

## NAJWAŻNIEJSZE WZORY:

**Gęstość energii odkształcenia sprężystego:**  $\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$

Dla ciał izotropowych:  $\Phi = \Phi_v + \Phi_f$

**Gęstość energii odkształcenia objętościowego:**

$$\Phi_v = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\varepsilon = \frac{1}{18K} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 = \frac{K}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

**Gęstość energii odkształcenia postaciowego:**

$$\begin{aligned} \Phi_f &= \frac{1}{2} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\varepsilon = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \right] = \\ &= \frac{G}{3} \left[ (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + 6(\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \right] \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

**Całkowita energia potencjalna sprężystości:**  $U = \iiint_V \Phi dV = U_u + U_s + U_b + U_t \quad [\text{J}]$

Energia sprężysta (wzory przybliżone obowiązują w przypadku przedziałami stałego rozkładu sił przekrojowych i sztywności pręta):

- rozciąganie/ściskanie:  $U_u = \int_s \frac{N(x)^2}{2EA(x)} dx \approx \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2EA_i}$
- ścinanie:  $U_s = \kappa_y \int_s \frac{Q_y(x)^2}{2GA(x)} dx + \kappa_z \int_s \frac{Q_z(x)^2}{2GA(x)} dx \approx \kappa_y \sum_i \frac{Q_{yi}^2 L_i}{2GA_i} + \kappa_z \sum_i \frac{Q_{zi}^2 L_i}{2GA_i}$
- zginanie:  $U_b = \int_s \frac{M_y(x)^2}{2EI_y(x)} dx + \int_s \frac{M_z(x)^2}{2EI_z(x)} dx \approx \sum_i \frac{M_{yi}^2 L_i}{2EI_{yi}} + \sum_i \frac{M_{zi}^2 L_i}{2EI_{zi}}$
- skręcanie:  $U_t = \int_s \frac{M_x(x)^2}{2GI_x(x)} dx \approx \sum_i \frac{M_{xi}^2 L_i}{2GI_{xi}}$

**Energetyczny współczynnik ścinania:**  $\kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \iint_A \frac{S_y^2(z)}{b_y^2(z)} dA$

- przekrój kołowy:  $\kappa = \frac{10}{9}$

- przekrój prostokątny:  $\kappa = \frac{6}{5}$

## TWIERDZENIE MENABREI

„Rzeczywisty rozkład sił wewnętrznych i przemieszczeń w układzie liniowo sprężystym obciążonym siłami zewnętrznymi odpowiada najmniejszej całkowitej energii potencjalnej sprężystości zgromadzonej w układzie.”

W szczególności, jeśli energia całkowita  $U$  zależy od  $n$  wielkości hiperstatycznych (nadliczbowych reakcji podporowych)  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , wtedy:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

## TWIERDZENIE CASTIGLIANO

„Pochodna cząstkowa całkowitej energii potencjalnej sprężystości względem pewnej siły uogólnionej jest równa odpowiadającemu jej przemieszczeniu uogólnionemu.”

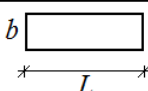
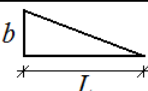
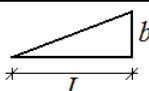
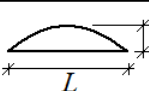
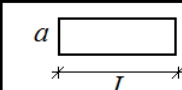
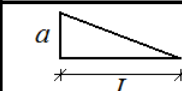
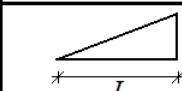
$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left[ \int \frac{N^2}{2EA} + \int \frac{M_y^2}{2EI} dx + \dots \right] = \int \frac{1}{EA} \cdot N \cdot \frac{\partial N}{\partial P_i} dx + \int \frac{1}{EI} \cdot M_y \cdot \frac{\partial M_y}{\partial P_i} dx + \dots$$

## WZÓR MAXWELLA-MOHRA

$$\delta = \int_s \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx + \kappa_y \int_s \frac{Q_y \cdot \bar{Q}_y}{GA} dx + \kappa_z \int_s \frac{Q_z \cdot \bar{Q}_z}{GA} dx + \int_s \frac{M_y \cdot \bar{M}_y}{EI_y} dx + \int_s \frac{M_z \cdot \bar{M}_z}{EI_z} dx +$$

$$+ \int_s \frac{M_x \cdot \bar{M}_x}{GI_x} dx + \int_s \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} \bar{M}_y dx + \int_s \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} \bar{M}_z dx + \int_s \alpha T_0 \bar{N} dx - \sum_k \bar{R}_k \cdot \Delta_k$$

## CAŁKOWANIE GRAFICZNE METODĄ WERESZCZAGINA

				
	$abL$	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{2}{3}afL$
	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{6}abL$	$\frac{1}{3}afL$
	$\frac{1}{2}abL$	$\frac{1}{6}abL$	$\frac{1}{3}abL$	$\frac{1}{3}afL$

UWAGA: Strzałkę parabol  $f$  wyznaczamy zawsze jako  $f = \frac{qL^2}{8}$  gdzie  $q$  jest gęstością obciążenia na danym przedziale, zaś  $L$  jest długością tego przedziału obciążonego obciążeniem ciągłym, liczoną prostopadle do kierunku działania tego obciążenia.

### ZADANIE 15.1

Wyznaczyć gęstość energii odkształcenia sprężystego w punkcie ciała izotropowego, w którym stan odkształcenia opisuje tensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,18 & -0,12 \\ -0,18 & -0,77 & 0 \\ -0,12 & 0 & 0,27 \end{bmatrix} \quad [\text{‰}]$$

Moduł Younga  $E = 210 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0,28$ . Wyznaczyć gęstość energii odkształcenia objętościowego oraz gęstość energii odkształcenia postaciowego.

Wyznaczamy pozostałe stałe sprężyste:

pierwszy parametr Lamego:  $\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 104,40 \text{ GPa}$

moduł Kirchhoffa:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 82,03 \text{ GPa}$

moduł Helmholtza:  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = 159,09 \text{ GPa}$

Wyznaczamy składowe tensora naprężenia:

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 149,15 \text{ MPa} \quad \sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = -100,23 \text{ MPa} \quad \sigma_{31} = 2G\varepsilon_{31} = -19,69 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 70,40 \text{ MPa} \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} = -29,53 \text{ MPa}$$

Gęstość energii odkształcenia:

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\sigma_{23}\varepsilon_{23} + 2\sigma_{31}\varepsilon_{31} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12}) = 111699,72 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Gęstość energii odkształcenia objętościowego:

$$\Phi_v = \frac{1}{18K} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 = 4971,59 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Gęstość energii odkształcenia postaciowego:

$$\Phi_f = \frac{1}{12G} [(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)] = 106728,13 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$\Phi_v + \Phi_f = 111699,72 = \Phi$$

Aby wyznaczyć gęstości energii odkształcenia objętościowego i postaciowego można również wyznaczyć aksjatory i dewiatory naprężenia i odkształcenia.

Naprężenie średnie:  $\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 39,77 \text{ MPa}$

Odkształcenie średnie:  $\varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 0,083 \text{ ‰}$

Tensor jednostkowy:  $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}_\sigma = \sigma_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 39,77 & 0 & 0 \\ 0 & 39,77 & 0 \\ 0 & 0 & 39,77 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 109,38 & -29,53 & -19,69 \\ & -140 & 0 \\ \text{sym} & & 30,63 \end{bmatrix} \quad [\text{MPa}]$$

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \varepsilon_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0,083 & 0 & 0 \\ 0 & 0,083 & 0 \\ 0 & 0 & 0,083 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0,667 & -0,18 & -0,12 \\ -0,18 & -0,853 & 0 \\ -0,12 & 0 & 0,187 \end{bmatrix} \quad [\text{‰}]$$

Łatwo sprawdzić prawdziwość związków:  $\mathbf{A}_\sigma = 3K \mathbf{A}_\varepsilon$   
 $\mathbf{D}_\sigma = 2G \mathbf{D}_\varepsilon$

Energia odkształcenia objętościowego:  $\Phi_v = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\sigma \cdot \mathbf{A}_\varepsilon = 4971,59 \quad [\text{J/m}^3]$

Energia odkształcenia postaciowego:  $\Phi_f = \frac{1}{2} \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}_\varepsilon = 106728,13 \quad [\text{J/m}^3]$

### ZADANIE 15.2

Obliczyć energetyczny współczynnik ścinania dla przekroju:

- prostokątnego
- kołowego

Definicja współczynnika ścinania  $\kappa \stackrel{\text{Df.}}{=} \frac{A}{I_y^2} \iint_A \frac{S_y^2(z)}{b_y^2(z)} dA$

a) Przekrój prostokątny

$$\begin{aligned}
 A &= bh & b_y(z) &= b \\
 I_y &= \frac{bh^3}{12} & S_y(z) &= \frac{b^2}{4} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2 \\
 \kappa &= \frac{bh}{\left( \frac{bh^3}{12} \right)^2} \int_{y=-b/2}^{b/2} \int_{z=-h/2}^{h/2} \frac{\frac{b^2}{4} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2}{b^2} dz dy = \frac{36}{bh^5} \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2 dz = \\
 &= \frac{36}{h^4} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} z^2 + z^4 \right) dz = \frac{36}{h^5} \left[ \frac{h^4}{16} z - \frac{h^2}{6} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{6}{5} = 1,2
 \end{aligned}$$

b) Przekrój kołowy

$$\begin{aligned}
 A &= \pi R^2 & b_y(z) &= 2\sqrt{R^2 - z^2} \\
 I_y &= \frac{\pi R^4}{4} & S_y(z) &= \frac{2}{3} (R^2 - z^2)^{3/2} \\
 \kappa &= \frac{\pi R^2}{\left( \frac{\pi R^4}{4} \right)^2} \iint_A \frac{\frac{4}{9} (R^2 - z^2)^3}{4(R^2 - z^2)} dA = \frac{16}{9\pi R^6} \iint_A (R^2 - z^2)^2 dy dz = \\
 &= \frac{16}{9\pi R^6} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} r (R^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^2 dr d\varphi = \frac{16}{9\pi R^6} \int_{r=0}^R \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} (R^4 r - 2R^2 r^3 \sin^2 \varphi + r^5 \sin^4 \varphi)^2 dr d\varphi = \\
 &= \frac{16}{9\pi R^6} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left[ \frac{R^4}{2} r^2 - \frac{R^2}{2} r^4 \sin^2 \varphi + \frac{1}{6} r^6 \sin^4 \varphi \right]_{r=0}^R d\varphi = \frac{8}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 - \sin^2 \varphi + \frac{1}{3} \sin^4 \varphi \right) d\varphi = \dots
 \end{aligned}$$

