



## **wstęp do statyki konstrukcji prętowych**

## 2 WSTĘP DO STATYKI KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

Jak przekonamy się później (w części czwartej), w bryle o kształcie pręta, rozkład sił wewnętrznych w przekroju pręta niezwykle prosto uda się wyrazić poprzez elementy zredukowanego, odpowiedniego układu sił zewnętrznych. Z tej przyczyny poświęcimy trochę więcej uwagi znajdowaniu tego zredukowanego układu, odkładając na razie to, co jest naszym celem, a mianowicie znalezienie sił wewnętrznych, czyli funkcji  $\bar{P} = \bar{P}(\bar{r}, \bar{v})$ .

### 2.1 OŚ PRĘTA, PRZEKRÓJ POPRZECZNY, BIEGUN REDUKCJI

W uzupełnieniu podanej w części pierwszej definicji pręta umówimy się nazywać:

- *Ośią pręta* – miejsce geometryczne punktów, będących środkami ciężkości przekrojów pręta dowolnymi płaszczyznami przecinającymi jego tworzące,
- *Przekrojem poprzecznym* – przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi pręta.

W procesie redukcji układu sił zewnętrznych przyłożonych do jednej z odciętych części pręta przyjmiemy **stałą** umowę dotyczącą podziału pręta i bieguna redukcji, a mianowicie:

- pręt dzielić będziemy na dwie części przekrojem poprzecznym,
- biegunem redukcji będzie środek ciężkości przekroju poprzecznego.

### 2.2 UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

Projektując konstrukcje prętowe z reguły będziemy się posługiwać dwoma układami współrzędnych: układem globalnym (często zwanym – użytkownika) i układami lokalnymi definiowanymi w każdym przęcie konstrukcji.

#### 2.2.1 UKŁAD GLOBALNY, ORTOKARTEZJAŃSKI

Osie tego układu oznaczamy przez  $X_1, X_2, X_3$  lub  $X, Y, Z$  (rys. 2.1), i w nim zapisujemy:

- Równanie osi pręta w postaci parametrycznej:

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t), \quad a \leq t \leq b \quad (2.1)$$

- orientację przekroju poprzecznego,
- przyłożone obciążenie,
- więzy,

Zapisując równanie osi pręta w postaci (2.1), w każdym przypadku początkową wartość parametru  $t = a$  dobierać będziemy tak, aby współrzędne  $X(a)$ ,  $Y(a)$ ,  $Z(a)$  określały wybrany (jeden z dwóch) krańcowy punkt osi pręta.

Nazwiemy go *początkiem pręta*

Znajomość osi pręta, z oczywistych przyczyn, nie wystarcza dla pełnego zapisu pręta, jako bryły, w przestrzeni  $X, Y, Z$ . Zapisać jeszcze należy położenie przekroju poprzecznego dla każdej wartości  $t$ . Szczegółowo omówimy problem w następnym rozdziale pt. „układy lokalne”.

Zapisanie układu sił zewnętrznych oraz więzów nie sprawia problemu.

## 2.2.2 UKŁAD LOKALNY, KRZYWOLINIOWY ORTOGONALNY

W układzie tym opisujemy:

- kształt przekroju poprzecznego,
- wszystkie geometryczne charakterystyki przekroju poprzecznego,
- siły przekrojowe,
- gęstości sił wewnętrznych oraz, z reguły, wszystkie wielkości kinematyczne związane z deformacją pręta wywołaną przyłożonymi siłami.

Zanim wykonamy powyższe czynności najpierw musimy zdefiniować układ lokalny i zapisać go w układzie globalnym. Osie układu lokalnego przyporządkowanego każdemu punktowi osi pręta (rys. 2.1) oznaczamy przez  $x_1, x_2, x_3$  lub  $x, y, z$ . Pierwsza oś jest styczna do osi pręta i wyznacza ją wektor:

$$\bar{e}_x = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|},$$

$$\bar{e}_x \left( \frac{\dot{X}(t)}{\sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t) + \dot{Z}^2(t)}}, \frac{\dot{Y}(t)}{\sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t) + \dot{Z}^2(t)}}, \frac{\dot{Z}(t)}{\sqrt{\dot{X}^2(t) + \dot{Y}^2(t) + \dot{Z}^2(t)}} \right) \quad (2.2).$$

Jeśli parametr jest naturalny<sup>1</sup>, wówczas:

$$\bar{e}_x[\dot{X}(s), \dot{Y}(s), \dot{Z}(s)].$$

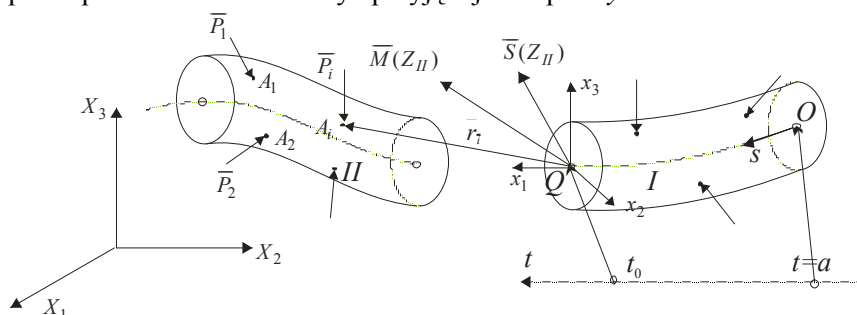
<sup>1</sup> Bardzo wygodne jest, jeśli uda się przyjąć tzw. *naturalny parametr*  $t = s$ , to jest taki, którego wartość definiująca położenie punktu na osi jest długością linii od początku osi pręta do punktu bieżącego. Parametr taki nazywamy także *współrzedną łukową*.

Zwrot tak obliczonego wektora  $\bar{e}_x$  jest zawsze zgodny ze zwrotem łuku zdefiniowanego równaniem łuku i dodatnim przyrostem parametru.

Osie,  $y$  i  $z$  leżą oczywiście w płaszczyźnie przekroju poprzecznego i są osiami głównymi centralnymi tego przekroju. Z reguły literą  $y$  oznaczamy oś względem, której moment bezwładności przekroju poprzecznego jest maksymalny, zaś przez  $z$  – oś względem, której moment bezwładności jest najmniejszy. Zwroty osi wyznacza prawoskrętność układu  $(x, y, z)$ . Tak zdefiniowane osie nazywamy *głównymi*, a układ ich wektorów – *reperem głównym*.

O ile określenie, w układzie globalnym, wektora osi  $x$ , jak pokazaliśmy powyżej, nie sprawia żadnego kłopotu, o tyle powstaje pewien problem, jak zapisać wektory osi  $y$  i  $z$ . Poszczególne przekroje poprzeczne bowiem mogą być różnie usytuowane w przestrzeni, co oznacza, że różnie zapisywane będą ich osie główne centralne w układzie globalnym.

Oczywiście nie ma problemu w przypadku przekrojów, dla których każde dwie prostopadłe do siebie osie są głównymi. W tym bowiem przypadku każda oś, byle prostopadła do osi  $x$  może być przyjęta jako np. oś  $y$ .



Rys. 2.1

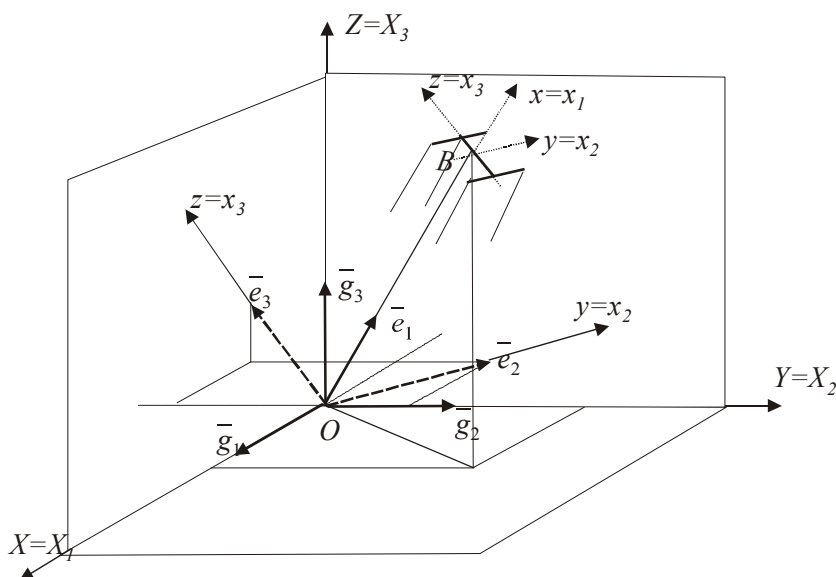
W innych przypadkach zadanie jest nieco trudniejsze i chociaż nie ze względu na trud, ale z uwagi na małą przydatność praktyczną, nie będziemy się zajmowali problemem, kiedy oś pręta jest dowolną krzywą przestrzenną a przekrój poprzeczny – dowolny.

Tak, więc w dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko:

- prętami krzywymi, których oś leży w jednej z płaszczyzn układu globalnego (krzywa płaska), w której leży również jedna z osi głównych centralnych przekroju poprzecznego (z reguły  $z$ ;  $I_z = I_{\min}$ ).
- prętami prostymi dowolnie zorientowanymi w układzie globalnym.

