stefan piechnik

mechanika materiałów

styczeń 2006

WSTĘP

Dział fizyki zajmujący się, w świecie makroskopowym, badaniem oddziaływań między ciałami materialnymi, których wynikiem jest ruch ciał i ich deformacja, nazywamy *mechaniką*.

Mechanika stanowi podstawę licznych zastosowań technicznych. Jednym z nich jest *mechanika budowli*, czyli dział mechaniki zajmujący się wyznaczaniem sił powstających wewnątrz materiału i przemieszczeń występujących w konstrukcjach budowlanych rozpatrywanych jako całość, poddanych działaniu obciążeń (statycznych lub dynamicznych), określaniem wartości bezpiecznych obciążeń —z punktu widzenia wytrzymałości, sztywności lub stateczności konstrukcji — oraz optymalnym kształtowaniem konstrukcji..

Poprawnie zaprojektowana konstrukcja przenosząca zadane obciążenia i znajdująca się w określonych fizyczno-chemicznych i termodynamicznych warunkach zewnętrznych powinna być, z reguły, odpowiednio sztywna, wytrzymała, stateczna, długotrwała i ekonomiczna. Innymi słowy żądamy, aby przemieszczenia poszczególnych punktów konstrukcji nie były zbyt duże i nie przewyższały z góry zadanych wartości (sztywność), aby siły spójności materiału nie zostały zerwane, wreszcie by konstrukcja pracowała w równowadze trwałej (stateczność). Wymagania te mogą być niekiedy inaczej formułowane, np. wtedy, gdy zależeć nam będzie na tym, aby punkty bryły doznawały dużych przemieszczeń (np. w procesie tłoczenia blach karoserii samochodowych czy przy projektowaniu powłok pneumatycznych). Czasem projektować będziemy tak, aby elementy nie były zbyt wytrzymałe (np. zawory bezpieczeństwa lub tzw. „słabe łącze" w postaci ścinanych kołków, czopów czy sworzni, czyli takich aby ew. awaria była zlokalizowana do niewielkiego i łatwo wymienialnego elementu). W ogólności chodzić będzie o kontrolę wymienionych zjawisk; a to wymaga ich poznania, a następnie zbudowania opisu pozwalającego na prognozowanie zachowania się konstrukcji.

Biorąc pod uwagę różnorodność wznoszonych budowli, różnorodność materiałów i ich własności, różnorodność obciążenia i oddziaływań środowisk, w których konstrukcja pracuje, może się wydawać, że niemożliwe jest znalezienie racjonalnego rozwiązania postawionego zadania. Mimo, że zadanie jest trudne, potrafimy jednak sformułować pewne ogólne prawa pozwalające analizować prace konstrukcji. Aby uczynić taką analizę możliwą, musimy dokonać pewnych idealizacji, uproszczeń w jej obrazie.

Mechanikę budowli, w sekwencji działów mechaniki technicznej, bezpośrednio poprzedzają: *mechanika teoretyczna* (mechanika bryły sztywnej) oraz *mechanika ośrodków ciągłych.*

Ta druga, z kolei dzieli się na mechanikę płynów oraz mechanikę ciał stałych odkształcalnych. Ten ostatni dział mechaniki technicznej zajmuje się ogólnymi prawami powstawania i wzrastania (z upływem czasu) sił wewnętrznych, przemieszczeń i deformacji ciał materialnych znajdujących się w różnych warunkach termodynamicznych i fizykochemicznych.

W przypadku mechaniki ciał stałych podobnie jak w innych dziedzinach fizyki, będziemy często uciekali się do pewnych założeń upraszczających i idealizacji, ograniczając się do niektórych grup materiałów, obciążeń czy warunków zewnętrznych. Uproszczenia te decydują o wyodrębnieniu pewnych działów tej nauki. W przypadku, gdy dotyczą one własności mechanicznych materiałów, oraz powstawania i wzrastania sił i deformacji zmieniających się lub nie z upływem czasu. Działami tymi są:

- teoria sprężystości,
- teoria plastyczności,
- reologia.

Nie wymieniliśmy tu nauki „mechanika materiałów". Nie wymieniliśmy też nazwy „wytrzymałość materiałów", pod którą zawiera się także treść niniejszej książki. Nie wymieniliśmy tych nazw, z tej przyczyny, że nauka ta obejmuje te same zagadnienia, co teoria sprężystości, teoria plastyczności i reologia, zajmuje się jednak nie tylko ścisłymi ich rozwiązaniami, ale przede wszystkim uzyskiwaniem prostych wzorów, łatwych do stosowania w praktyce i dających niewielkie, kilkuprocentowe różnice w stosunku do rozwiązań ścisłych.

W tytule podręcznika przyjęliśmy nazwę *mechanika materiałów* na przekór temu, że pod nazwą *wytrzymałość materiałów* wykładana jest ta nauka praktycznie na wszystkich wydziałach uczelni technicznych i jest ona w zasadzie rozumiana jednoznacznie, choć niezgodnie z semantyczną zawartością swojej nazwy.

Niezgodnie, albowiem, po pierwsze, w nazwie tej mówi się o wytrzymałości, a więc o możliwości przeniesienia oddziaływań mechanicznych (obciążeń), czyli należałoby się spodziewać tu tylko rozważań dotyczących zjawiska zniszczenia (poprzez pękanie, kruszenie czy uplastycznienie). A w rzeczywistości mówić będziemy także i o podatności materiału na deformację, traktując ten problem jako bardzo istotny. Ponadto zajmować się też będziemy ustaleniem rodzaju równowagi (stateczna, niestateczna, obojętna), w jakim mogą się znajdować elementy obciążonej konstrukcji.