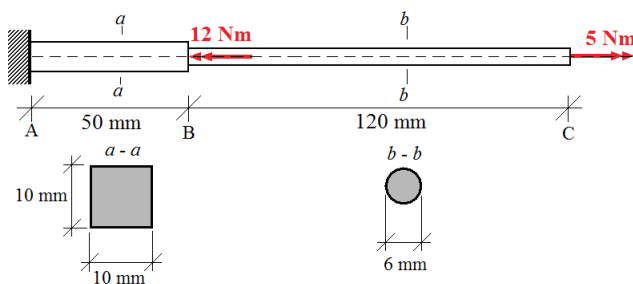
Korzystając ze wzoru na całkę potęgi funkcji sinus otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \sin^n \varphi d\varphi &= - \left[ \frac{1}{n} \sin^{n-1} \varphi \cos \varphi \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{n-1}{n} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^{n-2} \varphi d\varphi \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi &= - \left[ \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \pi \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi &= - \left[ \frac{1}{4} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{3}{4} \pi
 \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{8}{9\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi \right] = \frac{8}{9\pi} \left( 2\pi - \pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi \right) = \frac{10}{9} \approx 1,111(1)$$

### ZADANIE 15.3

Dany jest pręt skręcany jak na rysunku. Wyznaczyć całkowitą energię sprężystą nagromadzoną w pręcie. Moduł Kirchhoffa  $G = 85 \text{ GPa}$ .



$$M_{x1} = -12 + 5 = -7 \quad [\text{Nm}]$$

$$M_{x2} = 5 \quad [\text{Nm}]$$

$$I_{x1} = \beta(1)b^3 h = 0,141 \cdot (0,01)^3 \cdot 0,01 = 1410 \cdot 10^{-12} \quad [\text{m}^4]$$

$$L_1 = 50 \cdot 10^{-3} \quad [\text{m}]$$

$$I_{x2} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 0,006^4}{32} = 127,23 \cdot 10^{-12} \quad [\text{m}^4]$$

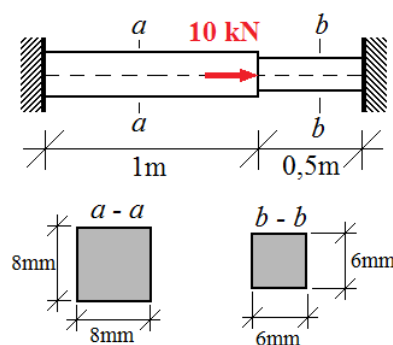
$$L_2 = 120 \cdot 10^{-3} \quad [\text{m}]$$

Energia sprężysta:

$$U_t = \sum_{i=1}^2 \frac{M_{xi}^2 L_i}{2GI_{xi}} = \frac{(-7)^2 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 85 \cdot 10^9 \cdot 1410 \cdot 10^{-12}} + \frac{(5)^2 \cdot 120 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 85 \cdot 10^9 \cdot 127,23 \cdot 10^{-12}} = 0,149 \quad [\text{J}]$$

### ZADANIE 15.4

Dany jest obustronnie utwierdzony pręt obciążony osiowo jak na rysunku. Wyznaczyć całkowitą energię sprężystą nagromadzoną w pręcie. Moduł Younga  $E = 70 \text{ GPa}$ .



Zagadnienie statycznie niewyznaczalne. Prawą podporę zastępujemy nieznaną siłą reakcji, której wartość wyznaczamy z warunku zerowania się przemieszczenia prawego końca pręta. Siły osiowe:

$$N_1 = 10 \cdot 10^3 - R_B \quad [\text{N}] \quad A_1 = 64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad L_1 = 1 \text{ m}$$

$$N_2 = -R_B \quad [\text{N}] \quad A_2 = 36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad L_2 = 1 \text{ m}$$

Całkowite wydłużenie pręta (przemieszczenie punktu B)

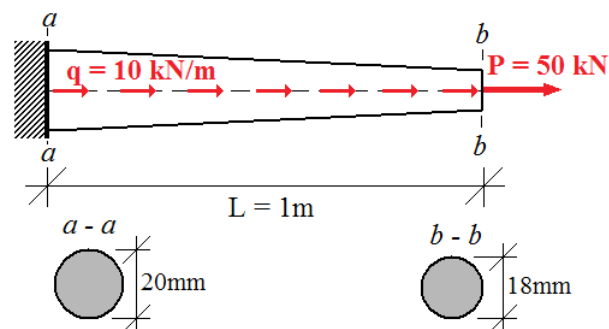
$$\Delta L = \sum_i \frac{N_i L_i}{EA_i} = \frac{(10 \cdot 10^3 - R_B) \cdot 1}{64 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^9} + \frac{(-R_B) \cdot 1}{36 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^9} = \Rightarrow \begin{aligned} R_B &= 5,294 \cdot 10^3 \quad [\text{N}] \\ N_1 &= 4,706 \cdot 10^3 \quad [\text{N}] \\ N_2 &= -5,294 \cdot 10^3 \quad [\text{N}] \end{aligned}$$

Energia sprężysta:

$$U_u = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2 L_i}{2EA_i} = \frac{(4,706 \cdot 10^3)^2 \cdot 1}{2 \cdot 70 \cdot 10^9 \cdot 64 \cdot 10^{-6}} + \frac{(-5,294)^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 70 \cdot 10^9 \cdot 36 \cdot 10^{-6}} = 5,252 \quad [\text{J}]$$

### ZADANIE 15.5

Dany jest pręt utwierdzony długości  $L=1$  m o liniowo zmiennym przekroju kołowym - od średnicy  $D_1 = 20$  mm w utwierdzeniu do  $D_2 = 18$  mm na końcu pręta. Pręt obciążony jest osiowo siłą skupioną przyłożoną na jego końcu oraz obciążeniem równomiernie rozłożonym na całej długości. Wyznaczyć całkowitą energię sprężystą nagromadzoną w pręcie. Moduł Younga  $E = 205$  GPa.



Zmienność średnicy na długości pręta:  $D(x) = D_1 - (D_1 - D_2) \cdot \frac{x}{L}$

Pole powierzchni:  $A(x) = \frac{\pi(D(x))^2}{4} = \frac{\pi}{4} \left[ D_1 - (D_1 - D_2) \cdot \frac{x}{L} \right]^2$

Rozkład sił osiowych:  $N(x) = P + q(L - x)$

Energia sprężysta:

$$U_u = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2(x)}{EA(x)} dx = \frac{2}{\pi E} \int_0^L \frac{[P + q(L - x)]^2}{\left[ D_1 - (D_1 - D_2) \cdot \frac{x}{L} \right]^2} dx = \frac{2}{\pi E} \int_0^L \frac{[5 \cdot 10^4 + 10^4 \cdot (1 - x)]^2}{\left[ 20 \cdot 10^{-3} - (20 - 18) \cdot 10^{-3} \cdot \frac{x}{1} \right]^2} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi E} \int_0^L \frac{10^8 \cdot (6 - x)^2}{10^{-6} \cdot (20 - 2x)^2} dx = \frac{2 \cdot 10^8}{\pi \cdot 205 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \int_0^L \frac{(6 - x)^2}{(10 - x)^2} dx = \frac{10^5}{410\pi} \int_0^L \frac{(6 - x)^2}{(10 - x)^2} dx$$

Całka w wyrażeniu powyższym jest całką funkcji wymiernej. Należy podzielić wielomian w liczniku przez wielomian w mianowniku:

$$\frac{1}{(x^2 - 12x + 36)} : (x^2 - 20x + 100) \Rightarrow \frac{(6 - x)^2}{(10 - x)^2} = 1 + \frac{8x - 64}{x^2 - 20x + 100}$$

$$\frac{+(-x^2 + 20x - 100)}{8x - 64}$$

$$\int \left[ 1 + \frac{8x - 64}{(10 - x)^2} \right] dx = \int dx + \int \frac{4(2x - 20 + 20 - 16)}{x^2 - 20x + 100} = \int dx + 4 \int \frac{2x - 20}{x^2 - 20x + 100} dx + 16 \int \frac{dx}{(x - 10)^2}$$

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{2x - 20}{x^2 - 20x + 100} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 - 20x + 100 \\ dt = (2x - 20) dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(x - 10)^2$$

$$\int \frac{dx}{(x - 10)^2} = \left| \begin{matrix} t = x - 10 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x - 10}$$

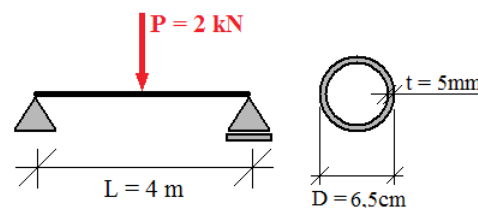
$$\int_0^1 \frac{(6 - x)^2}{(10 - x)^2} dx = \left[ x + 4 \ln(x - 10)^2 - \frac{16}{x - 10} \right]_0^1 = \frac{53}{45} + 4 \ln \frac{81}{100} \approx 0,334894$$

Ostatecznie:

$$U_u \approx \frac{10^5}{410\pi} \cdot 0,334894 = 26,0000 \quad [\text{J}]$$

### ZADANIE 15.6

Dana jest belka swobodnie podparta długości 4 m o przekroju rurowym średnicy 6,5 cm i ściance grubości 5 mm. Belka obciążona jest siłą skupioną  $P = 2$  kN w środku przęsła. Wyznaczyć energię sprężystą belki od zginania. Moduł Younga  $E = 205$  GPa.



$$D_z = 6,5 \text{ cm} \quad D_w = D_z - 2t = 5,5 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{\pi(D_z^4 - D_w^4)}{64} = 42,706 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