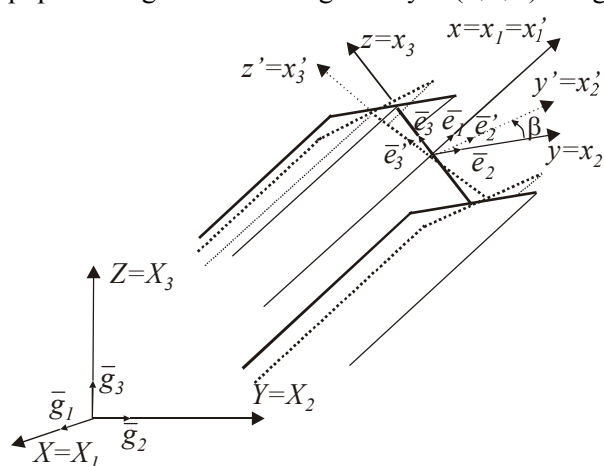
W pierwszym przypadku wyznaczenie układu lokalnego jest natychmiastowe.  $\bar{e}_x$  – wyznaczamy ze wzoru (2.2),  $\bar{e}_y = \bar{e}_y$ , a  $\bar{e}_z$  otrzymujemy z warunku ortonormalności.

Zanim pokażemy tok postępowania w drugim przypadku (w przestrzeni 3D), zwróćmy uwagę (rys. 2.2), że osie  $y, z$  układu lokalnego, z różnych przyczyn (konstrukcyjnych, montażowych, architektonicznych) mogą być różnie usytuowane względem układu globalnego



Rys. 2.2

Tok postępowania przy określeniu układu osi głównych centralnych przekroju poprzecznego w układzie globalnym  $(X, Y, Z)$  z reguły przebiega w dwóch etapach.



Rys.2.2a

Podział na dwa etapy wynika przede wszystkim z faktu, że w większości przypadków inżynierskich konstrukcji prętowych dominującym jest obciążenie pionowe i wówczas proces obliczeniowy kończy się na pierwszym etapie. W tym etapie przekrój poprzeczny orientujemy tak, aby lokalna oś  $z$ , względem, której moment bezwładności przekroju jest minimalny, oraz oś pręta  $x$  leżały w

płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny  $XY$  (rys. 2.2).

Na rys. 2.2 przez  $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$  oznaczono wersory osi układu globalnego, a przez  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  – wersory układu lokalnego. Wcześniej pokazaliśmy, jak należy wyznaczać pierwszy wersor. Skoro płaszczyzna  $xz$  ma być prostopadła do  $XY$ , to na niej leży również oś  $Z$  (o wersorze  $\bar{g}_3$ ), a zatem wersor do niej prostopadły otrzymamy w wyniku iloczynu wektorowego:

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{g}_3 \times \bar{e}_1}{|\bar{g}_3 \times \bar{e}_1|}$$

Wyznaczenie wersora trzeciej osi jest natychmiastowe:  $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$ .

W ten sposób wyznaczyliśmy macierz przejścia  $(\alpha_{ij})$ :

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

przy pomocy której możemy zapisać:  $\bar{e}_i = \alpha_{ij} \bar{g}_j$ .

Postępowanie w drugi etapie podejmujemy, gdy zachodzi potrzeba innego ułożenia przekroju poprzecznego w układzie globalnym. Innego, to znaczy otrzymanego poprzez obrót wokół osi  $x_1$ . Oznaczmy wersory osi głównych centralnych w nowym położeniu przez  $\bar{e}'_j$ . Aby opisać położenie tych wersorów w układzie  $(x_1, x_2, x_3)$  wystarcza jedynie podać kąt  $\beta$  pomiędzy osią  $x_2$  a osią główną  $x'_2$  w nowym położeniu. Macierz opisująca nowe położenie układu  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  w układzie  $(x_1, x_2, x_3)$  przyjmuje wówczas postać:

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Nowe wersory możemy wyrazić poprzez wersory układu lokalnego w poprzednim położeniu:

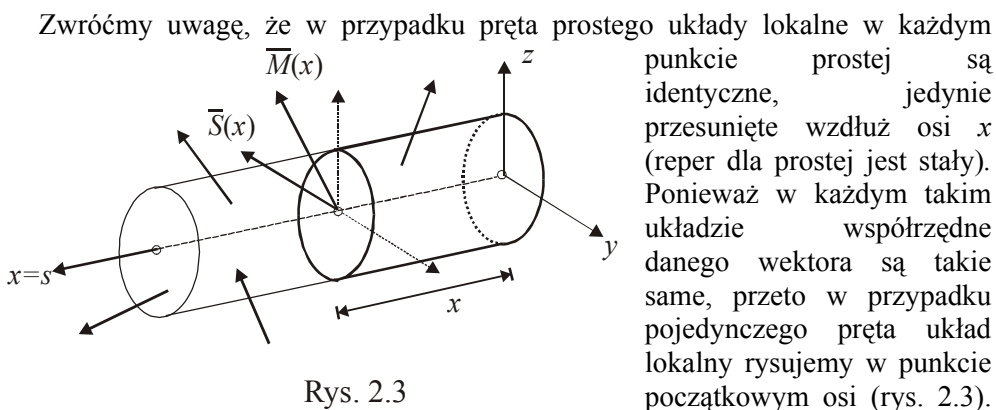
$$\bar{e}'_i = \beta_{ik} \bar{e}_k.$$

Wykorzystując zależność  $\bar{e}_i = \alpha_{ij} \bar{g}_j$  możemy wyrazić nowe wersory poprzez wersory układu globalnego:

$$\bar{e}'_i = \beta_{ik} \alpha_{kj} \bar{g}_j = \alpha'_{ij} \bar{g}_j.$$

Tak więc macierz przejścia układu osi głównych po obrocie w układzie globalnym przyjmuje postać:

$$\alpha'_{ij} = \beta_{ik} \alpha_{kj}.$$

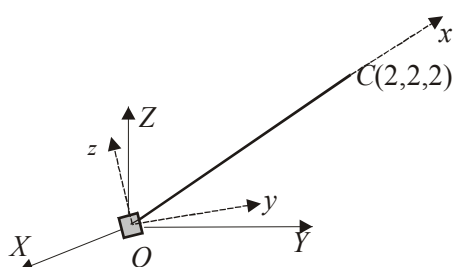


Rys. 2.3

We wszystkich profesjonalnych programach komputerowych, tak właśnie pokazywany jest układ lokalny (pokazywane są także, z reguły w tej samej aksonometrii, ikony przekroju poprzecznego).

Nie ma żadnych kłopotów, jak wspomnieliśmy, z układem lokalnym, jeśli oś pręta jest krzywa płaska.<sup>1</sup> Weźmy dla przykładu krzywą płaską zorientowaną w osiach XZ układu globalnego pokazaną na rys. 2.5. W tym przypadku nietrudno wyobrazić sobie oś Y i jej zwrot. Z tych samych przyczyn, co w przypadku 3D, lokalna oś y będzie równoległa do Y ( $\bar{e}_y = \bar{e}_Y$ ). Oś x wyznacza wersor  $\bar{e}_x$  styczny do krzywej, a wersor  $\bar{e}_z$  – tak, aby reper był ortogonalny i prawoskrętny. Na trzech przykładach pokażemy tok postępowania przy wyznaczaniu układu lokalnego.

### Zadanie 2.1



Rys.2.4

Zadaniem jest wyznaczenie układu lokalnego dla pręta pokazanego na rys. 2.4. Przekrój poprzeczny pręta jest kołem. Ogólna postać równania parametrycznego prostej ma postać:

$$X = X_0 + at,$$

$$Y = Y_0 + bt,$$

$$Z = Z_0 + ct,$$

gdzie:  $X_0, Y_0, Z_0$  są współrzędnymi

<sup>1</sup> „płaskość” krzywej nie oznacza, że zadanie jest „płaskie”, bowiem obciążenie nie musi leżeć w płaszczyźnie osi pręta.

dowolnego punktu na prostej, zaś  $a, b, c$  są współrzędnymi dowolnego wektora leżącego na prostej tzw. wektora kierunkowego wyznaczającego zwrot prostej,  $t$  jest parametrem.

W naszym przypadku przyjmujemy:  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$  oraz wektor kierunkowy  $\vec{a}(2,2,2)$ , co oznacza przyjęcie początku pręta w punkcie  $O$ . Równanie prostej przyjmie wówczas postać:

$$X = 2t; Y = 2t \quad Z = 2t.$$

Łatwo obliczamy współrzędne wektora stycznego, którego długość wynosi:  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ . Tak, więc wersor  $\vec{e}_x$  zgodnie z (2.2) ma współrzędne:

$$\vec{e}_x = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

W przypadku przyjętego przekroju poprzecznego każda oś leżąca w tym przekroju jest osią główną, tym niemniej oś  $y$  wyznaczymy wersorem:

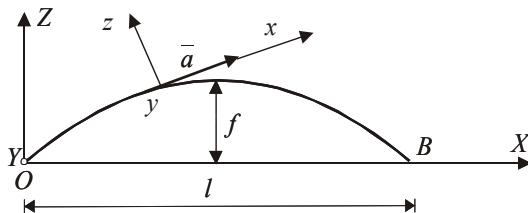
$$\vec{e}_y = \frac{\vec{g}_3 \times \vec{e}_x}{|\vec{g}_3 \times \vec{e}_x|} \Rightarrow \vec{e}_y \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Wersor trzeciej osi wyznacza iloczyn:

$$\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Układ lokalny w układzie globalnym wyznacza więc następująca macierz przejścia:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$



Rys. 2.5

Zwrot łuku wyznacza wektor styczny:

### Zadanie 2.2

Wyznaczyć współrzędne układu lokalnego dla łuku parabolicznego pokazanego na rys. 2.5. Jeśli początek łuku przyjmujemy w  $O$  wówczas równanie krzywej przyjmuje postać:

$$X = t; Y = 0, Z = at^2 + bt \dots$$



$$\vec{a}(\dot{X}=1, \dot{Y}=0, \dot{Z}=2at+b).$$

Wyznaczając stałe  $a$  i  $b$  poprzez rozpiętość łuku i strzałkę, otrzymujemy:

$$a = -\frac{4f}{l^2}, \quad b = \frac{4f}{l}.$$

Przyjmując  $l=10$  m i  $f=2$  m, mamy  $a=2/25$ ,  $b=4/5$ , równanie paraboli przyjmuje postać:

$$X=t; \quad Y=0; \quad Z=-\frac{2}{25}t^2 + \frac{4}{5}t.$$

Wektor styczny do paraboli ma współrzędne  $\vec{a}(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) = \vec{a}\left(1, 0, -\frac{4}{25}t + \frac{4}{5}\right)$ , które wobec

$X=t$  możemy również zapisać w postaci:

$$\vec{a}\left(1, 0, -\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}\right); \quad |\vec{a}| = \sqrt{1 + \left(-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}\right)^2}.$$

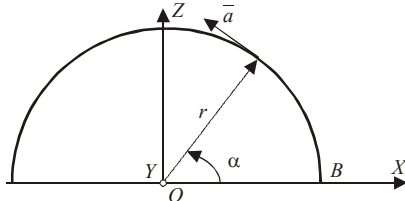
Zgodnie ze wzorem (2.2) wersor osi  $x$  ma współrzędne:

$$\vec{e}_x \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}\right)^2}}, 0, \frac{-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}\right)^2}} \right)$$

Ponieważ  $\vec{e}_y(0,1,0)$  przeto  $\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y$ , stąd

$$\vec{e}_z \left( -\frac{-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}\right)^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{4}{25}X + \frac{4}{5}\right)^2}} \right).$$

### Zadanie 2.3



Rys. 2.6

Dla okręgu pokazanego na rys. 2.6 wyznaczyć w dowolnym punkcie krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych.

Jeśli początek układu  $X, Z$  znajduje się w środku średnicy (rys. 2.6), wówczas łuk opisuje równanie:

$$X = r \cos \alpha; \quad Y = 0, \quad Z = r \sin \alpha.$$

Jak łatwo widać początek łuku znajduje się w

punkcie  $B(r, 0)$ . Podobnie jak w poprzednim przykładzie zwrot łuku wyznacza wektor styczny  $\vec{a}(\dot{X}, \dot{Z})$ .

### 2.3 DEFINICJA SIŁ PRZEKROJOWYCH

Pojęcie sił przekrojowych jest pojęciem sztucznym, pomocniczym, nie mającym żadnego odwzorowania w rzeczywistości, tym niemniej niezwykle wygodnym, między innymi z następujących powodów:

- możliwości przypisywania tym wielkościom pewnej wygodnej interpretacji fizycznej (podkreślmy: interpretacji),
- prostoty (jak się później przekonamy) wzorów opisujących gęstości sił wewnętrznych w dowolnym punkcie każdego przekroju poprzecznego konstrukcji prętowej wyrażonych poprzez siły przekrojowe.

Weźmy dowolny pręt, na jednej ze ścianek poprzecznych pręta przyjmijmy początek łuku (parametru  $t$ ) i zapiszmy równanie jego osi w układzie  $(X_1, X_2, X_3)$  (rys. 2.1). Niech przyłożony układ sił zewnętrznych (czynnych i biernych) będzie również określony w tym układzie i niech dane będą współrzędne sił  $\vec{P}^i(P_1^i, P_2^i, P_3^i)$  oraz punktów  $A^i(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$  przyłożenia tych sił.

W dowolnym punkcie osi pręta  $Q[X_1(t_0), X_2(t_0), X_3(t_0)]$  określmy lokalny układ współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$ . Przez ten punkt płaszczyzną prostopadłą do osi przecinamy pręt na dwie części. Tylko jedna z nich charakteryzuje się tym, że wektorem normalnej zewnętrznej do przekroju poprzecznego jest wersor  $\vec{e}_x$ , lub inaczej – tylko jedna część ma przekrój poprzeczny dodatnio zorientowany w układzie lokalnym lub jeszcze inaczej: tylko w jednej części znajduje się przyjęty początek osi. Na rysunku 2.1 tę część oznaczono przez „I”.

Przypiszmy punkt  $Q$  rozważanemu przekrojowi poprzecznemu i zredukujmy do niego układ sił zewnętrznych przyłożonych do drugiej części bryły (w naszym przypadku – części oznaczonej przez „II”). Zredukowany układ składa się z dwóch wektorów zaczepionych w  $Q$ :

- Sumy układu  $(Z_{II})$ :

$$\vec{S}(Z_{II}) = \vec{S}(t_0) = \sum_{i \in Z_{II}} \vec{P}_i,$$

- Momentu układu  $(Z_{II})$  względem bieguna  $Q$ :

$$\overline{M}(Z_{II}) = \overline{M}(t_0) = \sum_{i \in Z_{II}} \overline{r}_i \times \overline{P}_i, \quad \text{gdzie} \quad \overline{r}_i = \overline{QA_i}.^1$$

Składowe wektorów

$$\overline{S}(t_0) = \overline{F}_x(t_0) + \overline{F}_y(t_0) + \overline{F}_z(t_0),$$

$$\overline{M}(t_0) = \overline{M}_x(t_0) + \overline{M}_y(t_0) + \overline{M}_z(t_0),$$

równoległe do osi lokalnego układu współrzędnych nazywać będziemy *siłami przekrojowymi* (rys. 2.7a).

Możemy, więc przyjąć następującą definicję:

*Siłami przekrojowymi na ścianie przekroju dodatnio zorientowanej względem osi  $x$  (należącej do tej części podzielonego pręta, której wektor normalnej zewnętrznej  $\vec{v} = \vec{e}_x$ ), nazywać będziemy składowe, względem lokalnego układu współrzędnych, zredukowanego do punktu osi, układu sił zewnętrznych przyłożonych do drugiej części przeciętej bryły.*

Miary tych składowych określają współrzędne:

$$\begin{aligned} \overline{S}(t_0) [F_x(t_0), F_y(t_0), F_z(t_0)] \\ \overline{M}(t_0) [M_x(t_0), M_y(t_0), M_z(t_0)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Wektory sumy  $\overline{S}(t_0)$  i momentu  $\overline{M}(t_0)$  zaczepione w punkcie  $Q$  tworzą układ, który jest oczywiście równoważny układowi  $(Z_{II})$  (wszystkich sił przyłożonych do części  $II$ ) możemy o nim powiedzieć, że niejako *reprezentuje* działanie układu  $(II)$  na przekrój poprzeczny należący do cz.  $I$ .

Przy takiej interpretacji usprawiedliwione stają się nazwy poszczególnych sił przekrojowych i ich miar (z reguły również nazywanych siłami przekrojowymi):

- $F_x$  — siła podłużna (normalna),
- $F_y, F_z$  — siły poprzeczne (tnące),
- $M_x$  — moment skręcający,
- $M_y, M_z$  — momenty zginające.

---

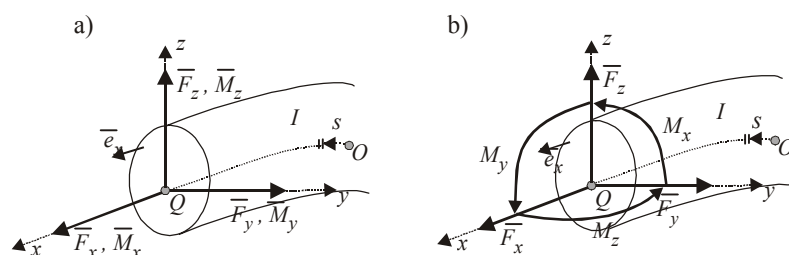
<sup>1</sup> W mechanice teoretycznej zwykle przy literze  $\overline{M}$  pisaliśmy wskaźnik, którym był punkt, względem, którego obliczaliśmy moment. W naszych rozważaniach punkt  $Q$  zawsze należeć będzie do osi pręta, przeto wystarcza przy symbolu momentu, zamiast wskaźnika, zapisać argument, jakim będzie wartość parametru  $t=t_0$  wyznaczającego ten punkt:  $\overline{M}(t_0)$ .

Tym niemniej używać będziemy również zapisu  $\overline{M}_Q$ .

Nazwy momentów stają się bardziej zrozumiałe, jeśli poszczególne składowe przedstawimy przez pary, których wektory są odpowiednio równe składowym wektora momentu (rys.2.7b).

Na zakończenie zwróćmy uwagę na bardzo ważny fakt.

Wyznaczanie sił przekrojowych jest zadaniem stosunkowo prostym. Obliczenia „ręczne” mogą być jednakże niekiedy dość żmudne, jeśli układ sił zewnętrznych jest złożony i jeśli oś pręta jest linią krzywą.



Rys.2.7

Zadanie ułatwiają nam programy komputerowe. Jeśli znalezienie sumy i momentu układu sił będziemy musieli wykonać bez pomocy komputera, wówczas obliczenia możemy, w wielu przypadkach, istotnie ułatwić. Nietrudno bowiem zauważyć, że współrzędne sum:  $\bar{S}(Z_I)$  i  $\bar{S}(Z_{II})$ , jak i momentów  $\bar{M}(Z_I)$  i  $\bar{M}(Z_{II})$  będą miały wartości przeciwne. Oba układy są bowiem równoważące się. Jeśli układ sił ( $Z_I$ ) jest prostszy, będziemy oczywiście szukać współrzędnych sumy i momentu właśnie tego układu, aby następnie zmienić znak na przeciwny.