Zachowując nazwę wytrzymałość materiałów, siłą rzeczy popadamy w tautologię stwierdzając, że wytrzymałość materiałów jest nauką o wytrzymałości. Ponadto pojęcia sztywności i stateczności wymagają wcześniejszego sformułowania szeregu zasad i wprowadzenia wielu pojęć podstawowych. Zwykle w tym miejscu przytacza się przykłady prostych konstrukcji, które ulegają deformacji, utracie stateczności czy zniszczeniu, odwołując się w ten sposób do objaśnienia poprzez przykład.

Po drugie – nazwa ta stwarza mylne wrażenie, że zajmować się będziemy wyłącznie materiałami, a nie elementami konstrukcji z nich wykonanymi, i to w dodatku wykonanym z różnych materiałów (nauka o materiałach nosi nazwę *inżynierii materiałowej*).

Nazwa *mechanika materiałów* jest zgodna z semantyką i bardziej oddaje sens tej nauki występującej w triadzie obok *mechaniki teoretycznej i mechaniki konstrukcji*..

Mimo, że problem nazwy nie jest najważniejszy to jednak już w 1947 T. M. Huber zatytułował swą książkę poświęconą tej nauce: „stereomechanika techniczna" (nazwa ta wg Nowej Encyklopedii Polskiej (2004) czy wg Słownika Wyrazów Obcych (Wyd.„Europa") jest synonimem wytrzymałości materiałów). W 1972 roku ukazało się kolejne wydanie jednego z najpopularniejszych w świecie podręczników S. Timoszenki i J. Gere pod nazwą „Mechanics of Materials" a nie jak dotychczas „Strength of Materials".

Coraz częściej, również u nas, spotykamy się z nazwą *mechanika materiałów* (w 1981 roku, PWN wydało książkę N. Malinina i J. Rżyski pod takim właśnie tytułem), choć nie jest łatwo nie czynić zadość historii rezygnując z nazwy *wytrzymałość,* tak bowiem nazywano tę naukę od przełomu XVI i XVII wieku, a więc od okresu, który uznajemy za początek rozwoju tej gałęzi wiedzy. Mówiąc ściślej, początek jej wiążemy z nazwiskiem Galileusza (1564–1642), którego pierwsze prace zapoczątkowały rozwój tej dziedziny nauki.

Na zakończenie dodajmy, że w innych językach sprawa nazwy tej gałęzi nauki nie jest także jednoznacznie rozwiązana. Najbliższa nazwie *wytrzymałość materiałów* jest nazwa w języku niemieckim – *Festigkeitlehre*, podobnie w języku angielskim jeszcze używa się – *Strength of Materials* obok *Mechanics of Materials*, czy szwedzkim – *Hållfasthetslãra*. Po francusku mamy już jednak do czynienia raczej z „oporem" materiału – *Resistance des materiaux*, podobnie jak w językach słowiańskich: serbskim – *otpornost materijala*, rosyjskim – *soprotiwlijenie matieriałow.*

Część 1

podstawowe pojęcia mechaniki materiałów

1 PODSTAWOWE POJĘCIA MECHANIKI

1.1 KONSTRUKCJA - SCHEMAT OBLICZENIOWY - KONSTRUKCJA

Wspomniana we wstępie idealizacja będzie dotyczyła czterech elementów składających się na obraz konstrukcji, a mianowicie:

- materiału, z jakiego konstrukcja jest wykonana,
- geometrii konstrukcji,
- połączeń z innymi konstrukcjami lub/oraz z jej posadowieniem,
- obciążenia.

1.1.1 ZAŁOŻENIA ODNOŚNIE DO DO MATERIAŁU

Odnośnie do materiału podstawowym założeniem jest przyjęcie, że ciało jest tzw. *continuum materialnym*, tzn. że każdy punkt geometryczny ciała ma przypisaną masę, która jest w sposób ciągły rozłożona w objętości konstrukcji. Założenie to jest poczynione w związku z pewną skalą obserwacji, obowiązującą w inżynierii. Jest, bowiem oczywiste, że jeśli skala ta będzie dostatecznie mała (tzn., jeśli spojrzymy na materiał w dużym powiększeniu), to każdy materiał jest nieciągły. Najlepszym przykładem jest tutaj beton, którego oględziny gołym nawet okiem, ale z niewielkiej odległości ujawnią pustki i nieciągłości rozkładu materii. Ten sam jednak beton oglądany jako fragment konstrukcji w pewnym oddaleniu stwarza wrażenie idealnie gładkiego, równomiernie „wypełniającego" konstrukcję. Dla innych materiałów należy użyć doskonalszych narzędzi obserwacji (np. lupy dla kompozytów lub mikroskopu dla stopów metali). Uwzględniając dyskretną budowę materii – każdy materiał jest nieciągły. Powyższe założenie jest usprawiedliwione, gdy przedmiotem naszego zainteresowania będzie konstrukcja inżynierska o wymiarach od kilku centymetrów do kilku kilometrów.