Rozkład momentów zginających:

$$M(x) = \begin{cases} x \in (0; 0,5L): & \frac{P}{2} \cdot x \\ x \in (0,5L; L): & \frac{P}{2} \cdot (L-x) \end{cases}$$

Energia sprężysta:

$$U_b = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI_y} dx = \frac{1}{2EI_y} \left[ \int_0^{L/2} \left[ \frac{P}{2} \cdot x \right]^2 dx + \int_{L/2}^L \left[ \frac{P}{2} \cdot (L-x) \right]^2 dx \right] = \frac{P^2}{8EI_y} \left[ \int_0^{L/2} x^2 dx + \int_{L/2}^L (L-x)^2 dx \right] =$$

$$= \frac{P^2}{8EI_y} \left[ \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} + \left[ -\frac{1}{3}(L-x)^3 \right]_{L/2}^L \right] = \frac{P^2}{8EI_y} \left[ \left( \frac{L^3}{24} - 0 \right) + \left( 0 - \left( -\frac{L^3}{24} \right) \right) \right] = \frac{P^2 L^3}{96 EI_y} \approx 30,46 \text{ [J]}$$

Wiedząc, że ugięcie belki swobodnie podpartej, obciążonej w środku przęsła wyraża się wzorem:  $\Delta = \frac{PL^3}{48EI}$ , łatwo zauważyć, że praca sił wewnętrznych (energia sprężysta  $U_b$ ) jest równa pracy sił zewnętrznych:

$$L = \frac{1}{2} P \cdot \Delta = \frac{P^2 L^3}{96 EI_y} = U_b$$

### ZADANIE 15.7

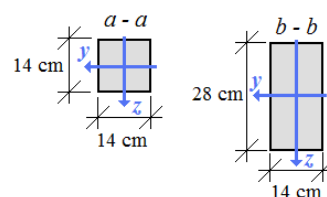
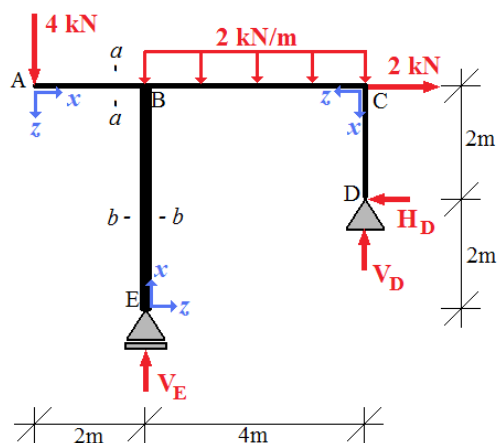
Dana jest rama prostokątna o przekroju prostokątnym, obciążona jak na rysunku. Słup  $BE$  ma dwukrotnie większą wysokość przekroju. Wyznaczyć całkowitą energię sprężystą. Moduł Younga  $E = 72$  GPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0,32$ .

Stałe sprężyste:

moduł Younga  $E = 72$  GPa

współczynnik Poissona  $\nu = 0,32$

moduł Kirchhoffa  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 27,3$  GPa



Charakterystyki geometryczne przekrojów:

$$I_{ya} = \frac{14 \cdot 14^3}{12} \cdot 10^{-8} = 3201,3 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$A_a = 14^2 \cdot 10^{-4} = 196 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$I_{yb} = \frac{14 \cdot 28^3}{12} \cdot 10^{-8} = 25610,7 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$A_b = 14 \cdot 28 \cdot 10^{-4} = 392 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$



Reakcje podporowe:

$$\Sigma X = 2 - H_D = 0 \Rightarrow H_D = 2$$

$$\Sigma M_D = 4 \cdot 6 - 4 \cdot V_E + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_E = 9 \quad [\text{kN}]$$

$$\Sigma Y = -4 + V_E - 2 \cdot 4 + V_D = 0 \Rightarrow V_D = 3 \quad [\text{kN}]$$

Siły przekrojowe:

$$AB \quad x \in (0 ; 2)$$

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = -4 \\ M(x) = -4x \end{cases}$$

$$BC \quad x \in (2 ; 6)$$

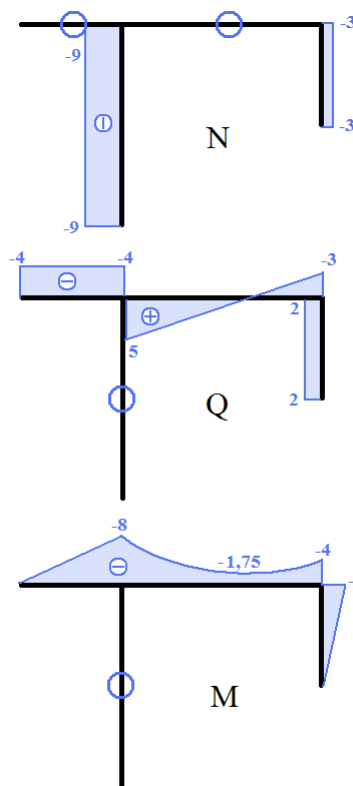
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = -3 + 2(6-x) = 9 - 2x \\ M(x) = 3(6-x) - \frac{2}{2}(6-x)^2 - 2 \cdot 2 = -x^2 + 9x - 22 \end{cases}$$

$$CD \quad x \in (0 ; 2)$$

$$\begin{cases} N(x) = -3 \\ Q(x) = 2 \\ M(x) = -2(2-x) = 2x - 4 \end{cases}$$

$$EB \quad x \in (0 ; 4)$$

$$\begin{cases} N(x) = -9 \\ Q(x) = 0 \\ M(x) = 0 \end{cases}$$



Energia sprężysta:

Przedział AB:

- obc. osiowe:  $U_u = \frac{1}{2EA_a} \int_0^2 (0)^2 dx = 0$
- ścinanie:  $U_s = \frac{\kappa}{2GA_a} \int_0^2 (-4 \cdot 10^3)^2 dx = \frac{\kappa 16 \cdot 10^6}{GA_a}$
- zginanie:  $U_b = \frac{1}{2EI_a} \int_0^2 [(-4x) \cdot 10^3]^2 dx = \frac{64 \cdot 10^6}{3EI_a}$

Przedział BC:

- obc. osiowe:  $U_u = \frac{1}{2EA_a} \int_2^6 (0)^2 dx = 0$
- ścinanie:  $U_s = \frac{\kappa}{2GA_a} \int_2^6 [(9-2x) \cdot 10^3]^2 dx = \frac{\kappa 38 \cdot 10^6}{3GA_a}$
- zginanie:  $U_b = \frac{1}{2EI_a} \int_2^6 [(-x^2 + 9x - 22) \cdot 10^3]^2 dx = \frac{416 \cdot 10^6}{15EI_a}$

Przedział CD:

- obc. osiowe:  $U_u = \frac{1}{2EA_a} \int_0^2 (-3 \cdot 10^3)^2 dx = \frac{9 \cdot 10^6}{EA_a}$
- ścinanie:  $U_s = \frac{\kappa}{2GA_a} \int_0^2 (2 \cdot 10^3)^2 dx = \frac{\kappa 4 \cdot 10^6}{GA_a}$
- zginanie:  $U_b = \frac{1}{2EI_a} \int_0^2 [(2x-4) \cdot 10^3]^2 dx = \frac{16 \cdot 10^6}{3EI_a}$

Przedział EB:

- rozciąganie:  $U_u = \frac{1}{2EA_b} \int_0^4 (-9 \cdot 10^3)^2 dx = \frac{162 \cdot 10^6}{EA_b}$
- ścinanie:  $U_s = \frac{\kappa}{2GA_b} \int_0^4 (0)^2 dx = 0$
- zginanie:  $U_b = \frac{1}{2EI_b} \int_0^4 (0)^2 dx = 0$

Całkowita energia od rozciągania / ściskania:

$$U_u = \left[ 0 + 0 + \frac{9}{EA_a} + \frac{162}{EA_b} \right] \cdot 10^6 \approx 0,06378 \quad [\text{J}]$$

Całkowita energia od ścinania:

$$U_s = \left[ \frac{16}{GA_a} + \frac{38}{3GA_a} + \frac{4}{GA_a} + 0 \right] \cdot 10^6 \approx 0,06105 \quad [\text{J}]$$

Całkowita energia od zginania:

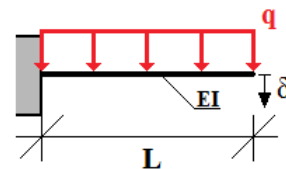
$$U_b = \left[ \frac{64}{3EI_a} + \frac{416}{15EI_a} + \frac{16}{3EI_a} + 0 \right] \cdot 10^6 \approx 23,60125 \quad [\text{J}]$$

Całkowita energia sprężysta:

$$U = U_u + U_s + U_b \approx 23,726 \quad [\text{J}]$$

### ZADANIE 15.8

Dany jest wspornik o długości  $L$  i sztywności  $EI$ , obciążony równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym o gęstości  $q$ . Wyznaczyć ugięcie końca belki metodą analityczną Clebscha, metodą graficzną Mohra, metodą Castigliano oraz za pomocą wzoru Maxwella-Mohra.



