RUCH PRĘTA PRYZMATYCZNEGO W POWIETRZU I W WODZIE

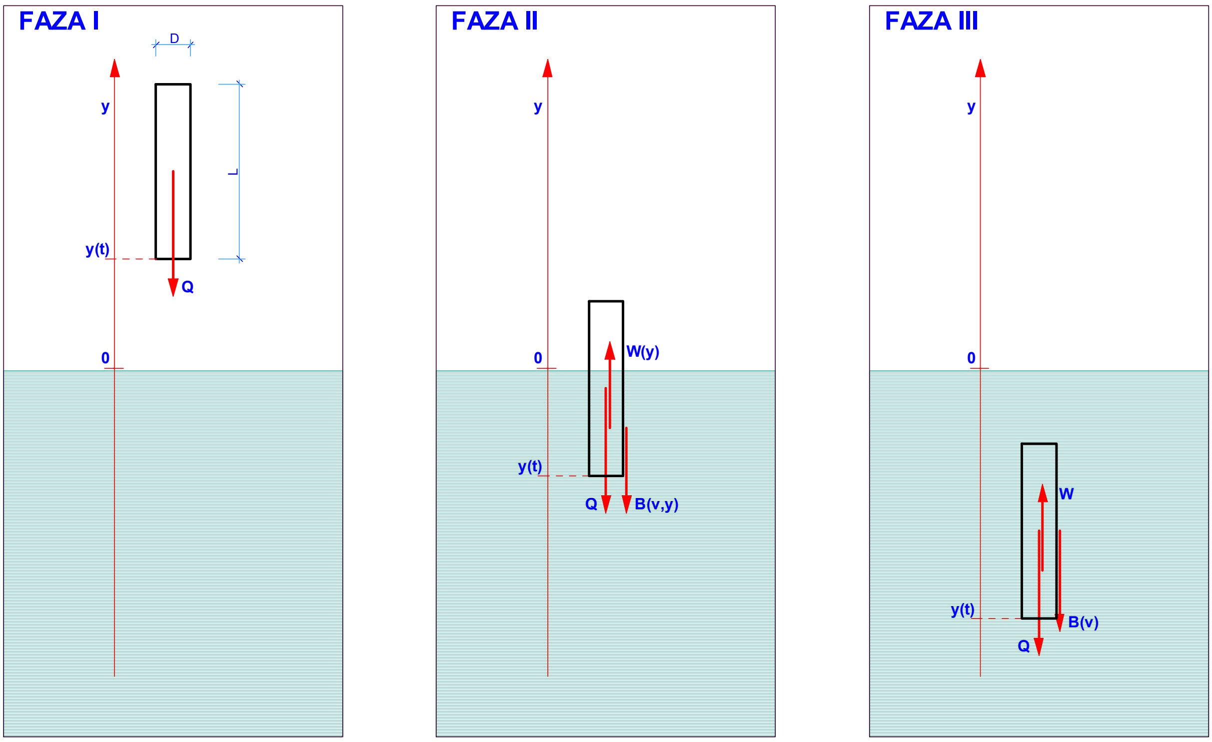
W opracowaniu przeanalizowano problem ruchu pręta w rzucie pionowym przy następujących założeniach:

1. Ruch rozpoczyna się w powietrzu przy ustalonych warunkach początkowych;
2. Podczas ruchu w powietrzu na pręt działa wyłącznie siła grawitacji;
3. Drugą fazą ruchu jest ruch w wodzie przy niecałkowitym zanurzeniu;
4. Siły działające na pręt w drugie fazie ruchu to:
   - siła grawitacji,
   - siła wyporu o zmiennej wartości,
   - opór ośrodka wodnego zależny od prędkości i powierzchni kontaktu z wodą;
5. Trzecią fazą ruchu jest ruch w wodzie przy całkowitym zanurzeniu;
6. Siły działające na pręt w trzeciej fazie ruchu to:
   - siła grawitacji,
   - siła wyporu o stałej wartości,
   - opór ośrodka wodnego zależny od prędkości.

Dane:

- długość pręta	L = 5.0 m
- średnica pręta	D = 1.0 m
- gęstość materiału	ρ = 600 kg/m^3
- gęstość wody	ρ_w = 1000 kg/m^3
- współczynnik oporu w wodzie	l = 0.000 kg/s·m^2 (nie uwzględniono oporu powierzchni czołowej)

Warunki początkowe ruchu zostaną przyjęte w dalszej części opracowania w zależności od różnych sytuacji obliczeniowych.