## 2.4 UPROSZCZONY RYSUNEK LITEGO PRĘTA

W teorii prętów litych (takich, których wymiary określające przekrój poprzeczny są tego samego rzędu), umówimy się, dla potrzeb obliczania sił przekrojowych, że układ złożony z każdej siły przyłożonej do zewnętrznej powierzchni cz. II pręta zredukujemy w pierw do tego punktu osi, który leży na tym samym przekroju poprzecznym, co punkt przyłożenia siły na powierzchni.

*Nie zmieniają się też wartości sił przekrojowych w przyjętym punkcie osi, jeśli przyłożone do cz. II siły, których kierunki przecinają oś pręta, przesuniemy wzdłuż kierunków ich działania i zaczepimy w osi pręta. Jeżeli linia działania siły nie przecina osi pręta, wówczas przykładając siłę w punkcie osi należy przyłożyć w osi pręta wektor momentu tej siły względem punktu osi.*

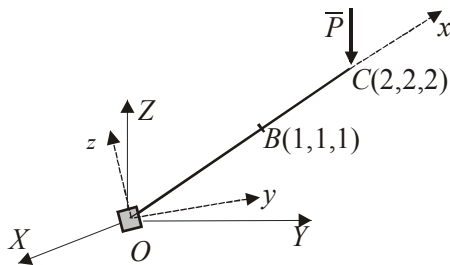
Wykorzystamy w dalszym ciągu tę możliwość i będziemy przedstawiać schemat statyczny konstrukcji prętowych rysując jedynie osie prętów, do których przykładać będziemy zredukowane do osi obciążenie i więzy.

#### Zadanie 2.4

Obciążmy, rozważany w zadaniu 2.1 (rys. 2.4), pręt siłą  $\bar{P}(10,0,-20)$  przyłożoną w punkcie C (rys. 2.8) i obliczmy siły przekrojowe w punkcie B.

W zadaniu 2.1 wyznaczyliśmy współrzędne wersorów lokalnego układu współrzędnych  $x,y,z$  i zapisaliśmy je w postaci macierzy:

$$\begin{matrix} \bar{e}_x \dots\dots\dots & \bar{e}_y \dots\dots\dots (\alpha_{ij}) = & \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ \bar{e}_z \dots\dots\dots & & \end{matrix}$$



Rys.2.8

Przez punkt B dokonajmy przecięcia pręta płaszczyzną do niego prostopadłą. Przekrój poprzeczny dodatnio zorientowany względem osi  $x$  układu lokalnego należy do

części OB. Do punktu B redukować będziemy układ sił przyłożonych do części BC.

Wartości sił przekrojowych: obliczamy w dwóch krokach. Pierwszy to obliczenie współrzędnych sumy i momentu w punkcie B w układzie globalnym, a drugi – odniesienie tych wielkości do układu lokalnego.

Na sumę wszystkich sił przyłożonych do części BC składa się tylko wektor  $\bar{P}$  tak, więc w układzie globalnym wektor sumy ma współrzędne:

$$\bar{S}(B) = \bar{P}(10,0,-20)$$

Współrzędne tej sumy w układzie lokalnym, czyli siły przekrojowe otrzymujemy mnożąc skalarnie wektor sumy przez odpowiednie wersory osi układu lokalnego. Mamy, więc:

$$F_x(B) = \bar{P}\bar{e}_x = 10 \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \frac{1}{\sqrt{3}} - 20 \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$F_y(B) = \bar{P}\bar{e}_y = 10 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + (-20)0 = -\frac{10}{\sqrt{2}},$$

$$F_z(B) = \bar{P}\bar{e}_z = 10 \left( -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) + 0 \left( -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) + (-20) \left( \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = -\frac{50}{\sqrt{6}}.$$

Wektor momentu względem punktu B sił przyłożonych do części BC otrzymamy z następującego iloczynu wektorowego:

$$\overline{M}(B) = \overline{BC} \times \overline{P}$$

Współrzędne wektora  $\overline{BC}$  w układzie globalnym wynoszą:  $\overline{BC}(1,1,1)$ . Nietrudno obliczyć, że:  $\overline{M}(B)(-20,30,-10)$

W układzie lokalnym współrzędne wektora momentu przyjmują wartości:

$$M_x(B) = \overline{M}(B)\overline{e}_x = -20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$M_y(B) = \overline{M}(B)\overline{e}_y = -20 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 10 \cdot 0 = 50 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

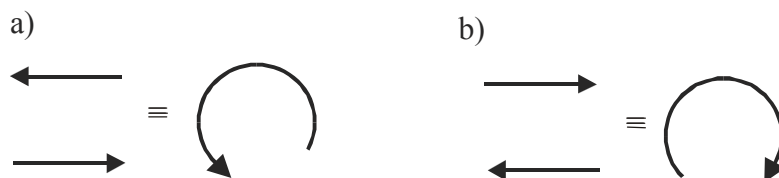
$$M_z(B) = \overline{M}(B)\overline{e}_z = -20 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 30 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{30}{\sqrt{6}}.$$

## 2.5 UKŁADY PŁASKIE

Z *układem płaskim* mamy do czynienia wówczas, gdy zarówno układ sił, jak i oś pręta leżą w jednej płaszczyźnie. W takim przypadku wystarczy rysunek odniesiony do dwóch osi układu. W zadaniu pokazanym na rys. 2.10 nie ma nawet potrzeby rysowania osi  $y$ . Łatwo ją sobie wyobrazić, jeśli narysowane są dwie pozostałe osie; kierunek jej jest, bowiem prostopadły do płaszczyzny rysunku, a zwrot wynika z prawoskrętnej orientacji układu.

Powstaje jednak problem, jak w płaszczyźnie rysunku narysować wektor momentu, którego kierunek jest zawsze prostopadły do płaszczyzny układu, a jedynie może mieć różny zwrot. Rozwiązaniem problemu jest narysowanie pary o danym wektorze momentu, leżącej właśnie w tej płaszczyźnie.

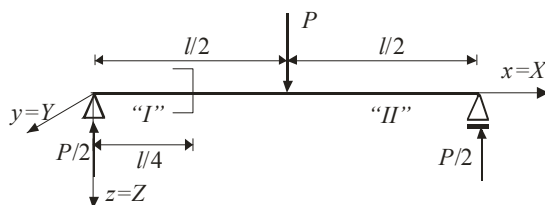
Ponieważ par o tym samym momencie może być nieskończenie wiele i wszystkie one, jak wiemy z *mechaniki teoretycznej*, tworzą zbiór, w którym określona jest relacja statycznej równoważności, (łatwo dowieść jest ona symetryczna, zwrotna i przechodnia), stąd możemy posługiwać się *reprezentantem* zbioru, przedstawiając go w postaci skierowanego łuku, jak pokazano na rys. 2.9a i 2.9b. Dzięki powyższej umowie wektor momentu zredukowanego układu sił będzie reprezentowany przez parę leżącą w płaszczyźnie zadania, którą w dalszym ciągu nazywać będziemy (niezbyt szczęśliwie) *momentem*.



Rys. 2.9

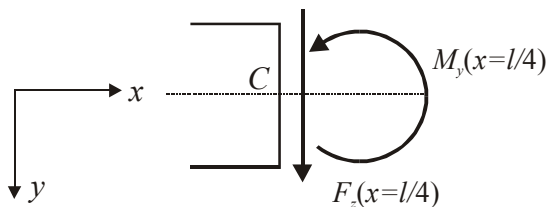
**Zadanie 2.5**

Dla pręta pokazanego na rys. 2.10, znaleźć siły przekrojowe w przekroju o odciętej  $x = l/4$ .



Rys. 2.10

W rozważanym przypadku, jakim jest pojedynczy pręt prosty, w płaskim zadaniu, układ globalny  $X, Y, Z$  pełni również rolę układu lokalnego  $x, y, z$ . Zgodnie z definicją szukać będziemy, w przyjętym układzie  $(x, y, z)$ , współrzędnych zredukowanego układu sił zewnętrznych przyłożonych do tej części pręta, która znajduje się po dodatniej stronie normalnej zewnętrznej przekroju, zgodnej ze zwrotem osi  $x$ .



Rys. 2.11

Przekrój poprzeczny oznaczono na rysunku symbolem 'C'. Układ sił zewnętrznych podlegający redukcji składa się z dwóch sił. Współrzędne wektora sumy tego układu są następujące:

$$F_x = 0, \quad F_z = -P/2 + P = +P/2.$$

Wektor momentu obu sił jest, jak wspomnieliśmy, równoległy do osi  $y$ , stąd pierwsza i trzecia współrzędna jest równa zero. Drugą współrzędną, czyli wartość momentu względem punktu o odciętej  $x = l/4$  wynosi:

$$M_y = +P/2 \cdot 3l/4 - P \cdot l/4 = +Pl/8.$$

Siły przekrojowe pokazano na rysunku 2.11. Nietrudno zauważyć, że układ sił przyłożonych do części I jest prostszy. Składa się, bowiem tylko z jednej siły (reakcji). Skoro, jak wykazaliśmy uprzednio, jest on równoważący układ przyłożony do części II, przeto aby otrzymać szukane siły przekrojowe wystarczy znaleźć współrzędne wektorów sumy i momentu układu „I” a następnie zmienić znaki na przeciwne.

Zmiany znaku dokonamy od razu pisząc przed klamrą „-”. Zgodnie z powyższym zapiszemy:

$$F_x = 0, \quad F_z = -[-P/2] = P/2.$$

Podobnie postąpimy obliczając wartość momentu:

$$M_y = -[-P/2 \cdot l/4] = Pl/8.$$

Jak widać otrzymaliśmy te same wartości określające siły w przekroju  $x = l/4$ .