#### Metoda Clebscha:

Reakcje podporowe:  $M_A = \frac{qL^2}{2} \quad V_A = qL$

Rozkład momentów:  $M(x) = -\frac{qL^2}{2}(x-0)^0 + qL(x-0)^1 - \frac{q}{2}(x-0)^2 \Big|^{AB}$

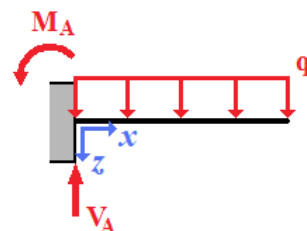
Rozkład kąta ugięcia:  $\varphi(x) = -\frac{1}{EI} \left[ C_1 - \frac{qL^2}{2}(x-0)^1 + \frac{qL}{2}(x-0)^2 - \frac{q}{6}(x-0)^3 \Big|^{AB} \right]$

Rozkład ugięć:  $w(x) = -\frac{1}{EI} \left[ C_2 + C_1x - \frac{qL^2}{4}(x-0)^2 + \frac{qL}{6}(x-0)^3 - \frac{q}{24}(x-0)^4 \Big|^{AB} \right]$

Z warunków brzegowych:  $\begin{cases} w(0)=0 \\ \varphi(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ C_1=0 \end{cases}$

$$w(x) = -\frac{q}{EI} \left[ -\frac{L^2}{4}x^2 + \frac{L}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \right]$$

Ugięcie końca belki:  $w(L) = \frac{qL^4}{8EI}$

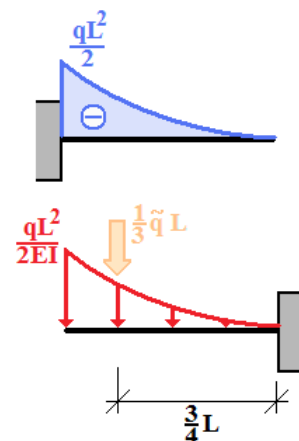


#### Metoda Mohra:

Wykres momentów zginających i belka zastępcza:

Moment fikcyjny w prawym skrajnym punkcie:

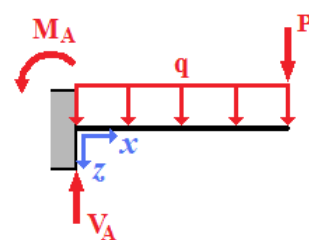
$$w(L) = \tilde{M}(L) = \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{qL^2}{2EI} \cdot L \right) \cdot \left( \frac{3}{4} L \right) = \frac{qL^4}{8EI}$$



#### Metoda Castigliano:

Poszukujemy przemieszczenia pionowego końca belki. Przykładamy w tym miejscu fikcyjną pionową siłę skupioną  $P$ . Po wyznaczeniu energii sprężystej i jej zróżniczkowaniu względem  $P$ , przyjmujemy  $P = 0$ , ponieważ w rzeczywistości siła ta w miejscu tym nie występuje.

Reakcje podporowe:  $M_A = \frac{qL^2}{2} + PL \quad V_A = qL + P$



Rozkład momentów:  $M(x) = -\left(\frac{qL^2}{2} + PL\right) + (qL + P) \cdot x - \frac{q}{2} x^2$

Rozkład sił poprzecznych:  $Q(x) = qL + P - qx$

Rozkład sił normalnych:  $N(x) = 0$

Pochodne rozkładów sił względem siły na kierunku poszukiwanego przemieszczenia:

Rozkład momentów:  $\frac{\partial M}{\partial P} = (x - L)$

Rozkład sił poprzecznych:  $\frac{\partial Q}{\partial P} = 1$

Rozkład sił normalnych:  $\frac{\partial N}{\partial P} = 0$

Energia sprężysta:  $U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \kappa \int_0^L \frac{Q^2}{2AG} dx + \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx$

Przemieszczenie:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[ \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx + \kappa \int_0^L \frac{Q^2}{2GA} dx + \int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx \right]_{P=0} =$$

$$= \left[ \int_0^L \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial P} dx + \kappa \int_0^L \frac{1}{GA} Q \frac{\partial Q}{\partial P} dx + \int_0^L \frac{1}{EA} N \frac{\partial N}{\partial P} dx \right]_{P=0}$$

Przemieszczenie od zginania:

$$\frac{1}{EI} \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx \Big|_{P=0} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ -\left(\frac{qL^2}{2} + PL\right) + (qL + P) \cdot x - \frac{q}{2} x^2 \right] (x - L) dx \Big|_{P=0} =$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ \left(\frac{qL^2}{2} + PL\right) L - \left(\frac{qL^2}{2} + PL + (qL + P)L\right) x + \left[ (qL + P) + \frac{qL}{2} \right] \cdot x^2 - \frac{q}{2} x^3 \right] dx \Big|_{P=0} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \left(\frac{qL^2}{2} + PL\right) Lx - \left(\frac{qL^2}{2} + PL + (qL + P)L\right) \frac{x^2}{2} + \left[ (qL + P) + \frac{qL}{2} \right] \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2} \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^L \Big|_{P=0} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \left(\frac{qL^2}{2} + PL\right) L^2 - \left(\frac{qL^2}{2} + PL + (qL + P)L\right) \frac{L^2}{2} + \left[ (qL + P) + \frac{qL}{2} \right] \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{q}{2} \frac{L^4}{4} \right] \Big|_{P=0} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \frac{qL^4}{2} - \frac{3L^2}{4} + \frac{qL^4}{2} - \frac{qL^4}{8} \right] = \frac{qL^4}{8EI}$$

Przemieszczenie od ścinania:

$$\frac{\kappa}{GA} \int_0^L Q \frac{\partial Q}{\partial P} dx \Big|_{P=0} = \frac{\kappa}{GA} \int_0^L [qL + P - qx] \cdot 1 dx \Big|_{P=0} = \frac{\kappa}{GA} \left[ qLx + Px - q \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^L \Big|_{P=0} =$$

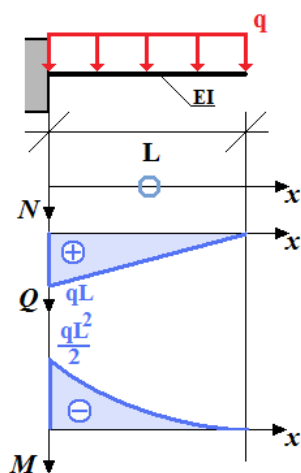
$$= \frac{\kappa}{GA} \left[ qL^2 + PL - q \frac{L^2}{2} \right] \Big|_{P=0} = \frac{\kappa qL^2}{2GA}$$

Przemieszczenie od rozciągania / ściskania:  $\frac{1}{EA} \int_0^L N \frac{\partial N}{\partial P} dx \Big|_{P=0} = 0$

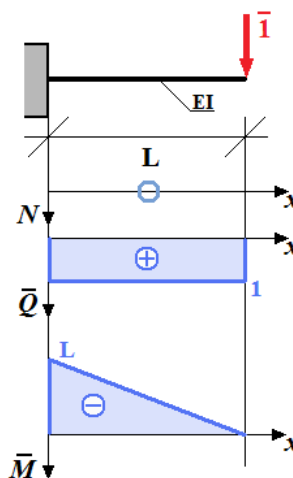
Przemieszczenie końca wspornika:  $\delta = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{\kappa qL^2}{2GA}$

**Wzór Maxwella-Mohra** (z całkowaniem graficznym metodą Wereszczagina):

Wykresy sił przekrojowych od obciążenia zewnętrznego



Wykres sił przekrojowych od obciążenia jednostkowego na kierunku przemieszczenia



Przemieszczenie:

$$\delta = \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx + \kappa \int_0^L \frac{Q \cdot \bar{Q}}{AG} dx + \int_0^L \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx$$

Przemieszczenie od zginania:

$$\int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram of } M \cdot \bar{M} \text{ product} \\ \text{Area calculation} \end{array} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram of } M \cdot \bar{M} \text{ product} \\ \text{Area calculation} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot L \cdot \frac{qL^2}{2} \cdot L - \frac{1}{3} \cdot L \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot L \right] = \frac{qL^4}{8EI}$$

Przemieszczenie od ścinania:

$$\kappa \int_0^L \frac{Q \cdot \bar{Q}}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram of } Q \cdot \bar{Q} \text{ product} \\ \text{Area calculation} \end{array} \right\} = \frac{\kappa}{GA} \left[ \frac{1}{2} \cdot L \cdot qL \cdot 1 \right] = \frac{\kappa qL^2}{2GA}$$

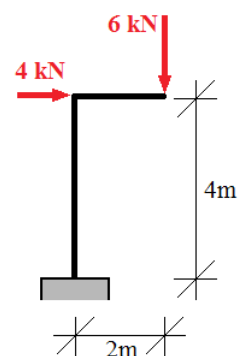
Przemieszczenie od rozciągania / ściskania:

$$\int_0^L \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx = 0$$

Przemieszczenie końca wspornika:  $\delta = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{\kappa qL^2}{2GA}$

### ZADANIE 15.9

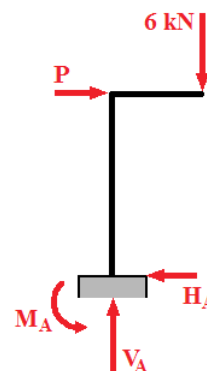
Wyznaczyć przemieszczenie poziome oraz kąt obrotu punktu B ramy przedstawionej na rysunku obok. Przyjąć sztywność giętną  $EI = 1000 \text{ kNm}^2$ . Wykorzystać metodę Castigliano, uwzględniając jedynie wpływ zginania.



Obydwa przemieszczenia uogólnione możemy wyznaczyć niezależnie.

### Przemieszczenie poziome punktu B

W punkcie B jest siła skupiona na kierunku poszukiwanego przemieszczenia. Przyjmujemy, że ma ona pewną zmienną wartość  $P$  i poszukujemy pochodnej cząstkowej energii sprężystej względem tej zmiennej. Następnie podstawiamy za  $P$  jej rzeczywistą wartość. Uzyskany wynik jest poszukiwanym przemieszczeniem.



$$\text{Reakcje podporowe: } V_A = 6 \quad H_A = P \quad M_A = 6 \cdot 2 + 4 \cdot P = 12 + 4P$$

Rozkład momentów zginających:

$$AB \quad x \in (0 ; 4): \quad M_{AB}(x) = -M_A + H_A x = -12 - 4P + Px$$

$$BC \quad x \in (0 ; 2): \quad M_{BC}(x) = -6(2 - x)$$

Pochodne rozkładu momentów:

$$AB \quad x \in (0 ; 4): \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = x - 4$$

$$BC \quad x \in (0 ; 2): \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = 0$$

Przemieszczenie poziome:

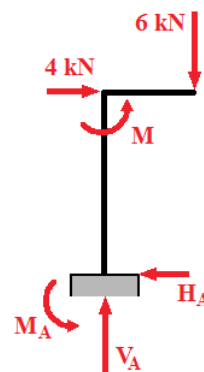
$$\begin{aligned} \delta_B^{(x)} &= \left. \frac{\partial U}{\partial P} \right|_{P=4} = \frac{\partial}{\partial P} \int_s \frac{M^2}{2EI} dx \Big|_{P=4} = \frac{1}{EI} \int_s M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} dx \Big|_{P=4} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^4 (-12 - 4P + Px) \cdot (x - 4) dx + \int_0^2 -6(2 - x) \cdot 0 dx \right] \Big|_{P=4} = \frac{1}{EI} \int_0^4 Px^2 + (-12 - 8P)x + (48 + 16P) dx \Big|_{P=4} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ P \frac{x^3}{3} + (-12 - 8P) \frac{x^2}{2} + (48 + 16P)x \right] \Big|_0^4 \Big|_{P=4} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} P + 96 \right] \Big|_{P=4} = \frac{544}{3EI} \end{aligned}$$

