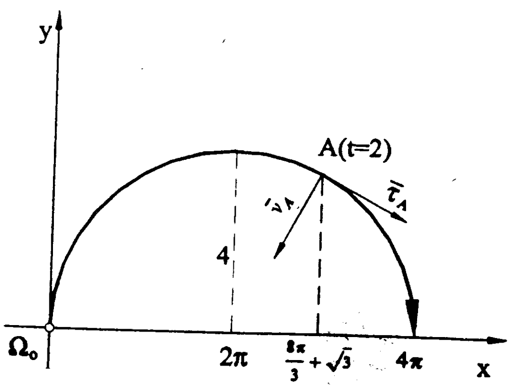
Punkt materialny A porusza się po krzywej (rys. 1.13 a) o równaniu:

$$\bar{r}(\lambda): \begin{cases} x = 2(\lambda - \sin\lambda) \\ y = 2(1 - \cos\lambda), \qquad 0 \le \lambda \le 2\pi \end{cases}$$

ruchem $s(t) = t^4 - 4$.

Punkt początkowy Ω_0 toru jest dla $\lambda = 0$. Orientacja toru dodatnia dla $\lambda > 0$. Wyznaczyć $\bar{v}$ i $\bar{a}$ dla $t = 2$.



Jest to naturalny opis ruchu punktu, gdyż podane są: tor, orientacja toru, punkt początkowy toru i równanie ruchu $s = s(t)$. Punkt początkowy toru — $\Omega_0(x = 0,\ y = 0)$. Dla $t = 2$:

$$s(t = 2) = 2^4 - 4 = 12 = s_A$$

Wyznaczamy położenie punktu A na torze dla $t = 2$

$$12 = \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sqrt{4(1 - \cos\lambda)^2 + 4\sin^2\lambda}\, d\lambda =$$

$$= 2\int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sqrt{2(1 - \cos\lambda)}\, d\lambda = 2\int_{0}^{\lambda_A} \sqrt{4\sin^2\frac{\lambda}{2}}\, d\lambda = 4\int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \left|\sin\frac{\lambda}{2}\right| d\lambda =$$

$$= 4\int_{\lambda=0}^{\lambda_A} \sin\frac{\lambda}{2}\, d\lambda = 4\left(-2\cos\frac{\lambda}{2}\right)\Bigg|_0^{\lambda_A} = -8\cos\frac{\lambda_A}{2} + 8 = 12$$

Stąd

$$\lambda_A = \frac{4}{3}\pi \to A\left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}, 3\right)$$

W położeniu A wyznaczamy wersory $\bar{\tau}_A$ i $\bar{n}_A$ oraz promień ρ_A koła krzywiznowego. Liczymy zatem:

wektor styczny do toru i jego wersor

$$\bar{r}' = \left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}\right) = (2 - 2\cos\lambda, 2\sin\lambda)$$

$$\bar{r}'_A = \bar{r}'\left(\lambda_A = \frac{4}{3}\pi\right) = (3, -\sqrt{3}), \qquad |\bar{r}'_A| = 2\sqrt{3}$$

$$\bar{\tau}_A = \frac{\bar{r}'_A}{|\bar{r}'_A|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

wersor $\bar{\nu}_A$ kierunku normalnego głównego

$$\bar{\nu}_A \cdot \bar{\tau}_A = 0 \Rightarrow \bar{\nu}_A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

— promień koła krzywiznowego

$$\rho_\varkappa = \frac{|\bar{r}'|^3}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}$$

$$\bar{r}'' = \left(\frac{d^2x}{d\lambda^2}, \frac{d^2y}{d\lambda^2}\right) = (2\sin\lambda, 2\cos\lambda)$$

$$\bar{r}''_A = \bar{r}''\left(\lambda_A = \frac{4}{3}\pi\right) = (-\sqrt{3}, -1)$$

$$\bar{r}'_A \times \bar{r}''_A = (0, 0, -6) \Rightarrow |\bar{r}'_A \times \bar{r}''_A| = 6$$

$$\rho_A = \frac{(2\sqrt{3})^3}{6} = 4\sqrt{3}$$

Możemy teraz odpowiedzieć na postawione pytania:

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau} = 4t^3\bar{\tau}$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}(t = 2) = 32\bar{\tau}_A = (16\sqrt{3},\ -16)$$

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_\varkappa}\bar{\nu} = 12t^2\bar{\tau} + \frac{16t^6}{\rho_\varkappa}\bar{\nu}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}(t = 2) = 48\bar{\tau}_A + \frac{256}{3}\sqrt{3}\bar{\nu}_A = \left(-\frac{56}{3}\sqrt{3},\ -152\right)$$