Przyjjmiemy zatem za obiekt badań *punkt materialny*, tj. punkt geometryczny, któremu przypisano masę. Poprawniej byłoby powiedzieć, że ciało będziemy rozważać jako złożone z *cząsteczek*. Ponieważ cząsteczkę traktować będziemy w sensie punktu materialnego mechaniki Newtona, stąd też wygodniej będzie posługiwać się pojęciem punktu materialnego.

Z innych założeń, które będziemy przyjmować są: *jednorodność* (niezależność właściwości materiału od wyboru punktu ciała), *izotropia* (niezależność tych własności od wyboru kierunku) i *izonomia* (niezależność od wyboru zwrotu na pomyślanym kierunku). Nasze doświadczenia codzienne pokazują, że materiały rzeczywiste bardzo często cech tych nie wykazują. I tak własności betonu są inne w punktach, gdzie znajduje się stwardniały zaczyn cementowy, a inne tam, gdzie jest kruszywo (*niejednorodność*); własności drewna – a także większości kompozytów – są inne wzdłuż, a inne w poprzek włókien (*anizotropia*); wreszcie wiele materiałów (beton, drewno) ma inne własności przy ściskaniu, a inne przy rozciąganiu (*anizonomia*). Najbliższe naszym założeniom są stopy metali; dla innych materiałów konieczne będą odstępstwa od poszczególnych założeń i jeśli zostaną one poczynione, to każdorazowo będzie to wyraźnie podkreślone.

Wreszcie przyjmiemy, że materiały będą określane zarówno przez typ równań (tzw. *związków fizycznych*, inaczej *równań konstytutywnych*), którymi mogą być równania algebraiczne, różniczkowe lub całkowe, jak i przez wartości stałych (*stałe materiałowe*), jakie w tych równaniach mogą wystąpić.

Ogromna większość materiałów charakteryzuje się tym, że konstrukcje z nich wykonane wracają do kształtu pierwotnego po zdjęciu obciążeń (jeśli te obciążenia nie przekraczają pewnej wartości granicznej), i w tych przypadkach za punkt wyjścia przyjmiemy, że równania fizyczne mają postać funkcji algebraicznych (jednojednoznaczne przyporządkowanie zmiennych oznacza niezależność stanu od wcześniejszej historii – w tym przypadku historii obciążenia).

Jest to więc założenie o *sprężystości* materiału. Dokładniej mówiąc, będzie to *liniowa sprężystość* opisana liniowymi funkcjami algebraicznymi. Różne materiały będą scharakteryzowane różnymi wartościami stałych materiałowych figurujących w tych funkcjach. I tu, podobnie jak w przypadku wcześniejszych założeń odnośnie do materiału, odstępstwa od tych założeń będą każdorazowo zaznaczane. A odstępstwa będą konieczne, jako że wiele materiałów wykazuje trwałe odkształcenia bądź to w wyniku oddziaływania odpowiednio dużych obciążeń (*plastyczność*), bądź w wyniku zależności odkształceń od czasu (np. beton, który jak wiemy „starzeje się” z czasem).

1.1.2 ZAŁOŻENIA ODNOŚNIE DO GEOMETRII

Założenia te polegają w zasadzie na umownym wyodrębnieniu trzech typów konstrukcji:

- *konstrukcje prętowe*. Rozróżniać będziemy dwa rodzaje prętów: *pręty lite* tj. takie bryły, których jeden wymiar - długość) jest znacznie większy od dwóch pozostałych charakteryzujących przekrój oraz *pręty cienkościenne*, których jeden wymiar charakteryzujący przekrój (grubość) jest znacznie mniejszy od drugiego wymiaru przekroju, a ten z kolei znacznie mniejszy od długości.
- *konstrukcje powierzchniowe*, które mają dwa wymiary (charakteryzujące powierzchnię) znacznie większe od trzeciego (grubość). W obrębie tej grupy konstrukcji wyróżnia się zwykle *powłoki* (powierzchnia środkowa jest dowolną powierzchnią, w tym także powierzchnią zamkniętą) oraz konstrukcje płaskie:

– *płyty,* gdy obciążenie zewnętrzne przyłożone jest prostopadle do powierzchni środkowej,
– *tarczownice*, gdy obciążenie zewnętrzne przyłożone jest w płaszczyźnie powierzchni środkowej,

- *konstrukcje masywne*, w których wszystkie trzy wymiary są tego samego rzędu (np. fundamenty blokowe, zapory).

1.1.3 ZAŁOŻENIA ODNOŚNIE DO WIĘZÓW

Podpory, posadowienia i połączenia elementów mogą być w rzeczywistych konstrukcjach różnie zrealizowane. Stanowią one więzy dla rozważanej konstrukcji i jej elementów. To, w jaki sposób zastąpimy więzy siłami – reakcjami – decyduje o metodzie analizy i w istotny sposób wpływa na obliczenia.. W przedmiocie mechanika teoretyczna poznaliśmy podstawowe typy podpór i połączeń prętów oraz stosowne postulaty o więzach. W tej książce w niewielkim stopniu wiadomości o więzach poszerzymy.