Rys. 1. Pręt w kolejnych fazach ruchu

Oznaczenia:
y(t) - aktualne położenie (współrzędna dolnego końca pręta)
Q - siła ciężkości
W - stała siła wyporu w trzeciej fazie ruchu
W(y) - zmienna siła wyporu w drugiej fazie ruchu
B(v) - zmienna siła oporu ośrodka w trzeciej fazie ruchu
B(v,y) - zmienna siła oporu ośrodka w drugie fazie ruchu

Ruch pręta bez uwzględnienia oporu ośrodka wodnego

Faza I – ruch w powietrzu

Przyjęto warunki początkowe ruchu: $y(0) = h_0, \quad \dot{y}(0) = v_0$

Równanie ruchu: $m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g$ (1)

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązanie ma postać:

$$\dot{y} = -g \cdot t + C_1 \tag{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2 \tag{3}$$

Warunki początkowe ruchu pozwalają wyznaczyć stałe całkowania: $C_1 = v_0, \quad C_2 = h_0$.

Równanie ruchu w fazie I ma ostatecznie postać:

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0 \tag{4}$$

Faza I trwa do momentu zetknięcia się dolnego końca pręta z powierzchnią wody. Położenie oraz prędkość w momencie zakończenia fazy I są warunkami początkowymi fazy II ruchu. Czas odpowiadający końcowej chwili fazy I można obliczyć z równania (4) podstawiając *y* = 0. Spośród dwóch pierwiastków otrzymanego równania kwadratowego należy wybrać ten, który ma sens fizyczny.

$$t_1 = \frac{-v_0 - \sqrt{{v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot h_0}}{-g} \qquad t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2 \cdot g \cdot h_0}}{-g}$$

Czas końca fazy I $t_{k1} = \max(t_1, t_2)$.

Prędkość końcową można obliczyć z równania (2) dla czasu $t = t_{k1}$:

$$v_{k1} = -g \cdot t_{k1} + v_0$$

Faza II – ruch w wodzie przy niecałkowitym zanurzeniu

W fazie II na pręt działają siły:

siła ciężkości $Q = m \cdot g = L \cdot A \cdot \rho \cdot g$ (*A* – powierzchnia przekroju) (5)

siła wyporu $W = -y \cdot A \cdot \rho_w \cdot g$ (6)

Równanie ruchu ma postać:

$$m \cdot \ddot{y} = -Q + W \tag{7}$$

$$L \cdot A \cdot \rho \cdot \ddot{y} = -L \cdot A \cdot \rho \cdot g - y \cdot A \cdot \rho_w \cdot g \tag{8}$$

$$\ddot{y} = -g - \frac{\rho_w \cdot g}{L \cdot \rho} \cdot y \tag{9}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia $\omega^2 = \frac{\rho_w \cdot g}{L \cdot \rho}$ otrzymujemy równanie ruchu w postaci niejednorodnego równania różniczkowego o stałych współczynnikach:

$$\ddot{y} + \omega^2 \cdot y = -g \tag{10}$$

Rozwiązaniem równania (10) jest suma całki ogólnej równania jednorodnego oraz całki szczególnej równania niejednorodnego. Całka ogólna równania jednorodnego ma postać:

$$y_j = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{11}$$

Przewidując całkę szczególną równania niejednorodnego w postaci wielomianu pierwszego stopnia otrzymuj się:

$$y_n = -\frac{g}{\omega^2} \tag{12}$$

Rozwiązanie równania (10) ma postać:

$$y = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{g}{\omega^2} \tag{13}$$

$$\dot{y} = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{14}$$

Z równań (13, 14), po podstawieniu warunków początkowych ruchu w fazie II wyznacza się stałe całkowania:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t_{k1}) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t_{k1}) &= \frac{g}{\omega^2} \\ -C_1 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) &= v_{k1} \end{aligned} \tag{15}$$

$$M_{C1} = \begin{vmatrix} \frac{g}{\omega^2} & \sin(\omega \cdot t_{k1}) \\ v & \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_{k1}) \end{vmatrix}, \qquad M_{C2} = \begin{vmatrix} \cos(\omega \cdot t_{k1}) & \frac{g}{\omega^2} \\ -\omega \cdot \sin(\omega \cdot t_{k1}) & v \end{vmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} \cos(\omega \cdot t_{k1}) & \sin(\omega \cdot t_{k1}) \\ -\omega \cdot \sin(\omega \cdot t_{k1}) & \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_{k1}) \end{vmatrix}, \qquad C_1 = \frac{M_{C1}}{M} \qquad C_2 = \frac{M_{C2}}{M} \tag{16}$$

Ze względu na dalsze obliczenia wygodnie jest wprowadzić nowe stałe całkowania stosując podstawienie:

$$C_1 = A \cdot \sin\varphi \qquad C_1 = A \cdot \cos\varphi \tag{17}$$

Wtedy

$$A = \sqrt{C_1{}^2 + C_2{}^2} \qquad \varphi = a\tan\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \tag{18}$$