Wartości obciążeń podawane były w kN. Podstawiając  $EI$  w  $\text{kNm}^2$ , uzyskamy wynik w metrach.

$$\delta_B^{(x)} = \frac{544}{3EI} \approx 0,181 \quad [\text{m}] \quad \Rightarrow \quad \delta_B^{(x)} \approx 18 \text{ cm}$$

## Kąt obrotu punktu B

W punkcie B nie ma siły uogólnionej (momentu skupionego) odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu uogólnionemu (obrotowi). Przykładamy zatem w tym miejscu pewien moment skupiony o zmiennej wartości  $M$  i szukamy pochodnej cząstkowej energii sprężystej względem tej zmiennej. Następnie podstawiamy za  $M$  wartość 0, ponieważ siła ta w rzeczywistości tam nie występuje. Uzyskany wynik jest poszukiwanym przemieszczeniem.



$$\text{Reakcje podporowe: } V_A = 6 \quad H_A = 4 \quad M_A = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - M = 28 - M$$

Rozkład momentów zginających:

$$AB \quad x \in (0 ; 4): \quad M_{AB}(x) = -M_A + H_A x = -28 + M + 4x$$

$$BC \quad x \in (0 ; 2): \quad M_{BC}(x) = -6(2 - x)$$

Pochodne rozkładu momentów:

$$AB \quad x \in (0 ; 4): \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial M} = 1$$

$$BC \quad x \in (0 ; 2): \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial M} = 0$$

Obrót:

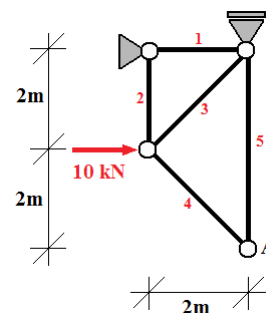
$$\begin{aligned} \varphi_B &= \left. \frac{\partial U}{\partial M} \right|_{M=0} = \left. \frac{\partial}{\partial M} \int_s \frac{M^2}{2EI} dx \right|_{p=4} = \left. \frac{1}{EI} \int_s M \cdot \frac{\partial M}{\partial M} dx \right|_{M=0} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \int_0^4 (-28 + M + 4x) \cdot 1 dx + \int_0^2 -6(2-x) \cdot 0 dx \right] \Big|_{M=0} = \frac{1}{EI} \int_0^4 -28 + M + 4x dx \Big|_{M=0} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -28x + Mx + 4 \frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^4 \Big|_{M=0} = \frac{1}{EI} [4M - 80] \Big|_{M=0} = -\frac{80}{EI} \end{aligned}$$

Wartości obciążeń podawane były w kN. Podstawiając  $EI$  w  $\text{kNm}^2$ , uzyskamy wynik w radianach.

$$\varphi_B = -\frac{80}{EI} = 0,08 \quad [\text{rad}] \quad \Rightarrow \quad \varphi_B \approx 4,58^\circ$$

### ZADANIE 15.10

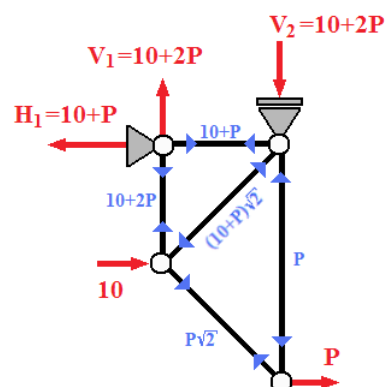
Wyznaczyć przemieszczenie poziome węzła A kratownicy jak na rysunku. Przyjąć moduł Younga  $E = 205 \text{ GPa}$  i pole przekroju prętów kratownicy  $A = 4 \text{ cm}^2$ . Wykorzystać metodę Castigliano.



Celem wyznaczenie przemieszczenia poziomego węzła A, przykładamy w tym węźle pewną siłę  $P$ . Wyznaczamy następnie reakcje i siły przekrojowe w prętach.

Ponieważ rozkład sił w każdym pręcie kratownicy jest stały, zatem odpowiednią całkę opisującą energię sprężystą zastąpić możemy sumą:

$$\int_s \frac{N^2}{2EA} dx = \sum_{i=1}^N \frac{N_i^2 L_i}{2EA_i}$$



Wyniki zapiszemy w tabelce:

Nr pręta	Długość $L_i$	Szttywność względna $\left(\frac{EA_i}{EA}\right)$	Siła osiowa $N_i$	Energia $\frac{N_i^2 L_i}{2(EA_i/EA)EA}$
1	2	1	$10 + P$	$(10 + P)^2 / EA$
2	2	1	$10 + 2P$	$(10 + 2P)^2 / EA$
3	$2\sqrt{2}$	1	$-(10 + P)\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}(10 + P)^2 / EA$
4	$2\sqrt{2}$	1	$P\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}P^2 / EA$
5	4	1	$-P$	$2P^2 / EA$
				$\Sigma = [(7 + 4\sqrt{2})P^2 + (60 + 40\sqrt{2})P + (200 + 200\sqrt{2})] / EA$

Całkowita energia sprężysta:

$$U = \frac{1}{EA} [(7 + 4\sqrt{2})P^2 + (60 + 40\sqrt{2})P + (200 + 200\sqrt{2})]$$

Przemieszczenie poziome:

$$\delta = \left. \frac{\partial U}{\partial P} \right|_{P=0} = \frac{1}{EA} [2(7 + 4\sqrt{2})P + (60 + 40\sqrt{2})] \Big|_{P=0} = \frac{60 + 40\sqrt{2}}{EA} \approx \frac{116,569}{EA}$$

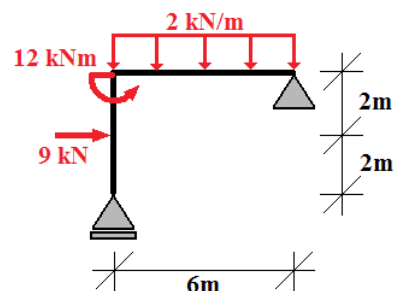
Wartość liczbowa przemieszczenia wyznaczamy pamiętając, że obciążenie stale przyjmowane było w kN.

$$\delta = \frac{116,569 \cdot 10^3}{205 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1,422 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 1,422 \text{ mm}$$



### ZADANIE 15.11

Wyznaczyć przemieszczenie pionowe i kąt obrotu środka rygła ramy obciążonej jak na rysunku. Zastosować wzór Maxwella-Mohra. Przyjąć:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $G = 82 \text{ GPa}$ , zaś  $I = 4860 \text{ cm}^4$ ,  $A = 180 \text{ cm}^2$ ,  $\kappa = 1,2$ .

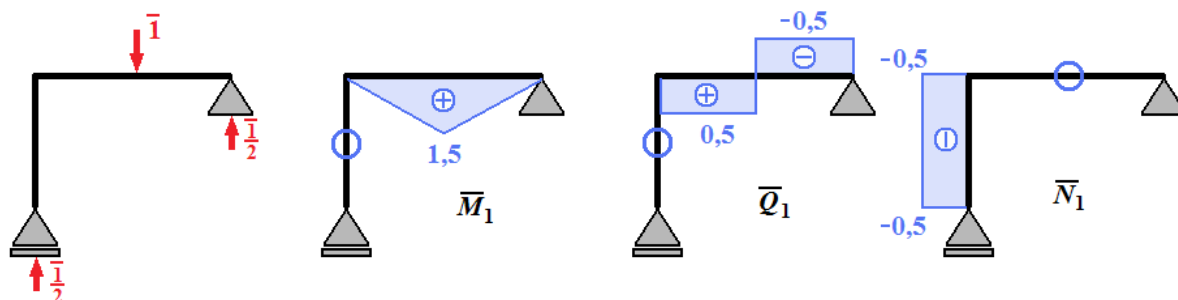


Rozpatrujemy trzy stany obciążenia ramy:

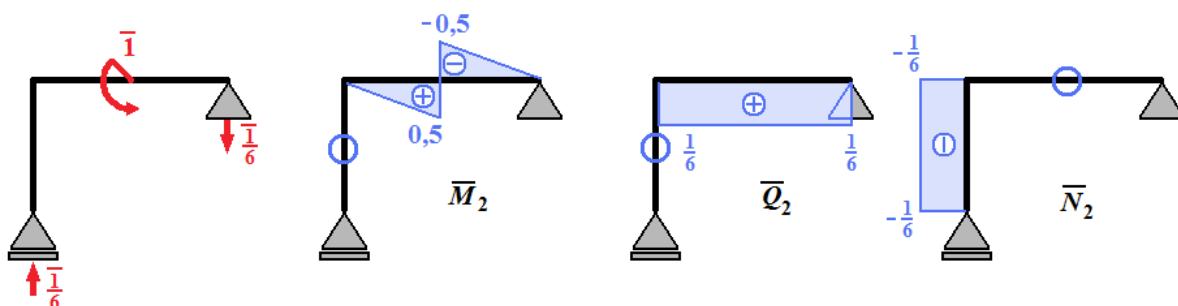
- stan od obciążenia zewnętrznego (tzw. „stan P”)
- stany od jednostkowych obciążeń na kierunkach poszukiwanych przemieszczeń uogólnionych:
  - obciążenie jednostkową pionową siłą skupioną (przemieszczenie pionowe)
  - obciążenie jednostkowym momentem skupionym (obrót)

Wyznaczamy rozkład sił przekrojowych w każdym z tych stanów:

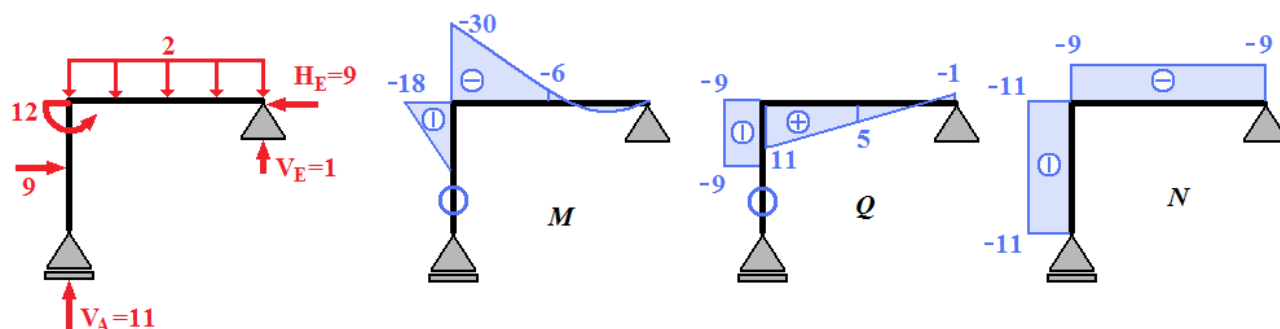
Obciążenie jednostkową siłą skupioną:



Obciążenie jednostkowym momentem skupionym:



Stan P



Przemieszczenie pionowe:  $\Delta = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} dx + \kappa \int_s \frac{Q \cdot \bar{Q}_1}{GA} dx + \int_s \frac{N \cdot \bar{N}_1}{EA} dx$

Przemieszczenie od zginania:

$$\int_s \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} \end{array} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{qL^2}{8} = \frac{9}{4} \\ \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{qL^2}{8} = \frac{9}{4} \\ \text{6} \\ \text{1,5} \\ \text{3} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 30 \cdot 1,5 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot 1,5 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot 1,5 \right] = -\frac{135}{4EI} \approx -3,307 \text{ mm}$$

Przemieszczenie od ścinania:

$$\kappa \int_s \frac{Q \cdot \bar{Q}_1}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \end{array} \right\} = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{5} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{5} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\kappa}{GA} \left[ +\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0,5 \right] = \frac{9\kappa}{GA} \approx 0,007 \text{ mm}$$

Przemieszczenie od sił osiowych:

$$\int_s \frac{N \cdot \bar{N}_1}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left\{ \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{0,5} \\ \text{4} \end{array} \right\} = \frac{1}{EA} [1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 0,5] = \frac{22}{EA} \approx 0,006 \text{ mm}$$

Obrót:  $\varphi = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}_2}{EI} dx + \kappa \int_s \frac{Q \cdot \bar{Q}_2}{GA} dx + \int_s \frac{N \cdot \bar{N}_2}{EA} dx$

Obrót od zginania:

$$\int_s \frac{M \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \end{array} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{qL^2}{8} = \frac{9}{4} \\ \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{30} \\ \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \frac{qL^2}{8} = \frac{9}{4} \\ \text{6} \\ \text{0,5} \\ \text{3} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 30 \cdot 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot 0,5 \right] = -\frac{15}{2EI} \approx -0,0421^\circ$$

Obrót od ścinania:

$$\kappa \int_s \frac{Q \cdot \bar{Q}_2}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{1/6} \\ \text{6} \end{array} \right\} = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{1/6} \\ \text{6} \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{1/6} \\ \text{6} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{11} \\ \text{1/6} \\ \text{6} \end{array} & \begin{array}{c} \text{1} \\ \text{1/6} \\ \text{6} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\kappa}{GA} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 11 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \right] = \frac{5\kappa}{GA} \approx 0,0002^\circ$$

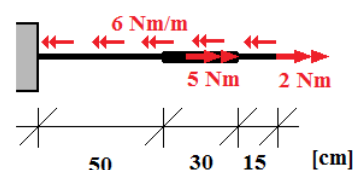
Obrót od sił osiowych:

$$\int_s \frac{N \cdot \bar{N}_2}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 11 \\ - \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1/6 \\ - \end{array}} \end{array} \right\} = \frac{1}{EA} \left[ 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot \frac{1}{6} \right] = \frac{22}{3EA} \approx 0,0001^\circ$$

Przesunięcie pionowe środka rygla ramy:  $\Delta = -3,294 \text{ mm}$   
Obrót środka rygla ramy:  $\varphi = -0,0418^\circ$

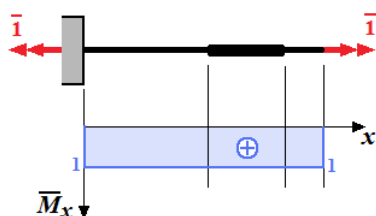
### ZADANIE 15.12

Korzystając ze wzoru Maxwella-Mohra, wyznaczyć kąt skręcenia pręta jak na rysunku.

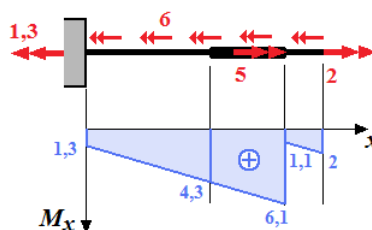


Aby wyznaczyć całkowity kąt skręcenia pręta, przykładamy na jego końcu jednostkową siłę uogólnioną (moment skręcający) odpowiadającą poszukiwanemu przemieszczeniu uogólnionemu (kątowni skręcenia)

Obciążenie jednostkowe:



Stan P:

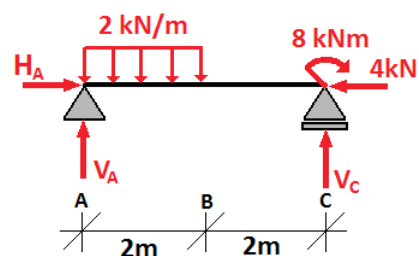


Kąt skręcenia (należy pamiętać o zmiennej sztywności pręta):

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_s \frac{M_x \cdot \bar{M}_x}{GI_x} dx = \frac{1}{GI_x} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1,3 \\ 4,3 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{GI_x} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1,3 \\ 4,3 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 4,3 \\ 6,1 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} 1,1 \\ 2 \end{array}} \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{GI_x} \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1,3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 4,3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 4,3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 6,1 \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 1,1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 0,15 \cdot 1 \right] = \\ &= \frac{193}{80GI_x} \end{aligned}$$

### ZADANIE 15.13

Obliczyć całkowite przemieszczenie punktu B belki obciążonej jak na rysunku obok. Uwzględnić wpływ sił poprzecznych oraz sił osiowych. Belka ma przekrój prostokątny o wymiarach  $b=20\text{ cm}$ ,  $h=30\text{ cm}$  i wykonana jest z betonu o module Younga  $E=33\text{ GPa}$  i współczynniku Poissona  $\nu=0,2$ . Wykorzystać wzór Maxwella-Mohra.



Pole przekroju poprzecznego:  $A=bh = 600\text{ cm}^2$

Moment bezwładności przekroju:  $I = \frac{bh^3}{12} = 45000\text{ cm}^4$

Energetyczny współczynnik ścinania dla przekroju prostokątnego:  $\kappa=1,2$

Moduł Kirchhoffa:  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 13,75\text{ GPa}$

Sztywność wzdłużna:  $EA = 1980000\text{ kN}$

Sztywność poprzeczna:  $GA = 825000\text{ kN}$

Sztywność giętna:  $EI = 14850\text{ kNm}^2$

Reakcje i siły przekrojowe spowodowane obciążeniem zewnętrznym.

$$\sum X=0: H_A - 4 = 0 \Rightarrow H_A = 4$$

$$\sum M_A=0: V_C \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 8 = 0 \Rightarrow V_C = 3$$

$$\sum M_C=0: -V_A \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 8 = 0 \Rightarrow V_A = 1$$

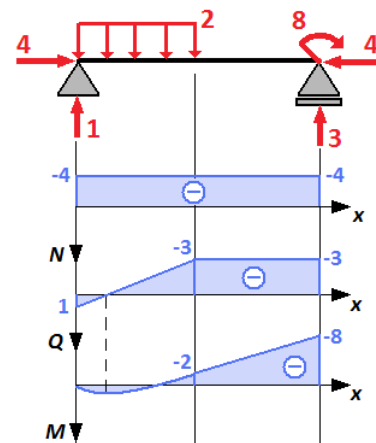
Przedział AB:

$$\begin{cases} N = -H_A = -4 \\ Q = V_A - qx = 1 - 2x \\ M = V_A x - \frac{1}{2}qx^2 = x - x^2 \end{cases}$$

Przedział BC:

$$\begin{cases} N = -4 \\ Q = -V_C = -3 \\ M = V_C(4-x) - 8 = 4 - 3x \end{cases}$$

Przemieszczenie całkowite będzie sumą geometryczną przemieszczenia poziomego i pionowego. Celem znalezienia odpowiednich przemieszczeń składowych przykładamy bezwymiarowe jednostkowe obciążenia na kierunku poszukiwanych przemieszczeń:



Przemieszczenie pionowe – fikcyjna, bezwymiarowa, jednostkowa siła pionowa w pkt. B

Reakcje:

$$\sum X=0: H_A = 0$$

$$\sum M_A=0: V_C \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_C = 0,5$$

$$\sum M_C=0: -V_A \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 0,5$$

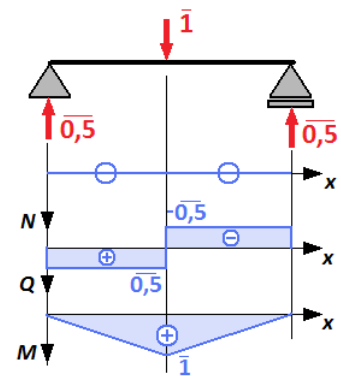
Przedział AB:

$$\begin{cases} \bar{N}^{(y)}=0 \\ \bar{Q}^{(y)}=0,5 \\ \bar{M}^{(y)}=-0,5x \end{cases}$$

Przedział BC:

$$\begin{cases} \bar{N}^{(y)}=0 \\ \bar{Q}^{(y)}=-0,5 \\ \bar{M}^{(y)}=0,5(4-x) \end{cases}$$

$$\delta_B^{(y)} = \int_0^L \frac{N \cdot \bar{N}^{(y)}}{EA} dx + \kappa \int_0^L \frac{Q \cdot \bar{Q}^{(y)}}{GA} dx + \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}^{(y)}}{EI} dx$$