## 2.6 FUNKCJE SIŁ PRZEKROJOWYCH

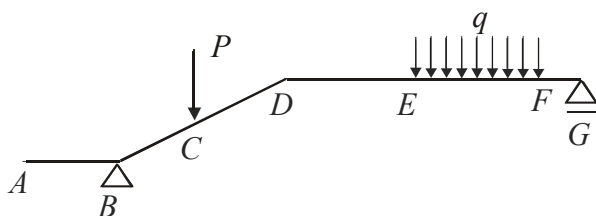
Jak pokażemy w części czwartej podręcznika, poprzez siły przekrojowe wyrażać będziemy rozkład sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym pręta, który z kolei będzie miał istotne znaczenie w procesie projektowania, a więc przy dobieraniu materiału, odpowiednich wymiarów przekroju itp. Stąd też wynika potrzeba znajomości wartości sił przekrojowych w każdym przekroju, aby móc znaleźć ich ekstremalne wartości. Najprostszą drogą ku temu celowi jest zbudowanie funkcji sił przekrojowych, w których zmienną niezależną będzie położenie przekroju poprzecznego w układzie lokalnym, zaś zmienną zależną kolejna siła przekrojowa.

Szukać więc będziemy następujących funkcji:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(x), & F_y &= F_y(x), & F_z &= F_z(x), \\ M_x &= M_x(x), & M_y &= M_y(x), & M_z &= M_z(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wypisanie równań określających szukane funkcje, a więc równań sił podłużnych, równań sił poprzecznych i równań momentów zginających i skręcających, różnić się będzie tylko tym od znajdowania sił przekrojowych w ustalonym punkcie (2.3), że teraz położenie przekroju poprzecznego określimy zmienną  $x$  układu lokalnego.

### 2.6.1 PUNKTY I PRZEDZIAŁY CHARAKTERYSTYCZNE



Rys. 2.12

Budując każdą z funkcji (2.4) nie zawsze będzie możliwe, aby bez korzystania z funkcji specjalnych opisać ją dla całego pręta jednym równaniem lub – inaczej – jednym przepisem. Z reguły

będziemy opisywać je większą ilością równań. W tym celu wprowadzimy *pojęcia punktów charakterystycznych i przedziałów charakterystycznych*.



*Punktami charakterystycznymi* nazywać będziemy:

- Początek i koniec pręta,
- Punkty przyłożenia sił i momentów skupionych,
- Początek i koniec obciążenia ciągłego,
- Punkty, w których pochodna funkcji opisującej oś pręta jest nieciągła.

*Przedziałem charakterystycznym* nazywamy przedział zawarty pomiędzy dwoma kolejnymi punktami charakterystycznymi. Na rys. 2.12 punkty charakterystyczne oznaczono dużymi literami.

## 2.6.2 RÓWNANIA SIŁ PRZEKROJOWYCH

Funkcje sił przekrojowych budować będziemy formułując równania osobno dla każdego przedziału charakterystycznego. Nie tracąc nic na ogólności, sposób budowania równań pokażemy na przykładach wybranych typów statycznie wyznaczalnych konstrukcji prętowych (rozdz. 2.7 – 2.11).

## 2.6.3 WYKRESY SIŁ PRZEKROJOWYCH

Analiza funkcji sił przekrojowych będzie znacznie wygodniejsza, jeśli sporządzimy ich obraz geometryczny. W tym celu przyjmujemy definicje układów odniesienia dla wykresów poszczególnych sił. Oś zmiennej niezależnej  $x$  już mamy określoną. Pozostaje przyjąć osie zmiennych zależnych. Przyjmować je będziemy wg następującej umowy:

- Zwroty osi zmiennych zależnych  $F_x$  i  $M_x$  przyjmujemy zgodnie ze zwrotem osi „ $z$ ” układu lokalnego, jeśli wykresy przedstawiamy w przestrzeni 2D, jeśli zaś wykresy prezentujemy w przestrzeni 3D, wówczas, z reguły, osie te wyznacza wektor  $\bar{e}(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ ;
- Zwroty osi zmiennych zależnych  $F_z$  i  $M_y$  (momentu pary, która leży w płaszczyźnie „ $xz$ ”) przyjmujemy zgodnie ze zwrotem osi „ $z$ ” układu lokalnego;
- Zwrot osi zmiennej zależnej  $F_y$  przyjmujemy zgodnie z osią „ $y$ ”, a zmiennej zależnej  $M_z$ , czyli momentu pary leżącej w płaszczyźnie „ $xy$ ”, co warto podkreślić<sup>1</sup>, niezgodnie ze zwrotem osi „ $y$ ”.

---

<sup>1</sup> Ważną tę umowę szczegółowo uzasadnimy na przykładzie analizowanym w zadaniu 2.6.

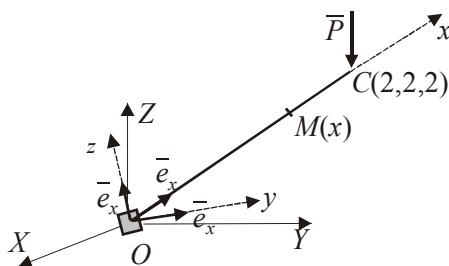
## 2.7 SIŁY PRZEKROJOWE W BELKACH

*Belką* nazywamy układ prętów o osiach prostoliniowych połączonych między sobą sztywno lub przegubowo, tak jednak, że wszystkie osie leżą na jednej prostej. Obciążenie belki stanowi dowolny układ sił.

### 2.7.1 BELKA PROSTA

*Belką prostą* nazywamy dowolnie obciążony pręt prostoliniowy, jednoprzęsłowy lub przewieszony tzn. taki, w którym co najmniej jedna z podpór nie znajduje się w krańcowym punkcie pręta.,.

#### Zadanie 2.6



Rys.2.13

Dla belki rozważanej w zadaniu 2.4 i pokazanej na rys. 2.13 należy wyznaczyć funkcje sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy.

W zadaniu 2.1 wyznaczyliśmy współrzędne wersorów lokalnego układu współrzędnych  $Oxyz$  i zapisaliśmy je w postaci macierzy:

$$\begin{matrix} \bar{e}_x \dots\dots\dots \\ \bar{e}_y \dots\dots\dots (\alpha_{ij}) = \\ \bar{e}_z \dots\dots\dots \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że dla zbudowania funkcji sił przekrojowych w rozważanym zadaniu, nie musimy wyznaczać sił reakcji. Układ sił zewnętrznych, przyłożonych do po dodatniej stronie przekroju poprzecznego, który będziemy redukować w dowolnie położonym punkcie pręta, stanowią jedynie siły czynne wobec braku w tej części więzów, a tym samym reakcji.

Zmienną niezależną funkcji sił przekrojowych jest odcinek  $x$  układu lokalnego, przeto wektor wodzący dowolnego punktu  $M(x)$  będzie miał współrzędne w układzie globalnym:

$$\overrightarrow{OM} = x\bar{e}_x \left( x\frac{1}{\sqrt{3}}, x\frac{1}{\sqrt{3}}, x\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Budując funkcje sił przekrojowych przecinamy pręt płaszczyzną do niego prostopadłą przechodzącą przez punkt  $M$ . Przekrój poprzeczny dodatnio zorientowany względem osi  $x$  układu lokalnego należy do części  $OM$ . Do punktu  $M$  redukować będziemy, więc układ sił przyłożonych do części  $MC$ .

Funkcje wektorowe sił przekrojowych:

$$\bar{F}(x)[F_x(x), F_y(x), F_z(x)] \text{ i } \bar{M}(x)[M_x(x), M_y(x), M_z(x)],$$

obliczamy w dwóch krokach. Pierwszy to obliczenie współrzędnych sumy i momentu w punkcie  $M$  w układzie globalnym, a drugi – obliczenie tych wielkości w układzie lokalnym. Zwróćmy uwagę, że w rozważanym przypadku mamy tylko jeden przedział charakterystyczny  $OC$ .

Niezależnie od położenia przekroju poprzecznego sumę wszystkich sił przyłożonych do części  $MC$  stanowi tylko wektor  $\bar{P}$ . Wektor sumy nie zależy więc od zmiennej  $x$ . Jego współrzędne w układzie globalnym wynoszą:

$$\bar{S}(x) = \bar{P}(10, 0, -20) = \overline{const}.$$

Siły przekrojowe: podłużną i poprzeczną otrzymamy natychmiast mnożąc skalarnie sumę przez odpowiednie wersory osi układu lokalnego. Mamy, więc:

$$F_x(x) = \bar{P}\bar{e}_x = 10\frac{1}{\sqrt{3}} + 0\frac{1}{\sqrt{3}} - 20\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$F_y(x) = \bar{P}\bar{e}_y = 10\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-20)0 = -\frac{10}{\sqrt{2}},$$

$$F_z(x) = \bar{P}\bar{e}_z = 10\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 0\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + (-20)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{50}{\sqrt{6}}.$$

Wektor momentu względem punktu  $M$  wyznacza iloczyn wektorowy:

$$\bar{M}(x) = \overline{MC} \times \bar{P},$$

wobec:  $\overline{MC} = \overline{OC} - \overline{OM}\left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  i  $\bar{P}(10, 0, -20)$  moment, w układzie globalnym, ma współrzędne:

$$M_x(x) = \left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-20) - \left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)0 = -20\left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_y(x) = \left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)10 - \left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(-20) = 30\left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_z(x) = \left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)0 - \left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)10 = -10\left(2 - x\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Równania momentów względem układu lokalnego przyjmują formę:

$$M_x(x) = \overline{M}e_x = -20\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + 30\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} - 10\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_y(x) = \overline{M}e_y &= -20\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 30\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 10\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)0 = \\ &= \frac{50}{\sqrt{3}}\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

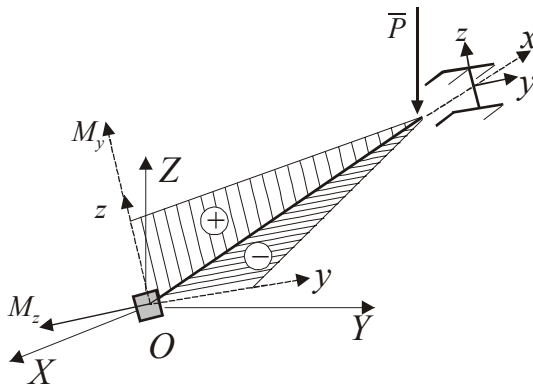
$$\begin{aligned} M_z(x) = \overline{M}e_z &= -20\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 30\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 10\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \\ &= -\frac{30}{\sqrt{6}}\left(2-x\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Wykresy wszystkich zbudowanych powyżej funkcji momentów sporządzimy zgodnie z przyjętymi zasadami w punkcie 2.6.3. Zwroty zmiennych zależnych momentów narysowano na rys. 2.14 zgodnie z przyjętą tam umową.