1.1.4 ZAŁOŻENIA ODNOŚNIE DO OBCIĄŻEŃ

Obciążenia działające na konstrukcję mogą być klasyfikowane z różnego punktu widzenia. Przede wszystkim dzielimy je na *powierzchniowe*, przyłożone na powierzchni konstrukcji, lub *objętościowe* (przyłożone w każdym punkcie wewnątrz ciała). Te ostatnie często są nazywane siłami masowymi, gdyż siły objętościowe związane z masą umieszczoną w polu grawitacyjnym (ciężar własny) są najczęściej spotykane. Odnośnie do sił powierzchniowych rozróżniać będziemy dwa ich rodzaje, zależnie od powierzchni kontaktu ciał przekazujących te obciążenia: są to obciążenia *skupione* i *rozłożone* na pewnej powierzchni lub linii. Te pierwsze mają wymiar [N] w przypadku sił lub [N·m] w przypadku momentu pary. Gęstości obciążenia powierzchniowego mają wymiar [N/m^2], liniowego - [N/m]. Warto zwrócić uwagę na fakt, że przyjmowana tu idealizacja obciążenia skupionego zależy od skali rozważanego obiektu. I tak przy kontakcie dwu sześcianów: dużego i małego strefa tego kontaktu jest mała w stosunku do dużego sześcianu i tu możemy przyjąć, że oddziaływanie przekazuje się w postaci siły skupionej. Dla małego sześcianu strefa kontaktu jest relatywnie duża i właściwszym będzie idealizacja obciążenia jako powierzchniowego.

Obciążenia dzielimy na *stałe* i *zmienne*. Do pierwszych zaliczamy te, które działają stale na konstrukcje, jak np. ciężar własny. Obciążenia zmienne dzielimy z kolei na *ruchome* i *nieruchome*. Nieruchome występują okresowo i w tym czasie mają charakter obciążenia stałego (np. obciążenie śniegiem). Obciążenia ruchome zmieniają miejsce ich przyłożenia na konstrukcji (np. pociąg poruszający się po moście).

Ze względu na zmianę wartości obciążenia w czasie ich przykładania i działania rozróżniamy obciążenia *statyczne* i *dynamiczne*. Do pierwszych zaliczamy takie, które są w tak powolny sposób wprowadzane, że można przyjąć – w całym procesie obciążania – prędkość energii kinetycznej układu równą zeru. Do drugich zaliczamy obciążenia przyłożone w sposób nagły (uderzenie) lub, których wartości zmieniają się w czasie np. w sposób periodyczny.

W ramach przedmiotu mechanika materiałów zajmować się będziemy głównie konstrukcjami prętowymi poddanymi obciążeniom stałym i nieruchomym, skupionym lub ciągłym.

Budowa schematu obliczeniowego, który powstaje w wyniku zastosowania idealizacji rzeczywistego obiektu, przeprowadzona w każdej z wyżej omówionych grup, jest zadaniem trudnym i odpowiedzialnym, albowiem dobór właściwego schematu obliczeniowego może być decydujący dla poprawności oceny zachowania się analizowanej konstrukcji. Bardzo odpowiedzialnym zadaniem inżyniera jest właśnie odpowiedni dobór tego schematu – w oparciu o doświadczenia praktyczne i znajomość analizy formalnej wybranego schematu. Z drugiej strony schemat obliczeniowy jest niejednoznaczny w tym sensie, że tak jak jednej, danej konstrukcji może odpowiadać wiele schematów obliczeniowych, (z których jeden będzie dawał wyniki najbliższe rzeczywistemu zachowaniu się konstrukcji), tak i jednemu schematowi obliczeniowemu odpowiadać może bardzo wiele konstrukcji rzeczywistych. Ta ostatnia niejednoznaczność jest bardzo korzystna: wystarczy bowiem opanować metodykę analizy kilku typowych schematów obliczeniowych, by wyniki te móc odnosić do bardzo wielu różnych konstrukcji, którym ten schemat obliczeniowy może być przypisany. Tak też będziemy postępowali w dalszym toku rozważań, np. wyróżniając typowe konstrukcje prętowe (belki, łuki, ramy, kraty) i określając dla nich metody analizy, czy też tzw. przypadki obciążeniowe (rozciąganie, skręcanie, zginanie).

1.2 OBLICZENIOWE ZASADY W MECHANICE MATERIAŁÓW

Wyżej omówiliśmy założenia, jakie czynić będziemy przy idealizacji konstrukcji budując jej schemat obliczeniowy. Przy analizie ustalonego schematu przyjmować będziemy jeszcze pewne zasady odnoszące się do metod obliczeniowych.

W wytrzymałości materiałów z reguły przyjmujemy trzy takie zasady. W szczególności:

- zasadę zesztywnienia,
- zasadę superpozycji,
- zasadę de Saint-Venanta.

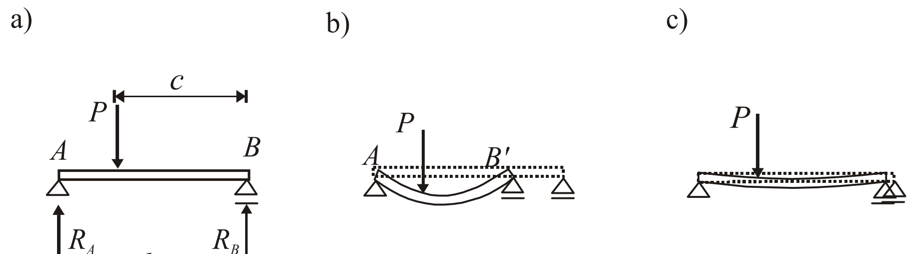
W tej części omówimy jedynie pierwszą z nich. Do pozostałych wrócimy w odpowiednim miejscu.