Przemieszczenie pionowe od zginania:

$$\int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}^{(y)}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{2} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{2} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{2} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{f}=\frac{ql^2}{8}=1 \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{2} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{8} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 2 \right] = -\frac{14}{3EI} \approx -0,314 \text{ mm}$$

Przemieszczenie pionowe od ścinania:

$$\kappa \int_0^L \frac{Q \cdot \bar{Q}^{(y)}}{GA} dx = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{0,5} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{0,5} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{3} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{3} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{3} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{\kappa}{GA} \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{0,5} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{0,5} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{0,5} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \text{1} \\ \hline \text{+} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{3} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{3} \\ \hline \text{-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\kappa}{GA} \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 2 \right] = \frac{2\kappa}{GA} \approx 0,00291 \text{ mm}$$

Przemieszczenie pionowe od ściskania:

$$\int_0^L \frac{N \cdot \bar{N}^{(y)}}{EA} dx = 0$$

Całkowite przemieszczenie pionowe:  $\delta_B^{(y)} = \frac{2\kappa}{GA} - \frac{14}{3EI} \approx -0,311 \text{ mm}$

Przemieszczenie poziome - fikcyjna, bezwymiarowa, jednostkowa siła pozioma w pkt. B

Reakcje:

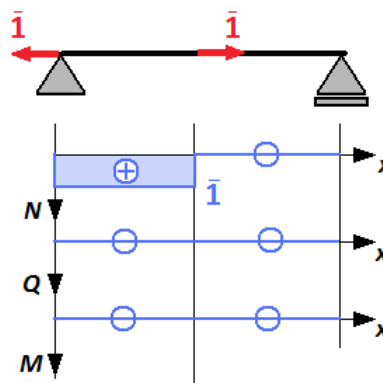
$$\begin{aligned} \Sigma X=0: H_A+1=0 &\Rightarrow H_A=-1 \\ \Sigma M_A=0: V_C \cdot 4=0 &\Rightarrow V_C=0 \\ \Sigma M_C=0: -V_A \cdot 4=0 &\Rightarrow V_A=0 \end{aligned}$$

Przedział AB:

$$\begin{cases} \bar{N}^{(x)}=1 \\ \bar{Q}^{(x)}=0 \\ \bar{M}^{(x)}=0 \end{cases}$$

Przedział BC:

$$\begin{cases} \bar{N}^{(x)}=0 \\ \bar{Q}^{(x)}=0 \\ \bar{M}^{(x)}=0 \end{cases}$$



$$\delta_B^{(X)} = \int_0^L \frac{N \cdot \bar{N}^{(X)}}{EA} dx + \kappa \int_0^L \frac{Q \cdot \bar{Q}^{(X)}}{GA} dx + \int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}^{(X)}}{EI} dx$$

Przemieszczenie poziome od zginania:

$$\int_0^L \frac{M \cdot \bar{M}^{(X)}}{EI} dx = 0$$

Przemieszczenie poziome od ścinania:

$$\kappa \int_0^L \frac{Q \cdot \bar{Q}^{(X)}}{GA} dx = 0$$

Przemieszczenie poziome od ściskania:

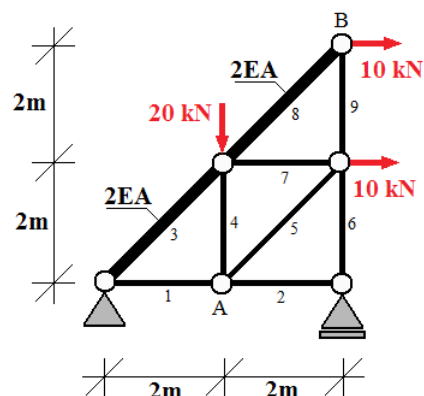
$$\int_0^L \frac{N \cdot \bar{N}^{(Y)}}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left( \begin{array}{c} \boxed{+} \quad 1 \\ \boxed{-} \quad 4 \\ \hline \ast \quad 2 \quad \ast \end{array} \right) = \frac{1}{EA} [1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2] = \frac{8}{EA} \approx -0,00404 \text{ mm}$$

Całkowite przemieszczenie poziome:  $\delta_B^{(X)} = \frac{8}{EA} \approx -0,00404 \text{ mm}$

Przemieszczenie całkowite punktu B:  $\delta_B = \sqrt{(\delta_B^{(Y)})^2 + (\delta_B^{(X)})^2} \approx 0,311 \text{ mm}$

### ZADANIE 15.14

Wyznaczyć całkowite przemieszczenie węzła B kratownicy jak na rysunku. Wyznaczyć zmianę odległości między węzłami A i B. Wykorzystać wzór Maxwella-Mohra.

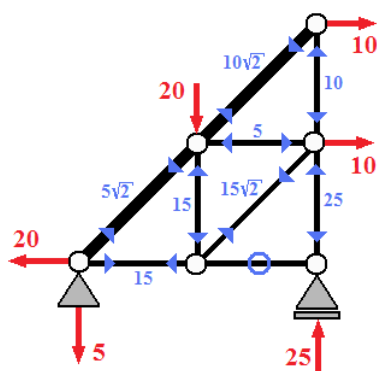


Celem wyznaczenia przemieszczenia całkowitego węzła B, przykładamy w tym węźle jednostkowe siły skupione – pionową i poziomą – i wyznaczamy odpowiadające im przemieszczenia.

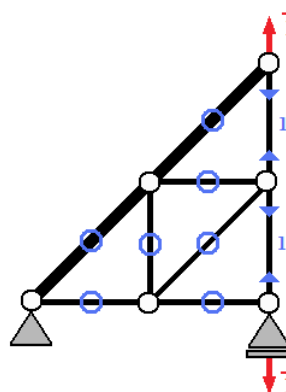
Aby wyznaczyć względne przemieszczenie (zmianę odległości) pomiędzy węzłami A i B, przykładamy w każdym z nich jednostkową siłę skupioną na kierunku łączącym obydwie punkty, skierowaną w stronę przeciwną niż drugi z tych punktów – zmiana odległości jest sumą przemieszczeń każdego z punktów na kierunku łączącym te punkty. Za wartość dodatnią zmiany przyjmujemy zwiększenie tej odległości.

Wyznaczamy siły przekrojowe w prętach kratownicy od obciążenia zewnętrznego oraz od sił jednostkowych:

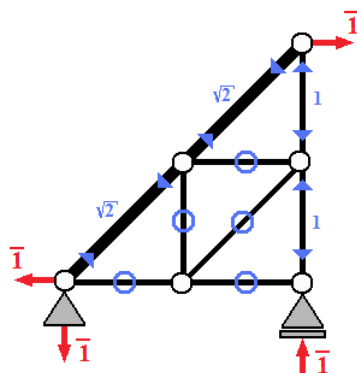
Stan P:  
N



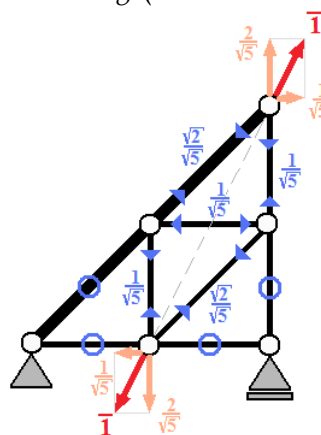
Stan jednostkowy (przemieszczenie pionowe)  
 $\bar{N}^{(YB)}$



Stan jednostkowy (przemieszczenie poziome)  
 $\bar{N}^{(XB)}$



Stan jednostkowy (zmiana odległości)  
 $\bar{N}^{(\Delta AB)}$



Przy wyznaczaniu poszukiwanych przemieszczeń, z uwagi na przedziałami stały rozkład sił przekrojowych, odpowiednie całki, można zapisać w postaci sum:

$$\int_s \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} dx = \sum_i \frac{N_i \cdot \bar{N}_i \cdot L_i}{EA_i}$$

Wyniki zapiszemy w tabelce:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Nr pręta	$L_i$	$\frac{EA_i}{EA}$	$N_i$	$\bar{N}_i^{(YB)}$	$\bar{N}_i^{(XB)}$	$\bar{N}_i^{(\Delta AB)}$	$\frac{2}{3} \times 4 \times 5$	$\frac{2}{3} \times 4 \times 6$	$\frac{2}{3} \times 4 \times 7$	
1	2	1	15	0	0	0	0	0	0	
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
3	2,828	2	7,071	0	1,414	0	0	14,142	0	
4	2	1	-15	0	0	0,447	0	0	-13,416	
5	2,828	1	21,213	0	0	0,632	0	0	37,947	
6	2	1	-25	1	-1	0	-50	50	0	
7	2	1	-5	0	0	-0,447	0	0	4,472	
8	2,828	2	14,142	0	1,414	0,632	0	28,284	12,649	
9	2	1	-10	1	-1	0,447	-20	20	-8,944	
							$\Sigma$	-70	112,426	32,708

Przemieszczenie pionowe punktu B:

$$\delta_B^{(Y)} = -\frac{70}{EA}$$

Przemieszczenie pionowe punktu B:

$$\delta_B^{(X)} = \frac{112,426}{EA}$$

Przemieszczenie całkowite punktu B:

$$\delta_B = \sqrt{(\delta_B^{(Y)})^2 + (\delta_B^{(X)})^2} = \frac{132,437}{EA}$$

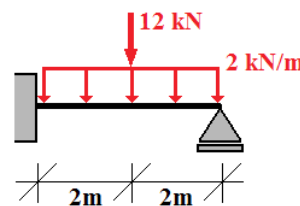
Zmiana odległości między węzłami A i B:

$$\Delta d_{AB} = \frac{32,708}{EA}$$



### ZADANIE 15.15

Wyznaczyć za pomocą wzoru Maxwella-Mohra reakcje oraz siły przekrojowe w belce statycznie niewyznaczalnej obciążonej jak na rysunku. Uwzględnić jedynie wpływ momentów zginających.

