kL/2)} \\ N = N_0 - Q_0 \varphi = N + \frac{P^2}{4N} \left[ \frac{\cosh(k(L-x))}{\cosh(kL/2)} - 1 \right] \end{cases}$$

Aby zobrazować różnice, najlepiej przeliczyć przykład liczbowy. Przyjmijmy:

Belka długości  $L = 5\text{ m}$ , profil IPE300 o  $I = 8360\text{ cm}^4$ , wykonany ze stali o  $E = 210\text{ GPa}$ .  
 Obciążenie stanowi siła poprzeczna  $P = 45\text{ kN}$  oraz siła osiowa  $N = 300\text{ kN}$ .



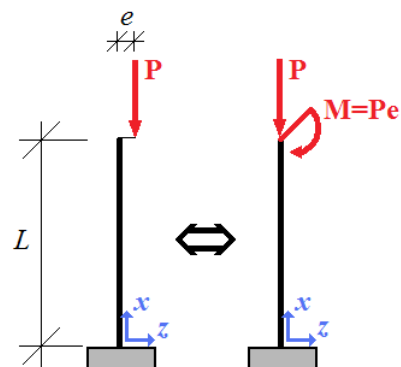
### ZADANIE 13.9

Dany jest słup o profilu HEB280 długości 4m, wykonany ze stali o  $E = 210$  GPa, obciążony siłą osiową  $P=1500$  kN. W wyniku błędu wykonawczego, siła przyłożona jest na mimośrodku  $e = 5$  mm na kierunku równoległym do mocniejszej osi zginania. Wyznaczyć rozkład sił poprzecznych, momentów zginających oraz ugięcia przy uwzględnieniu efektów II rzędu – wpływu deformacji na rozkład sił przekrojowych (efekt  $P-\delta$ ) oraz na oddziaływanie obciążenia zewnętrznego (efekt  $P-\Delta$ ). Porównać uzyskane wyniki z wynikami obliczeń pomijających efekty II rzędu.

Zastępujemy obciążenie zewnętrzne obciążeniem statycznie równoważnym i wyznaczamy rozkład momentów zginających w zwykły sposób:

$$M = P \cdot e = 7,5 \text{ kNm}$$

$$M_{y0}(x) = -M$$



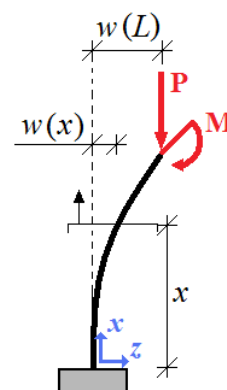
Zwykle równanie belki zginanej i ściskanej zakłada, że położenie siły osiowej jest stałe w całym procesie deformacji. Zakładając, że siła przyłożona jest stale w tym samym punkcie skrajnego przekroju wspornika, oraz, że nie zmienia kierunku działania, rozkład momentów zginających (po uwzględnieniu efektów II rzędu) przyjmuje postać:

$$M_y(x) = M_{y0} - P(w(L) - w(x)) = -M - Pw(L) + Pw(x)$$

Równanie ugięcia belki:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI} \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = \frac{M + Pw(L)}{EI} \quad \text{gdzie } k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

z warunkami brzegowymi:  $w(0)=0$ ,  $\varphi(0) = w'(0)=0$ .



**Całka ogólna równania jednorodnego:**

$$w_{og}(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

**Całka szczególna równania niejednorodnego:**

CSRN przewidywana w postaci:  $w_{sz}(x) = C_3$

Stałą  $C_3$  znajdujemy podstawiając  $w_{sz}$  do równania różniczkowego:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 C_3 \equiv \frac{M + Pw(L)}{EI} \Rightarrow C_3 = \frac{M + Pw(L)}{k^2 EI}$$

**Całka ogólna równania niejednorodnego:**

rozkład ugięć:  $w(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx) + \frac{M + Pw(L)}{k^2 EI}$

rozkład kątów ugięć:  $\varphi(x) = C_1 k \cos(kx) - C_2 k \sin(kx)$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\begin{cases} w(0) = C_2 + \frac{M+Pw(L)}{k^2 EI} = 0 \\ \varphi(0) = C_1 k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{M+Pw(L)}{k^2 EI} \end{cases}$$