Ponadto przyjmiemy jeszcze jedno założenie odnoszące się do stanu równowagi, w jakim konstrukcja się znajduje, a mianowicie założenie o stanie równowagi statecznej, które zostanie utrzymane aż do chwili, kiedy będziemy rozważać różne stany równowagi.

1.2.1 ZAŁOŻENIE MAŁYCH PRZEMIESZCZEŃ – ZASADA ZESZTYWNIENIA

Zasada zesztywnienia jest prostym następstwem przyjęcia założenia małej deformacji bryły. Zgodnie z tym założeniem rozważać będziemy tylko takie zachowanie konstrukcji, które charakteryzuje się małymi przemieszczeniami poszczególnych punktów na skutek przyłożonych sił. Pojęcie *małe przemieszczenie* lub *przemieszczenie nieznaczne* jest pojęciem względnym; dlatego też przemieszczenia odnosić będziemy do wymiarów konstrukcji lub jej elementów. I tak za małe przemieszczenia płyty uważać będziemy takie, które nie przewyższają ok. 1/4 jej grubości, za małe przemieszczenia belki uważać będziemy takie, które nie przekraczają np. 1/250 jej rozpiętości. Zanim sformułujemy zasadę zesztywnienia rozważmy następujący przykład.

Dana jest belka o rozpiętości *l,* obciążona siłą skupioną *P* w odległości *c* od prawej podpory (rys. 1.1). Zadanie polega na obliczeniu reakcji w punkcie *A.*
Na podstawie twierdzeń poznanych w *mechanice ciała sztywnego* reakcje obliczamy bardzo prosto, korzystając z twierdzenia o równowadze bryły poddanej działaniu układu sił. Dla obliczenia reakcji wystarczy w tym przypadku wykorzystać warunek równości zeru wektora momentu liczonego względem punktu *B* wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych) w stanie pokazanym na rys. 1.1a:



Rys. 1.1

$$R_A l - Pc = 0 \Rightarrow R_A = \frac{Pc}{l}.$$

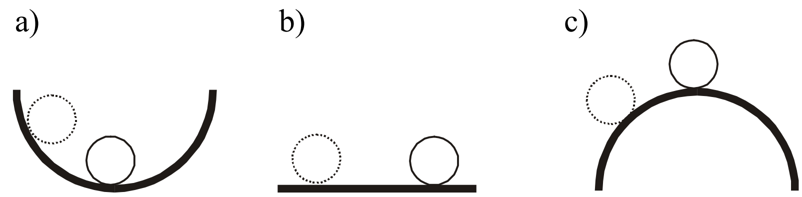
Uważny czytelnik powinien spostrzec, że konfiguracja równowagi belki po przyłożeniu siły nie jest jednak taka jak to pokazano rys. 1.1a. W stanie równowagi belka przyjmuje postać przedstawioną na rys. 1.1b i wówczas obliczenie reakcji, tak jak tego dokonaliśmy, nie może być prawdziwe bez uwzględnienia aktualnej konfiguracji belki. Jeśli jednak belka ugnie się nieznacznie (rys. 1.1c), to wpływ przemieszczeń na obliczoną reakcję będzie niewielki i reakcję tę będziemy mogli z dobrym przybliżeniem obliczyć przy konfiguracji wyjściowej, a więc tak, jak gdyby belka pod wpływem obciążenia nie zdeformowała się, czyli jakby była nieskończenie sztywna. Rozważany przykład będziemy mogli uogólnić i sformułować tzw. *zasadę zesztywnienia:*

Jeśli konstrukcja deformuje się nieznacznie, to przy obliczaniu sił biernych (reakcji) i sił wewnętrznych[1] *możemy założyć, że bryła w położeniu równowagi ma konfigurację wyjściową; innymi słowy przyjmujemy, że wpływ przemieszczeń na obliczanie reakcji i sił wewnętrznych jest pomijalnie mały (lub inaczej: jeśli konstrukcja deformuje się nieznacznie, wówczas budując równania równowagi możemy przyjąć konfigurację początkową jako konfigurację aktualną, tzn. po deformacji).*

1.2.2 ZAŁOŻENIE O RÓWNOWADZE STATECZNEJ

Przy analizie konstrukcji przyjmiemy, aż do odwołania, założenie odnoszące się do stanu równowagi, w jakim ona się znajduje.

W elementarnym kursie fizyki rozważaliśmy trzy stany równowagi: *stateczny, obojętny* i *niestateczny.* Najprostszą ilustracją takich stanów jest kulka znajdująca się w polu ciężkości i umieszczona na dnie wklęsłej czaszy kulistej, na płaszczyźnie i na wierzchołku wypukłej czaszy (rys. 1.2).