Po wprowadzeniu nowych stałych całkowania równania (13, 14) mają postać:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) - \frac{g}{\omega^2} \tag{19}$$

$$\dot{y} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \tag{20}$$

Faza II trwa do chwili, gdy pręt całkowicie zanurzy się w wodzie. Możliwa jest jednak sytuacja, w której maksymalne zanurzenie pręta będzie mniejsze od jego długości. Wtedy faza II będzie trwała do całkowitego wynurzenia się pręta. Z uwagi na przyjęcie założenia braku oporu wody tylko te dwie sytuacje są możliwe. W dalszym ciągu należy sprawdzić, która sytuacja wystąpi. Można tego dokonać, podstawiając do równania (19) wartość *y* odpowiadającą całkowitemu zanurzeniu pręta. Jeśli równania (19) ma wtedy rozwiązanie to faza II zakończy się po całkowitym zanurzeniu pręta, po czym nastąpi faza III. W przeciwnym wypadku faza II zakończy się po całkowitym wynurzeniu pręta a faza III nie nastąpi nigdy.

Załóżmy, że równanie (19), po podstawieniu $y = -L$ (całkowite zanurzenie) ma rozwiązanie. Z uwagi na okresowość funkcji sinus rozwiązań równania (19) jest nieskończenie wiele. Po przekształceniu równania (19) do postaci

$$\sin(\omega \cdot t + \varphi) = \frac{g}{A \cdot \omega^2} - \frac{L}{A} \tag{21}$$

można stwierdzić, że to równanie jest spełnione gdy

$$\omega \cdot t + \varphi + 2n \cdot \pi = a\sin\left(\frac{g}{A \cdot \omega^2} - \frac{L}{A}\right) \tag{22}$$

oraz

$$-\omega \cdot t - \varphi + \pi + 2n \cdot \pi = a\sin\left(\frac{g}{A \cdot \omega^2} - \frac{L}{A}\right) \tag{23}$$

Spośród rozwiązań równań (22, 23)

$$t_{k2} = -\frac{1}{\omega} \cdot \left[a\sin\left(\frac{g}{A \cdot \varpi^2} - \frac{L}{A} \right) + \varphi - \pi - 2n \cdot \pi \right] \tag{24}$$

$$t_{k2} = \frac{1}{\omega} \cdot \left[a\sin\left(\frac{g}{A \cdot \varpi^2} - \frac{L}{A} \right) - \varphi - 2n \cdot \pi \right] \tag{25}$$

należy wybrać to, które odpowiada warunkom ruchu wynikającym z równań (19, 20):

$$y(t_{k2}) = A \cdot \sin(\omega \cdot t_{k2} + \varphi) - \frac{g}{\omega^2} = -L \tag{26}$$

$$\dot{y}(t_{k2}) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t_{k2} + \varphi) = v_{k2} < 0 \tag{27}$$

Faza III – ruch w wodzie po całkowitym zanurzeniu

W fazie III na pręt działają siły:

siła ciężkości $\quad Q = m \cdot g = L \cdot A \cdot \rho \cdot g \quad$ (28)

siła wyporu $\quad W = L \cdot A \cdot \rho_w \cdot g \quad$ (29)

Równanie ruchu ma postać:

$$m \cdot \ddot{y} = -Q + W \tag{30}$$

$$L \cdot A \cdot \rho \cdot \ddot{y} = -L \cdot A \cdot \rho \cdot g + L \cdot A \cdot \rho_w \cdot g \tag{31}$$

$$\ddot{y} = -g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right) \tag{32}$$

Po całkowaniu równania (32) otrzymuje się

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right) \cdot t^2 + v_{03} \cdot t + y_{03} \qquad \dot{y} = -g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right) \cdot t + v_{03} \tag{33}$$

Stałe całkowania można wyznaczyć wykorzystując warunki początkowe ruchu, które mają postać

$$y(t_{k2}) = -L \qquad \dot{y}(t_{k2}) = v_{k2} \tag{34}$$

Podstawiając odpowiednie wartości do równań ruchu (33) otrzymuje się

$$v_{03} = v_{k2} + t_{k2} \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right) \qquad y_{03} = y_{k2} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right) \cdot t_{k2}{}^2 - v_{03} \cdot t_{k2} \tag{35}$$

Faza III trwa do chwili, gdy podczas ruchu w górę górny koniec pręta osiągnie powierzchnię wody. Czas odpowiadający tej chwili oraz prędkość można wyznaczyć z równań (33) podstawiając $y = -L$.

$$\Delta = v_{03}{}^2 + 2 \cdot g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right) \cdot (y_{03} + L) \qquad t_{k3} = \max\left(\frac{-v_{03} - \sqrt{\Delta}}{-g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right)}, \frac{-v_{03} + \sqrt{\Delta}}{-g \cdot \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho} \right)} \right) \tag{36}$$

Po tej chwili rozpoczyna się kolejna faza ruchu odpowiadająca opisanej wcześniej fazie II. Przedstawiony problem, po założeniu warunków początkowych ruchu h_0 = 5 m, v_0 = 0 m/s, został rozwiązany w programie Mathcad i przedstawiony na filmie „rod in the water.avi”.