Wszystkie równania momentów są liniowe, przeto wystarczy znać wartości w dwóch punktach, aby sporządzić wykresy funkcji. Mamy, więc:

$$M_x(0) = 0; \quad M_y(0) = \frac{100}{\sqrt{2}}; \quad M_z(0) = -\frac{60}{\sqrt{6}}.$$

$$M_x(2\sqrt{3}) = 0; \quad M_y(2\sqrt{3}) = 0; \quad M_z(2\sqrt{3}) = 0.$$



Rys. 2.14

Wyjaśnimy teraz, dlaczego dla osi zmiennej zależnej  $M_z$  przyjęliśmy, w punkcie 2.6.3, tak oryginalny zwrot. Weźmy pod uwagę dowolną rzędną wykresu  $M_y$ . Ma ona wartość dodatnią. Oznacza to, że  $y$ -owa składowa wektora momentu ma zwrot zgodny z osią  $y$ . Para o takim wektorze, leżąca w płaszczyźnie  $xz$ , rozciąga te skrajne włókna pręta, które leżą po dodatniej stronie osi  $z$ . Weźmy teraz dowolną rzędną wykresu  $M_z$ . Ma ona wartość ujemną. Oznacza to, że  $z$ -owa składowa wektora momentu ma zwrot niezgodny z osią  $z$ . Para o takim wektorze rozciąga te skrajne włókna, które leżą po

dodatniej stronie osi  $y$ .

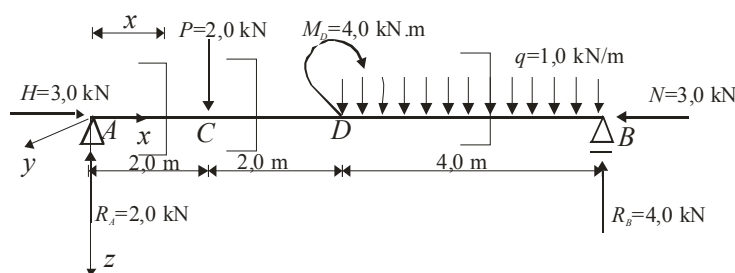
Widzimy, więc, że rzędne wykresów momentów znajdują się, w obu przypadkach, po stronie włókien rozciąganych. Dzięki przyjętej umowie o zwrotach osi zmiennych zależnych układów, w których sporządzamy wykresy momentów zginających, rzędne wykresów niezależnie od znaku zawsze będą odkładane po stronie włókien rozciąganych.

**Zadanie 2.7**

Dla belki prostej, obciążonej jak na rys. 2.15 napisać równania sił przekrojowych i sporządzić ich wykresy. Początek układu lokalnego przyjąć w punkcie A.

Punkty charakterystyczne oznaczono dużymi literami: A, B, C, D; wyznaczają one trzy przedziały charakterystyczne

Do budowy równań w poszczególnych przedziałach charakterystycznych możemy przystąpić oczywiście dopiero wtedy, gdy znamy wszystkie siły zewnętrzne (czynne i bierne) przyłożone do schematu konstrukcji. Wyznaczamy, zatem reakcje w punktach A i B.



Rys. 2.15

Jak nietrudno obliczyć długości ich wynoszą:  $R_A = 2,0 \text{ kN}$ ,  $R_B = 4,0 \text{ kN}$ . Zanim przeprowadzimy redukcje w kolejnych przedziałach charakterystycznych zwróćmy uwagę, że mamy tu do czynienia z zadaniem płaskim określonym w układzie  $xz$ . W takim przypadku druga współrzędna sumy jest tożsamościowo równa zeru ( $F_y(x) \equiv 0$ ) a także, jak wspomnieliśmy powyżej, pierwsza i trzecia współrzędna wektora momentu są także tożsamościowo równe zeru ( $M_x(x) \equiv 0$ ,  $M_z(x) \equiv 0$ ). Będziemy, zatem budować jedynie następujące funkcje:  $F_x(x)$ ,  $F_z(x)$  i  $M_y(x)$ .

**Przedział  $0 < x < 2,0$** 

Wybermy w tym przedziale dowolny punkt na osi  $x$ , w którym dokonamy przekroju poprzecznego. Podejmujemy teraz decyzję, który układ sił zewnętrznych będziemy redukować: na lewo czy na prawo od przyjętego przekroju. Oczywiście redukować będziemy ten, który znajduje się na lewo od przekroju poprzecznego, albowiem jest prostszy, składa się tylko z jednej siły  $R_A$ . Pamiętać jednak musimy o konieczności zmiany znaku („-” przed klamrą). Redukując wybrany układ do środka ciężkości przekroju poprzecznego znajdujemy bez kłopotu:

$$F_x(x) = -[+3] = -3 \text{ kN},$$

$$F_z(x) = -[-2] = +2 \text{ kN},$$

$$M_y(x) = -[-2 \cdot x] = 2x \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Równania sił podłużnych, poprzecznych i momentów w drugim przedziale charakterystycznym zawartym pomiędzy punktami C i D znajdziemy postępując analogicznie. Podobnie jak i w pierwszym przedziale wygodniej będzie redukować układ sił zewnętrznych przyłożonych po lewej stronie przekroju.

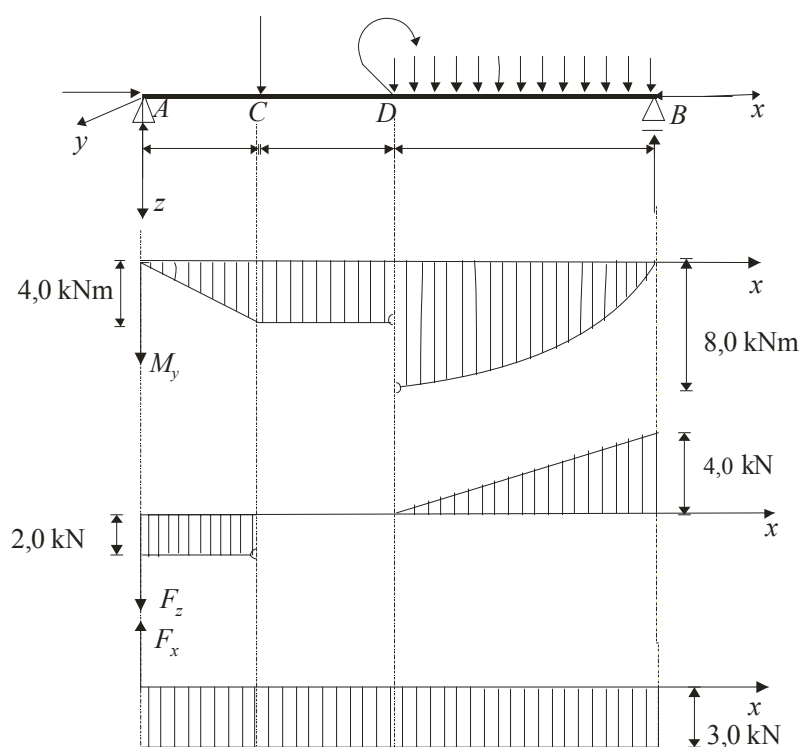
**Przedział  $2 < x < 4$** 

$$F_x(x) = -[+3] = -3 \text{ kN},$$

$$F_z(x) = -[-2 + 2] = 0 \text{ kN},$$

$$M_y(x) = -[-2 \cdot x + 2(x - 2)] = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

W trzecim przedziale charakterystycznym  $D - B$  szukać będziemy sił przekrojowych podobnie, z tym jednak, że redukować będziemy układ sił zewnętrznych znajdujących się na prawo od przekroju a więc ten, który bezpośrednio wyznacza siły przekrojowe:



Rys. 2.16

**Przedział  $4 < x < 8$** 

$$F_x(x) = -3 \text{ kN},$$

$$F_z(x) = -4 + 1(8 - x) = 4 - x \text{ kN},$$

$$M_y(x) = 4(8 - x) - 1(x - 8) \frac{1}{2}(x - 8) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Uważny czytelnik z pewnością zwrócił uwagę na zapis poszczególnych przedziałów charakterystycznych w postaci silnych nierówności. Czyżby oznaczało to, że w punktach charakterystycznych funkcje sił przekrojowych są nieokreślone? W szczególnych przypadkach rzeczywiście ma to miejsce.