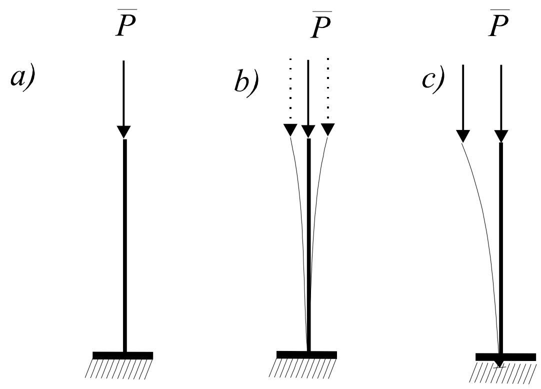


Rys. 1.2

Jeśli wytrącimy z położenia równowagi kulkę znajdującą się wewnątrz czaszy, to po pewnym czasie, dokonując pewnej skończonej ilości wahnięć, wróci ona do pierwotnego położenia równowagi; powiemy wówczas, że kulka na rys. 1.2a znajduje sięw *równowadze statecznej*. Jeśli zadziałamy impulsem na kulkę

1 Siły wewnętrzne zdefiniujemy w następnym punkcie.

znajdującą się na płaszczyźnie, to po pewnym czasie znajdzie się ona ponownie w stanie spoczynku i przyjmie ona nowe położenie równowagi – oznacza to, że znajduje się ona w *równowadze obojętnej.* Jeśli wytrącimy z położenia równowagi kulkę pokazaną na rys. 1.2c, to nigdy już nie wróci do stanu wyjściowego, powiemy wówczas, że znajduje się w *stanie równowagi niestatecznej*.



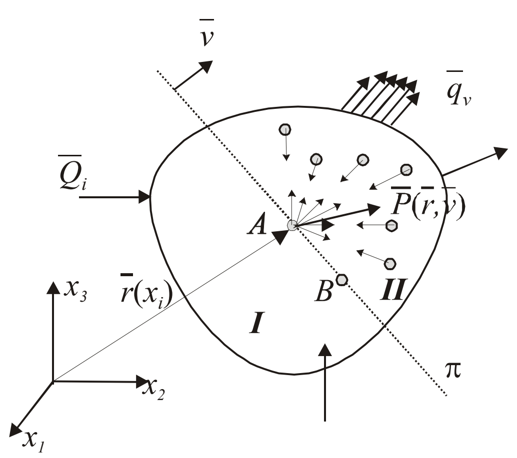
Rys. 1.3

W różnych stanach równowagi może znajdować się również konstrukcja inżynierska. Najprościej można to zilustrować na przykładzie słupa obciążonego siłą ściskającą (rys. 1.3a). Przy stosunkowo niewielkiej sile P przyłożonej do słupa konstrukcja znajduje się w równowadze statecznej, wychylenie jej z wyjściowego położenia równowagi spowoduje drgania słupa wokół postaci prostoliniowej i powrót do tej postaci (rys. 1.3b). Przy pewnej jednak wartości siły P wychylenie z wyjściowego położenia równowagi może spowodować „przeskok” do innego, krzywoliniowego położenia równowagi (rys. 1.3c). Słup w takich warunkach znajduje się w położeniu równowagi obojętnej. Jeśli siła P będzie dostatecznie duża, to wychylenie słupa z położenia równowagi spowoduje zniszczenie konstrukcji; powiemy wtedy, że w stanie wyjściowym słup znajdował się w stanie równowagi niestatecznej. Szczegółowe omówienie problemu utraty równowagi statecznej w najprostszych przypadkach rozważymy później (w bardziej złożonych konstrukcjach problem ten będzie przedmiotem rozważań *mechaniki budowli*).

W dalszej analizie układu konstrukcja – obciążenie będziemy zakładać, że układ znajduje się w równowadze statecznej. W przypadkach wymagających odstępstwa od tego założenia, będzie to wyraźnie podkreślone.

1.3 DEFINICJA SIŁY WEWNĘTRZNEJ, WEKTOROWE POLE SIŁ WEWNĘTRZNYCH

W odróżnieniu od *mechaniki teoretycznej, mechanika materiałów* zajmuje się ciałami odkształcalnymi, dlatego celem naszym będzie m.in. opisanie deformacji, jakiej pod wpływem sił zewnętrznych doznaje ciało. Oznacza to, że odległości pomiędzy poszczególnymi punktami ciała zmieniają się i – zgodnie z prawem Coulomba – zmieniają się siły, z jakimi te punkty na siebie oddziałują. Może się zdarzyć, że gdy obciążenia przekroczą pewną wartość, deformacja – a co za tym idzie – i siły oddziaływania pomiędzy niektórymi punktami będą tak duże, że nastąpi utrata spójności ciała.



Rys. 1.4

Jednym z podstawowych zadań *mechaniki materiałów* będzie więc ocena, jak się te siły zmieniają. Każdy punkt materialny ciała oddziałuje ze wszystkimi punktami – a więc z nieskończoną liczbą punktów. W rezultacie na myślowo wyodrębniony punkt ciała działa nieskończony układ sił. Jeśli ciało znajduje się w równowadze, to każda jego część – a więc i nasz wyodrębniony punkt – także jest w równowadze. Nie potrafimy jednak tego nieskończonego układu sił scharakteryzować, czyli brak nam jest pewnej miary tego stanu. Posłużymy się więc pewną intuicyjną definicją *siły wewnętrznej*, opartą na koncepcji – przypisywanej Cauchy'emu – przekroju ciała *płaszczyzną* na dwie części.