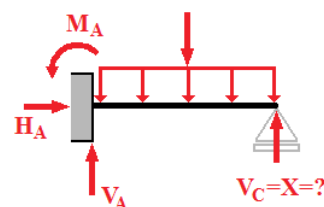


Zadanie rozwiążemy w następujący sposób:

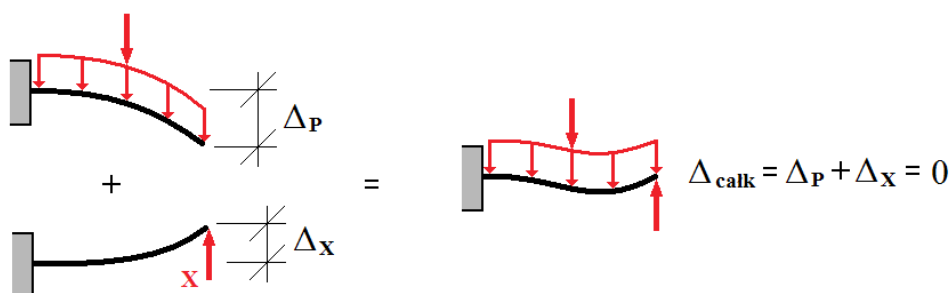
- Mamy 4 niewiadome reakcje podporowe, do wyznaczenia których mamy do dyspozycji jedynie 3 równania równowagi. Zadanie jest zatem statycznie niewyznaczalne.
- „Statically” niewyznaczalność oznacza, że do wyznaczenia reakcji konieczna jest znajomość deformacji układu. Możemy zatem zwolnić tyle reakcji podporowych, aby układ stał się statycznie wyznaczalny i zastąpić je pewnymi nieznanymi siłami uogólnionymi (reakcjami). Dodatkowe równania otrzymamy z warunku zerowania się odpowiadających im przemieszczeń uogólnionych, które możemy obliczyć np. na podstawie wzoru Maxwella-Mohra.

Powyższy schemat rozwiązania stanowi podstawę tzw. „**metody sił**”

- podstawowej metody rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych. W naszym przypadku mamy tylko jedną nadliczbową reakcję - tzw. „hiperstatyczną”. Możemy ją wybrać dowolnie. Niech będzie to reakcja na prawej podporze przegubowej - oznaczmy ją przez  $X$ . Odpowiadające jej przemieszczenie uogólnione  $\Delta$  to ugięcie pionowe belki w tym punkcie. Zwalniamy więc tę podporę i zastępujemy ją nieznaną siłą reakcji. Wyznaczamy teraz ugięcie belki w punkcie C i tak dobieramy wielkość reakcji, aby przemieszczenie to było równe 0. Ponieważ układ jest liniowo-sprężysty, stąd:



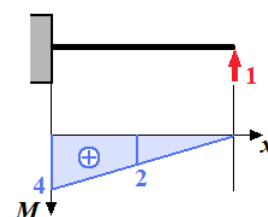
- przemieszczenie możemy wyznaczyć osobno od obciążenia zewnętrznego (tzw. „**stan P**”) oraz od obciążenia nieznaną siłą reakcji (tzw. „**stan X**”),



- dla uproszczenia obliczeń, możemy wyznaczyć przemieszczenie  $\delta$  od jednostkowej wartości hiperstatycznej  $X=1$ , zaś przemieszczenie od siły  $X$  (z uwagi na liniowość układu) będzie odpowiednio proporcjonalnie większe  $\Delta_X = X \cdot \delta$ .

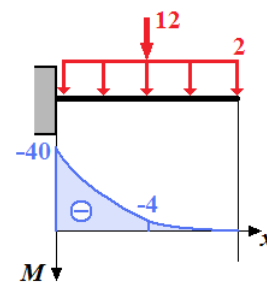
Stan  $X=1$

$$\delta = \int_s \frac{\bar{M} \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{l} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{4} \\ \text{+} \\ \text{4} \end{array} \right\} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \right] = \frac{64}{3EI}$$



Stan  $P$

$$\Delta_P = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx =$$



$$= \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{2} \\ \text{---} \\ \text{40} \\ \text{-} \\ \text{4} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{4} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} \end{array} \right\} = \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{40} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{qL}^2=1 \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{4} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{qL}^2=1 \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \begin{array}{cccccccc} \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{40} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{4} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{40} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{4} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{4} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{1} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{1} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{4} \\ \text{-} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{+} \\ \text{---} \\ \text{1} \\ \text{---} \\ \text{2} \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 40 - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 40 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = -\frac{144}{EI} \right]$$

Przemieszczenie całkowite:  $\Delta_{calc} = \Delta_X + \Delta_P = X \cdot \delta + \Delta_P$

Nieznana reakcja podporowa:  $\Delta_{calc} = 0 \Rightarrow V_C = X = -\frac{\Delta_P}{\delta} = \frac{27}{4} = 6,75$

Pozostałe reakcje wyznaczamy z równań równowagi:

$$\Sigma X = 0: \Rightarrow H_A = 0$$

$$\Sigma Y = 0: \Rightarrow V_A = 4 \cdot 2 + 12 - V_C = 13,25$$

$$\Sigma M_A = 0: \Rightarrow M_A = 12 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - V_C \cdot 4 = 13$$

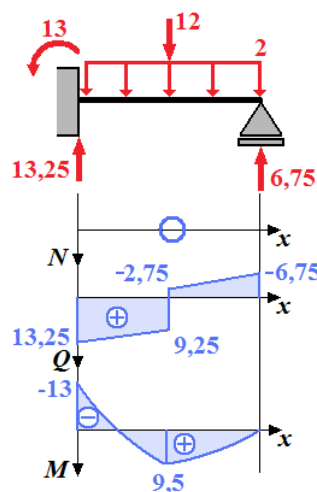
Siły przekrojowe:

Przedział AB  $x \in (0 ; 2)$

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = 13,25 - 2x \\ M(x) = -13 + 13,25x - x^2 \end{cases}$$

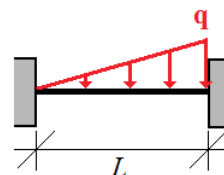
Przedział BC  $x \in (2 ; 4)$

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ Q(x) = 13,25 - 2x - 12 \\ M(x) = -13 + 13,25x - x^2 - 12(x-2) \end{cases}$$



### ZADANIE 15.16

Dana jest symetryczna belka długości  $L$ , obustronnie utwierdzona, obciążona liniowo zmiennym obciążeniem ciągłym jak na rysunku. Korzystając z twierdzenia Menabrei (pomijając wpływ sił poprzecznych) wyznaczyć reakcje podporowe.

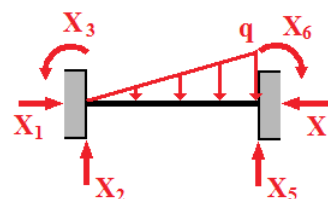


W sumie obciążenie zewnętrzne równoważą 6 nieznanymi reakcjami podporowymi. Oznaczmy je kolejno przez  $X_1, X_2, \dots, X_6$ . Trzy z nich możemy uzależnić od pozostałych dzięki równaniom równowagi. Przykładowo:

$$\Sigma X = 0: \quad \Rightarrow \quad X_4 = X_1$$

$$\Sigma Y = 0: \quad \Rightarrow \quad X_5 = \frac{qL}{2} - X_2$$

$$\Sigma M_B = 0: \quad \Rightarrow \quad X_6 = \frac{qL^2}{6} + X_3 - X_2 \cdot L$$



Ponieważ układ nie jest poddany zmianie temperatury, to – z uwagi na założenie o małych przemieszczeniach – możemy przyjąć  $X_1 = X_4 = 0$ . Pozostałe 4 reakcje (w tym 2 niezależne) wyznaczymy na podstawie twierdzenia Menabrei o minimum energii sprężystej. Pomijając wpływ sił poprzecznych, całkowita energia sprężysta układu może być wyrażona przez funkcję rozkładu momentów zginających – ta zaś może być wyznaczona przy użyciu zaledwie dwóch spośród czterech niewiadomych, np. redukując układ sił z lewej strony:

$$\text{Rozkład momentów zginających: } M(x) = -X_3 + X_2 \cdot x - \frac{q}{6L} \cdot x^3$$

Całkowita energia sprężysta:

$$\begin{aligned} U &= \int_s \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left( -X_3 + X_2 \cdot x - \frac{q}{6L} \cdot x^3 \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^L \left( X_3^2 + X_2^2 \cdot x^2 + \frac{q^2}{36L^2} \cdot x^6 - 2X_2 X_3 \cdot x + \frac{2q}{6L} X_3 \cdot x^3 - \frac{2q}{6L} X_2 \cdot x^4 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2EI} \left[ X_3^2 x + X_2^2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{q^2}{36L^2} \cdot \frac{x^7}{7} - X_2 X_3 \cdot x^2 + \frac{q}{12L} X_3 \cdot x^4 - \frac{q}{15L} X_2 \cdot x^5 \right]_0^L = \\ &= \frac{1}{2EI} \left[ X_3^2 L + X_2^2 \cdot \frac{L^3}{3} + \frac{q^2 L^5}{252} - X_2 X_3 \cdot L^2 + \frac{qL^3}{12} X_3 - \frac{qL^4}{15} X_2 \right] \end{aligned}$$

Zgodnie z twierdzeniem Menabrei, całkowita energia sprężysta osiąga minimum dla rzeczywistych wartości nieznanymi hiperstatycznych. Poszukujemy więc minimum funkcji dwóch zmiennych – w tym celu należy wyznaczyć takie ich wartości, dla których pochodna energii przyjmuje wartość zero:

$$\frac{\partial U}{\partial X_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2 \cdot \frac{2L^3}{3} - X_3 \cdot L^2 - \frac{qL^4}{15} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad X_3 \cdot 2L - X_2 \cdot L^2 + \frac{qL^3}{12} = 0$$

Uzyskujemy w ten sposób układ dwóch równań liniowych na dwie nieznanne hiperstatyczne – pozostałe reakcje wyznaczamy z równań równowagi:

$$\begin{cases} 10LX_2 - 15X_3 = qL^2 \\ 12LX_2 - 24X_3 = qL^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = \frac{3}{20}qL \\ X_3 = \frac{1}{30}qL^2 \end{cases} \quad \begin{cases} X_5 = \frac{qL}{2} - X_2 = \frac{7}{20}qL \\ X_6 = \frac{qL^2}{6} + X_3 - X_2 \cdot L = \frac{1}{20}qL^2 \end{cases}$$