Obliczmy lewo- i prawostronną granicę funkcji  $F_z(x)$  w punkcie  $x = 2$ . Wprost z definicji siły poprzecznej wnosimy, że:

$$\lim_{x \rightarrow 2_-} F_z(x) = 2, \text{ a } \lim_{x \rightarrow 2_+} F_z(x) = 0.$$

Ponieważ obie granice są różne, wynika stąd, że funkcja w punkcie  $x=2$  jest nieciągła. Podobnie obliczmy lewo- i prawostronną granicę funkcji  $M_y(x)$  w punkcie  $x = 4$ . Wprost z definicji momentu wnosimy, że:

$$\lim_{x \rightarrow 4_-} M_y(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 4_+} M_y(x) = 8.$$

Ponieważ obie granice są różne, więc w punkcie  $x = 4$  funkcja jest nieciągła.

Mając równania sił przekrojowych oraz układy odniesienia nietrudno sporządzić stosowne wykresy. Przedstawiono je na rys. 2.16. Zwróćmy uwagę na wykresy w punktach nieciągłości. Nie zawsze będziemy tak je rysować. Z reguły, naruszając formalne zasady, będziemy łączyć linie, przedstawiając wykresy w „ciągłej” postaci.

Analiza równań sił przekrojowych w powyższym zadaniu podpowiada łatwe w dowodzie twierdzenia, a mianowicie:

- w punktach przyłożenia skupionej siły zewnętrznej o niezerowej składowej prostopadłej do osi funkcja siły poprzecznej jest nieciągła;
- w punktach przyłożenia skupionej siły zewnętrznej o niezerowej składowej równoległej do osi funkcja siły podłużnej jest nieciągła;
- w punktach przyłożenia skupionego momentu zewnętrznego funkcja momentu jest nieciągła.

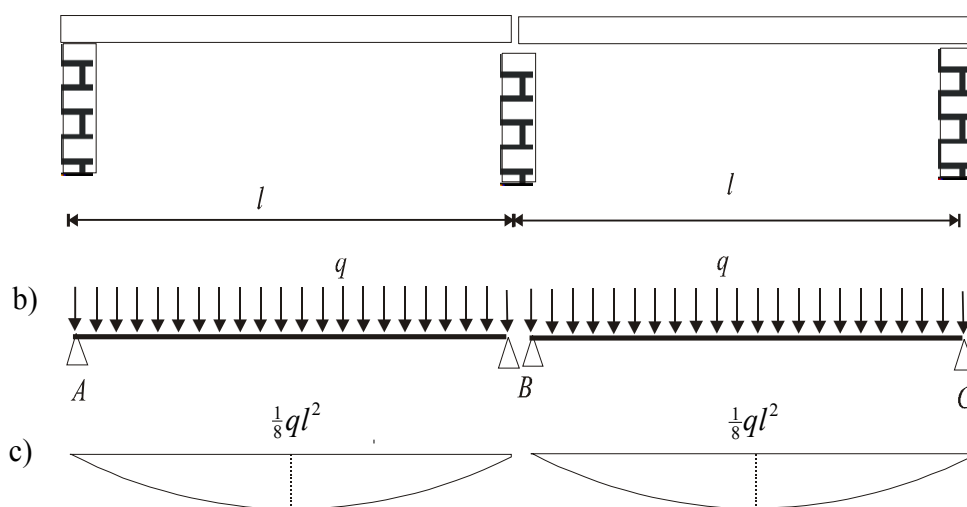
W punktach nieciągłości sił przekrojowych nie definiujemy żadnej wartości tych sił.

### 2.7.2 BELKI WIELOPRZĘŚŁOWE, PRZEGUBOWE, STATYCZNIE WYZNACZALNE

Rozważmy drugi przykład konstrukcji belkowej, tym razem wieloprzęśłowej, statycznie wyznaczalnej, to jest takiej, w której reakcje zastępujące więzy zewnętrzne (łącznie belkę z podłożem lub inną konstrukcją) oraz wewnętrzne (w przegubach łączących ze sobą poszczególne belki) mogą być obliczone z równań równowagi.

Podstawową przesłanką stosowania belek wieloprzęśłowych, przegubowych (przy przekryciach wymagających kilku przęseł) jest oszczędniejsze zużycie materiału w porównaniu z belkami prostymi, jednoprzęsłowymi. Ideę stosowania tego typu belek przedstawimy na prostym przykładzie przekrycia dwóch

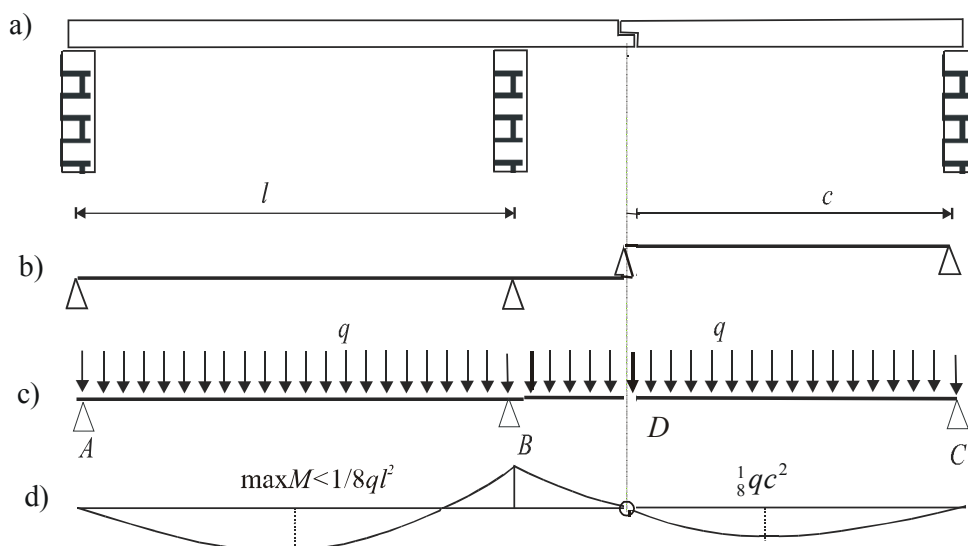
pomieszczeń stropem, którego elementami nośnymi są belki. Jak pokazano na rys. 2.17a konstrukcję możemy wykonać z dwóch belek jednoprzęsłowych. Schemat zastosowanego rozwiązania przedstawiono na rys., 2.17b. Jeśli uwzględnić tylko ciężar własny stropu, to obie belki obciążone będą ciężarem jednostajnie rozłożonym o gęstości  $q$ .



Rys. 2.17

Wykresy momentów przedstawia rys. 2.17c. W środku rozpiętości każdej belki moment przyjmuje swoje maksimum, które wynosi  $ql^2/8$ .





Rys. 2.18

Wartość tego momentu, jak się później przekonamy, będzie miała bezpośredni wpływ na wymiary belek.

Inne rozwiązanie konstrukcyjne belek stropowych dla tego samego przekrycia przedstawiono na rys. 2.18. Belkę  $A-B$  – w porównaniu z pierwszym rozwiązaniem – przedłużono do punktu  $D$  i na niej oparto drugą belkę  $D-C$ .

Korzyści stąd wynikające widoczne są w sposób natychmiastowy:

- belka  $D-C$  ma rozpiętość  $c$  mniejszą od  $l$ , a więc moment maksymalny występujący również w połowie rozpiętości wynosić będzie  $qc^2/8$  i będzie on istotnie mniejszy od  $ql^2/8$ ;
- belka  $D-C$  swoim lewym końcem opiera się o belkę  $A-B-D$  i obciąża ją siłą przeciwną do reakcji  $R_D$  obliczonej dla belki  $D-C$ ; siła ta oraz obciążenie ciągłe na odcinku  $B-D$  istotnie zmniejszają moment w przęśle  $A-B$  w stosunku do momentu  $ql^2/8$  w pierwszym rozwiązaniu konstrukcyjnym.

Zwróćmy jeszcze uwagę na punkt  $D$  na rys. 2.18c; belka  $D-C$  nie może przemieścić się w kierunku poziomym na skutek odpowiedniej konstrukcji jej oparcia o belkę  $A-B-D$  ani też nie może niezależnie przemieścić się w kierunku pionowym (np. w dół); może natomiast doznać niezależnego obrotu w punkcie  $D$  przy ugięciu. Punkt  $D$  możemy, zatem nazwać *przegubem*, a całą belkę schematycznie przedstawić tak jak na rys. 2.18c.