Niech dana będzie bryła dowolnego kształtu, do której przyłożono pewien układ sił zewnętrznych (*Z*), pozostająca w spoczynku (rys. 1.4). Wyobraźmy sobie tę bryłę jako zbiór punktów materialnych, które zgodnie z założeniem o continuum gęsto wypełniają objętość. Wewnątrz bryły obieramy dowolny punkt materialny *A* o wektorze wodzącym

$$\overline{r} = \overline{r}(x_1, x_2, x_3).$$

Przez punkt *A* poprowadźmy płaszczyznę π dzielącą bryłę na dwie części, a następnie części te rozsuńmy. Wyróżnijmy jedną z nich, przypiszmy jej symbol *I* i oznaczmy przez $\overline{v}$ wersor normalnej zewnętrznej do płaszczyzny π należącej do części *I*. Także punkt *A* leżący na płaszczyźnie podziału przyporządkujmy części *I*, podobnie jak i pozostałe punkty leżące na płaszczyźnie π. Jak wspomnieliśmy powyżej, między każdymi dwoma punktami materialnymi bryły działają siły, które w dalszym ciągu nazwiemy *siłami międzycząsteczkowymi* i które utrzymują spójność materiału. Siły te działają w szczególności pomiędzy punktem A i wszystkimi punktami należącymi do części *II*. Dzięki rozsunięciu obu części, możemy uwidocznić, w postaci pęku, siły, z jakimi wszystkie punkty materialne części *II* oddziałują na punkt A.

Wspomniany pęk sił tworzy *zbieżny układ sił*, którego suma, jeśli jest różna od zera, zaczepiona w punkcie A stanowi wypadkową tego układu. Oznaczmy tę wypadkową przez $\overline{P}$ i w dalszym ciągu nazywać ją będziemy *siłą wewnętrzną*.

Siłą wewnętrzną nazywamy wypadkową sił międzycząsteczkowych działających pomiędzy punktem o wektorze wodzącym $\overline{r}$*, leżącym na płaszczyźnie dzielącej bryłę na dwie części i należącym do tej części, której normalną zewnętrzną płaszczyzny podziału definiuje wersor* $\overline{\nu}$*, a wszystkimi punktami materialnymi należącymi do części drugiej.*

Obrazowo możemy powiedzieć, że siła wewnętrzna $\overline{P}$ jest to siła, z jaką wszystkie punkty materialne części *II* oddziaływają na punkt A (chcąc np. „wyrwać” go z części *I*).

Zwróćmy uwagę na trzy bardzo ważne fakty:

a) Powyższe rozumowanie prowadzące do definicji siły wewnętrznej, wyglądałoby identycznie, gdybyśmy punkt A przyporządkowali części *II,* a nie części *I*. Wówczas jednak układ sił działający na punkt A byłby zupełnie inny, bo zbiór punktów materialnych tworzących część *I* jest inny niż dla części *II*. Jak wynika jednak z zasady akcji i reakcji wypadkowe obu tych układów będą przeciwne.

b) Gdybyśmy obrali inny punkt na płaszczyźnie π, np. *B,* wówczas siła wewnętrzna będzie inna niż w punkcie *A,* albowiem inny będzie układ sił międzycząsteczkowych, z jakimi wszystkie punkty części *II* działają na punkt *B*; wniosek stąd prosty, że siła wewnętrzna zależy od wektora wodzącego $\overline{r}$.

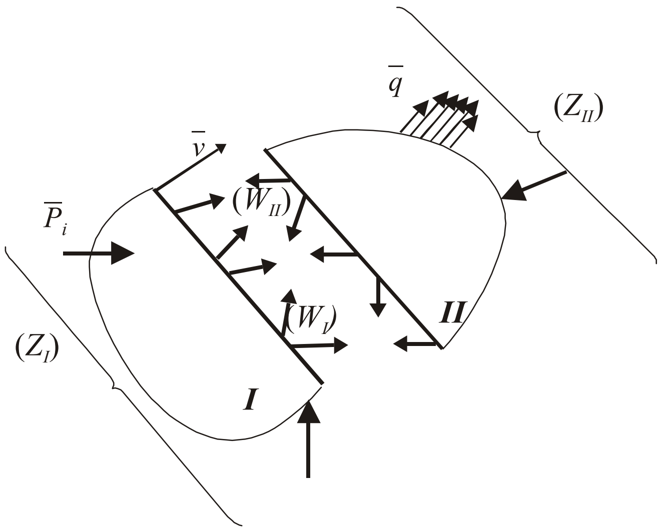
c) Gdyby przez punkt A poprowadzić inną płaszczyznę, a więc dokonać innego podziału na części *I* i *II,* wówczas siła wewnętrzna w punkcie A będzie oczywiście inna niż przy podziale pierwszym. Inny będzie, bowiem układ sił międzycząsteczkowych w punkcie *A,* bo pochodzący od innego zbioru punktów materialnych (inna jest część *II*). Zatem siła wewnętrzna zależy również od wektora normalnego do płaszczyzny podziału.

Dwie ostatnie uwagi wskazują, że *pole sił wewnętrznych* opisuje funkcja wektorowa dwóch wektorów $\overline{P} = \overline{P}(\overline{r}, \overline{\nu})$, którą w dalszym ciągu będziemy się starali zbudować.

Znajomość wektorowego pola sił wewnętrznych staje się dla konstruktora niesłychanie ważna, pozwala mu bowiem w każdym punkcie i przy każdym przekroju wyznaczyć wartość siły, oszacować ją, tj. stwierdzić, czy nie powoduje ona utraty spójności danego materiału, to znaczy, czy nie przekracza charakterystycznej dla każdego materiału niebezpiecznej wartości. W pewnych przypadkach pozwala na określenie koniecznego wzmocnienia w danym kierunku (np. kierunek zbrojenia w betonie).