Ponadto:

$$w(L) = C_1 \sin(kL) + C_2 \cos(kL) + \frac{M+Pw(L)}{k^2 EI}$$

$$w(L) = \frac{M}{k^2 EI} \frac{1-\cos(kL)}{\cos(kL)} = e \cdot \frac{1-\cos(kL)}{\cos(kL)}$$

$$C_2 = -\frac{e}{\cos(kL)}$$

Ostatecznie:

$$w(x) = e \cdot \frac{1-\cos(kx)}{\cos(kL)}$$

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = e k \cdot \frac{\sin(kx)}{\cos(kL)}$$

$$M_y(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -P e \cdot \frac{\cos(kx)}{\cos(kL)}$$

$$Q_z(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = P k e \cdot \frac{\sin(kx)}{\cos(kL)}$$

Wyniki dla analizy I rzędu:

$$Q_z(x) = 0$$

$$M_y(x) = -P e$$

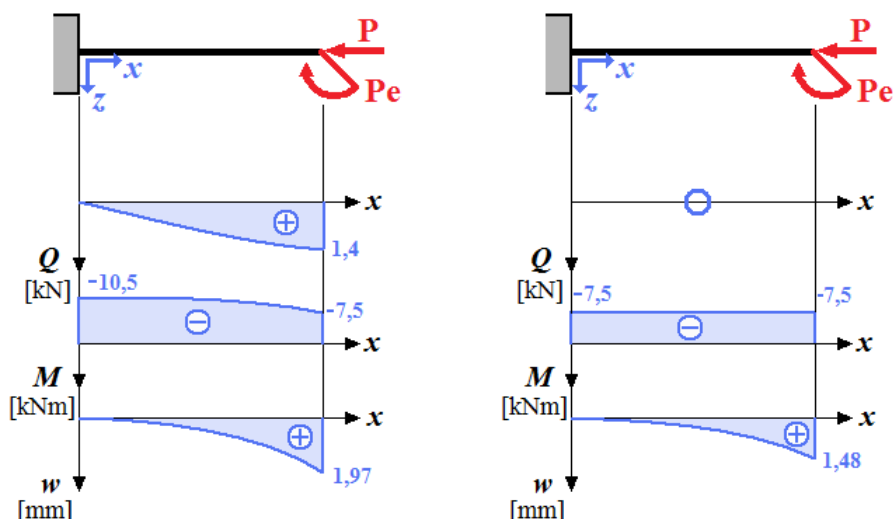
$$\varphi(x) = \int_0^x -\frac{M_y}{EI} dx + C_1 = \frac{P e}{EI} x + C_1 \quad \varphi(0)=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$w(x) = \int_0^x \varphi dx + C_2 = \frac{P e}{2 EI} x^2 + C_2 \quad w(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$

Porównanie uzyskanych wyników z tymi, uzyskiwanymi przy pominięciu efektów II rzędu przedstawione jest na wykresach:

### Analiza II rzędu

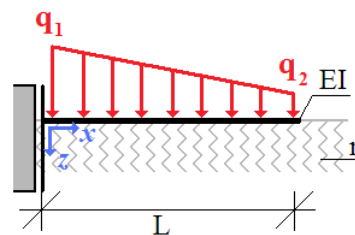
$e = 5 \text{ mm}$   
 $P = 1500 \text{ kN}$   
 $L = 4 \text{ m}$   
 $E = 210 \text{ GPa}$   
 $I_y = 19270 \text{ cm}^4$





### ZADANIE 13.10

Dana jest belka o sztywności  $EI$  spoczywająca na podłożu sprężystym Winklera o sztywności  $r$ . Belka obciążona jest obciążeniem ciągłym trapezowym, zaś jeden jej koniec został utwierdzony z możliwością przesuwu pionowego (zablokowany obrót). Wyznaczyć rozkład ugięcia belki oraz występujących w niej sił przekrojowych.



Równanie belki na podłożu sprężystym Winklera:  $EI \cdot w^{(4)}(x) + r \cdot w(x) = q(x)$  ,

gdzie funkcja gęstości obciążenia jest równa:  $q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} x$

Podstawiając  $z = \sqrt[4]{\frac{r}{EI}}$  , równanie można przepisać w postaci:  $w^{(4)} + z^4 w = \frac{1}{EI} q(x)$

Warunki brzegowe – belka spoczywa na podłożu sprężystym, przemieszczenia i kąty obrotów wszystkich jej punktów mogą być zatem w ogólności dowolne. Belka nie jest ponadto obciążona obciążeniem skupionym – linia ugięcia będzie więc opisana jednym wzorem. Warunki brzegowe:

Podpora z lewej:	Koniec swobodny z prawej:
$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ Q(0) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} M(L) = 0 \\ Q(L) = 0 \end{cases}$

Rozwiązanie zagadnienia będzie sumą całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego.