Znalezienie tej funkcji wektorowej staje się więc jednym z podstawowych zadań mechaniki ośrodka ciągłego.

1.4 TWIERDZENIE O UKŁADACH SIŁ WEWNĘTRZNYCH I ZEWNĘTRZNYCH



Rys. 1.5

Rozważmy bryłę przedstawioną na rys. 1.4, poddaną obciążeniu układem (Z) i pozostającą w równowadze. Jest zatem $(Z) \equiv (0)$. Dokonajmy podziału tej bryły na dwie części płaszczyzną π (rys. 1.5). Wyróżnijmy jedną z części i przypiszmy należącej do niej płaszczyzny podziału wersor normalnej zewnętrznej $\overline{v}$. Oznaczmy tę część symbolem *I.* Układ sił zewnętrznych przyłożonych do tej części oznaczmy przez (Z_I) a układ sił zewnętrznych przyłożonych do części *II* przez (Z_{II}). Skoro układ sił zewnętrznych (Z) jest równoważny układowi zerowemu (0), przeto zachodzi:

$$(Z_I) + (Z_{II}) \equiv (0)\,. \tag{1.1}$$

Przez (W_I) oznaczmy układ sił wewnętrznych działających na wszystkie punkty materialne leżące na płaszczyźnie podziału i przyporządkowane części *I,* zaś przez (W_{II}) układ sił wewnętrznych przyporządkowanych punktom leżącym w płaszczyźnie podziału, ale należącym do części *II*. Ze wspomnianej już zasady akcji i reakcji wnosimy natychmiast, że:

$$(W_I) \equiv -(W_{II}). \tag{1.2}$$

Jeśli cała bryła pozostaje w równowadze, to pozostają w równowadze również części *I* i *II*. Z warunku równowagi każdej z części *I* i *II* mamy:

$$(Z_I)+(W_I) \equiv (0), \tag{1.3}$$

$$(Z_{II})+(W_{II}) \equiv (0). \tag{1.4}$$

Na mocy – poznanej w mechanice teoretycznej (w algebrze układów wektorów) – definicji relacji równoważnościowej, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, możemy zapisać:

$$\left.\begin{array}{l} z\ (1.3) \Rightarrow (W_I) \equiv -(Z_I) \\ z\ (1.1) \Rightarrow (Z_{II}) \equiv -(Z_I) \end{array}\right\} \Rightarrow (W_I) \equiv (Z_{II}),$$

$$\left.\begin{array}{l} z\ (1.4) \Rightarrow (W_{II}) \equiv -(Z_{II}) \\ z\ (1.1) \Rightarrow (Z_I) \equiv -(Z_{II}) \end{array}\right\} \Rightarrow (W_{II}) \equiv (Z_I).$$

Rezultat ten wypowiemy w postaci twierdzenia:

Układ sił wewnętrznych przyłożonych do punktów materialnych leżących na płaszczyźnie podziału o normalnej $\overline{v}$ *jest równoważny układowi sił zewnętrznych przyłożonych do odciętej, drugiej części bryły.*

Tylko na pierwszy rzut oka twierdzenie to wydaje się być dogodne przy wyznaczaniu szukanego układu sił wewnętrznych. Niestety tak nie jest. Fakt, że np. układ sił wewnętrznych (W_I) jest równoważny znanemu układowi (Z_{II}) mówi niewiele o układzie (W_I), albowiem układów równoważnych danemu możemy zbudować nieskończenie wiele, choćby drogą *przekształceń elementarnych*[2] dokonywanych na układzie danym.

Twierdzenia te jednak okażą się w pewnych przypadkach użyteczne, bowiem, mimo że nie potrafimy na ich podstawie znaleźć układu (W_I), to jednak możemy znaleźć jego sumę i moment względem dowolnego punktu.

Ze znanego twierdzenia o układach równoważnych wiemy, że: jeśli dwa układy są równoważne, to sumy obu układów są równe i równe są momenty obu układów liczone względem tego samego punktu.

Tak więc z warunków równoważności:

$$(W_I) \equiv (Z_{II}) \Rightarrow \begin{cases} \overline{S}(W_I) = \overline{S}(Z_{II}) \\ \overline{M}_Q(W_I) = \overline{M}_Q(Z_{II}) \end{cases}, \quad (W_{II}) \equiv (Z_I) \Rightarrow \begin{cases} \overline{S}(W_{II}) = \overline{S}(Z_I) \\ \overline{M}_Q(W_{II}) = \overline{M}_Q(Z_I) \end{cases},$$

---

2 Przez *przekształcenie elementarne* układu (A) rozumiemy: α) usunięcie alb dodanie do tego układu dwu wektorów przeciwnych leżących na jednej prostej, β) usunięcie lub dodanie do niego kilku wektorów o wspólnym początku, a o sumie równej $\overline{0}$.

wynika, że suma $\overline{S}(W_I)$ układu (W_I) jest równa sumie $\overline{S}(Z_{II})$ układu (Z_{II}) i moment $\overline{M}_Q(W_I)$ układu (W_I) względem dowolnego punktu Q jest równy momentowi $\overline{M}_Q(Z_{II})$ układu (Z_{II}) względem tego samego punktu. Podobny wniosek wynika z drugiej równoważności.

Do powyższych twierdzeń będziemy się bardzo często odwoływać w analizie konstrukcji prętowych.