**Całka ogólna równania jednorodnego:**  $w^{(4)} + z^4 w = 0$

Równanie charakterystyczne powyższego równania:  $s^4 + z^4 = 0$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$s_1 = \frac{z}{\sqrt{2}}(1+i), \quad s_2 = \frac{z}{\sqrt{2}}(1-i), \quad s_3 = \frac{z}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad s_4 = \frac{z}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

$$\Re(s_{1/2}) = \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad |\Im(s_{1/2})| = \frac{z}{\sqrt{2}} \quad \Re(s_{3/4}) = -\frac{z}{\sqrt{2}}, \quad |\Im(s_{3/4})| = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

Pierwiastkom tym odpowiada całka ogólna równania jednorodnego następującej postaci:

$$w_{og}(x) = e^{\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[ C_1 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right] + e^{-\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[ C_3 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_4 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

**Całka szczególna równania niejednorodnego:**  $w^{(4)} + z^4 w = \frac{1}{EI} \left( q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} x \right)$

Ponieważ równanie jest liniowe, a funkcja po prawej jego stronie jest prostą funkcją wielomianową, stąd przewidujemy całkę szczególną w postaci wielomianu odpowiedniego stopnia:

$$w_{sz} = a x + b$$

Nieznane współczynniki tego wielomianu wyznaczamy na podstawie równania:

$$w_{sz}^{(4)} + z^4 w_{sz} = z^4 a x + z^4 b \equiv \frac{q_1}{EI} + \frac{q_2 - q_1}{L EI} x \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{q_2 - q_1}{z^4 L EI} \\ b = \frac{q_1}{z^4 EI} \end{cases}$$

Całka ogólna równania niejednorodnego:

$$w(x) = e^{\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[ C_1 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right] + e^{-\frac{zx}{\sqrt{2}}} \left[ C_3 \sin\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) + C_4 \cos\left(\frac{zx}{\sqrt{2}}\right) \right] + \frac{q_2 - q_1}{z^4 L EI} x + \frac{q_1}{z^4 EI}$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ Q(0) = 0 \\ M(L) = 0 \\ Q(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{(q_1 - q_2) \cdot [\sin(y) - \cos(y) - e^{-y} + 2]}{2 z^4 y EI [\sin(y) + \sinh(y)]} \\ C_2 = \frac{(q_1 - q_2) \cdot [\sin(y) + \cos(y) - e^{-y}]}{2 z^4 y EI [\sin(y) + \sinh(y)]} \\ C_3 = \frac{(q_1 - q_2) \cdot [\sin(y) + \cos(y) + e^y - 2]}{2 z^4 y EI [\sin(y) + \sinh(y)]} \\ C_4 = \frac{(q_1 - q_2) \cdot [-\sin(y) + \cos(y) - e^y]}{2 z^4 y EI [\sin(y) + \sinh(y)]} \end{cases}, \text{ gdzie: } y = \sqrt{2} z L$$

Funkcje rozkładu sił przekrojowych uzyskujemy na drodze różniczkowania funkcji ugięcia.

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad Q(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3}$$

Funkcje te mają bardzo złożoną postać. W praktyce obliczenia wykonuje się numerycznie już dla ustalonych wartości parametrów zadania. Przykładowo:

Belka stalowa o profilu IPN200

Moment bezwładności przekroju:  $I = 2140 \text{ cm}^4$

Moduł Younga stali:  $E = 210 \text{ GPa}$

Długość belki:  $L = 6 \text{ m}$

Szerokość belki:  $b_f = 9 \text{ cm}$

Odpór gruntu:  $c = 100 \text{ MPa/m}$

Odpór liniowy gruntu:  $r = c \cdot b_f = 9 \text{ (N/m)/m}$

Gęstość obciążenia:  $q_1 = 3 \text{ kN/m}$

$q_2 = 1 \text{ kN/m}$