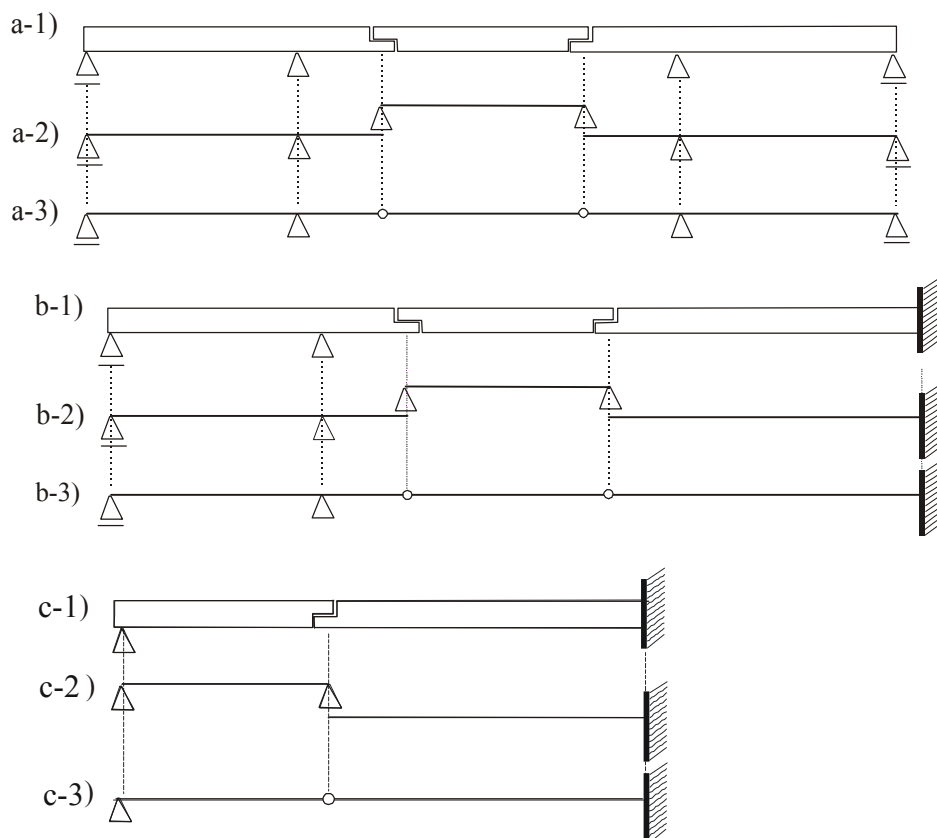
Szczegółowym wyznaczeniem sił przekrojowych – wykres momentów pokazano na rys. 2.18d nie dokumentując obliczeniami – zajmiemy się nieco dalej. Teraz przyjrzymy się kilku rozwiązaniom belek ciągłych przegubowych oraz ich schematom obliczeniowym (rys. 2.19a, b, c). Belki, które choć jednym końcem

opierają się na innych belkach nazywać będziemy *drugorzędnymi*, zaś te, które są bezpośrednio związane z podłożem – *podstawowymi*.

Znajdowanie sił przekrojowych w dowolnym przekroju poprzecznym belki wieloprzęsłowej przegubowej nie przedstawia żadnych trudności, jeśli potrafimy poprawnie wyobrazić sobie pracę takiej konstrukcji lub, innymi słowy, jeśli poprawnie określimy belki drugorzędne i podstawowe. Wyznaczenie sił przekrojowych rozpoczynamy od belek drugorzędnych, które są belkami prostymi.

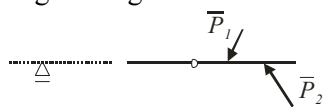
Po wyznaczeniu reakcji i sił przekrojowych w belkach drugorzędnych obciążamy belki podstawowe siłami pochodzącymi od belek drugorzędnych (siły przeciwne do sił reakcji tych belek), otrzymując znów belki proste jednoprzęsłowe, dla których wyznaczenie  $M_y(x)$ ,  $F_z(x)$ ,  $F_x(x)$  omówiliśmy w poprzednim punkcie.

Niekiedy wygodniej będzie jednak postępować nieco inaczej, a mianowicie wykorzystując poznane w mechanice teoretycznej twierdzenia o równowadze ciała unieruchomionego w jednym punkcie. W myśl tego twierdzenia warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi ciała unieruchomionego w jednym punkcie jest zerowanie się momentu wszystkich sił działających na belkę względem punktu unieruchomienia. Jeśli zatem weźmiemy pręt, którego jeden koniec zakończony jest przegubem (rys. 2.20), to warunkiem równowagi jest moment równy zero od wszystkich sił do niego przyłożonych względem przegubu.



Rys. 2.19

W przypadku belek wieloprzęślowych przegubowych muszą więc zachodzić warunki zerowania się momentu wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych), znajdujących się po jednej stronie przegubu względem punktu przegubowego.



Rys. 2.20

Warunki te nazywać będziemy w dalszym ciągu krótko *równaniami przegubów*. Równania te oraz równania równowagi dla całej belki dają możliwość wyznaczenia wszystkich sił biernych, czyli reakcji, jeśli oczywiście wszystkich niezależnych równań

będzie tyle, ile jest niewiadomych sił zastępujących więzy. W przeciwnym przypadku belka będzie statycznie niewyznaczalna (jeśli równań będzie mniej niż reakcji) lub geometrycznie zmienna (jeśli równań będzie więcej niż niewiadomych reakcji). Po wyznaczeniu reakcji znany już będzie cały układ sił zewnętrznych

przyłożonych do belki; siły przekrojowe  $M_y(x)$ ,  $F_z(x)$ ,  $F_x(x)$  wyznaczamy według ogólnych zasad.

Oba omówione sposoby zilustrujemy przykładem liczbowym.

### Zadanie 2.8

Znaleźć funkcje  $M_y(x)$ ,  $F_z(x)$ ,  $F_x(x)$  oraz sporządzić szkice wykresów dla belki pokazanej na rys. 2.21 (moment  $M_o$  - przyłożony jest w punkcie  $B$ ).

**Sposób 1.** Obliczanie belki rozpoczynamy od wyznaczenia schematu pracy, to jest od określenia belek drugorzędnych i podstawowych. Schemat ten przedstawiono na rys. 2.21b. Zgodnie z nim rozwiązujemy najpierw belkę  $D-E$ . Reakcje  $R_D$  i  $R_E$  obliczamy natychmiast:

$$R_D = R_E = \frac{ql}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2,0 \text{ kN}.$$

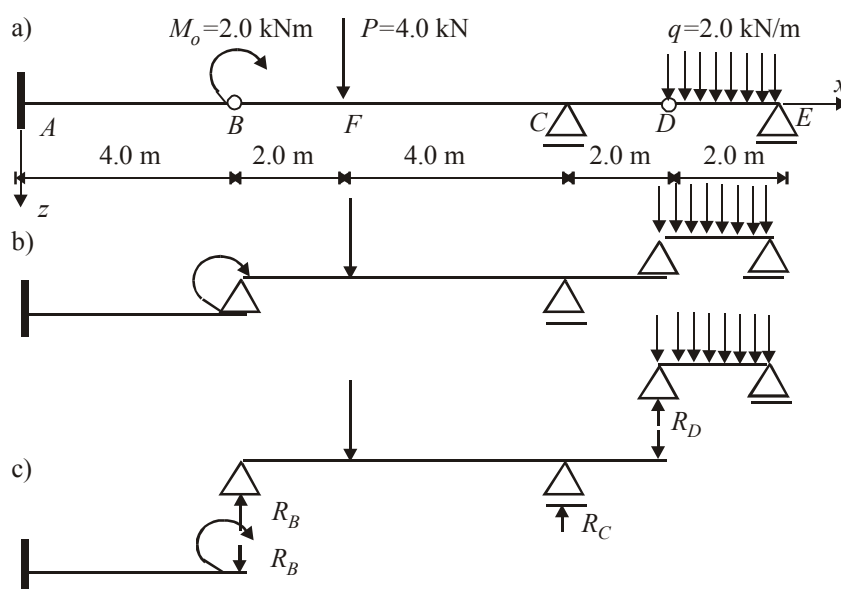
Wykres momentów dla tej belki będzie parabolą drugiego stopnia przyjmującą swoje maksimum w środku rozpiętości:

$$\max M_y^{DE} = \frac{gl^2}{8} = \frac{2 \cdot 2^2}{8} = 1,0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Wykresem sił poprzecznych będzie linia prosta; wystarczy więc wyznaczyć wartość tej funkcji w dwóch punktach, np.  $D$  i  $E$ :

$$F_z^D = R_D = 2,0 \text{ kN}, \quad F_z^E = -R_E = -2,0 \text{ kN}.$$

Szkice wykresów  $M_y(x)$ ,  $F_z(x)$  przedstawiono na rys. 2.22, na odcinku  $D-E$ .



Rys. 2.21

Przechodzimy teraz do obliczenia belki  $B-C-D$ . Belka ta obciążona jest dwiema siłami skupionymi: w punkcie  $D$  siłą  $R_D = 2,0$  kN (zwróćmy uwagę, iż zwrot tej siły w tym przypadku jest przeciwny do zwrotu reakcji w belce  $D-E$ ) oraz siłą  $P = 4,0$  kN w odległości  $2,0$  m od podpory  $B$ . Z warunku zerowania się momentu wszystkich sił przyłożonych do rozpatrywanej belki względem punktu  $B$  otrzymujemy równanie:

$$R_D \cdot 8 - R_C \cdot 6 + P \cdot 2 = 0.$$

Skąd znajdujemy:

$$R_C = \frac{R_D \cdot 8 + P \cdot 2}{6} = \frac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 2}{6} = 4,0 \text{ kN}.$$

Z warunku zerowania się momentu względem punktu  $C$  mamy:

$$\begin{aligned} R_B \cdot 6 - P \cdot 4 + R_D \cdot 2 &= 0, \\ R_B &= \frac{-R_D \cdot 2 + P \cdot 4}{6} = \frac{-2 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{6} = 2,0 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Dla kontroli poprawności obliczeń reakcji sprawdzamy warunek konieczny, tzn. czy suma rzutów wszystkich sił na oś  $z$  jest równa zero:

$$R_B - P + R_C - R_D = 2,0 - 4,0 + 4,0 - 2,0 = 0.$$

Wykresem momentów w każdym przedziale charakterystycznym będzie linia prosta, wystarczy więc obliczyć wartości momentów w punktach charakterystycznych:

$$\begin{aligned} M_y^C &= -R_D \cdot 2 = -2 \cdot 2 = -4,0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \\ M_y^F &= R_B \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4,0 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

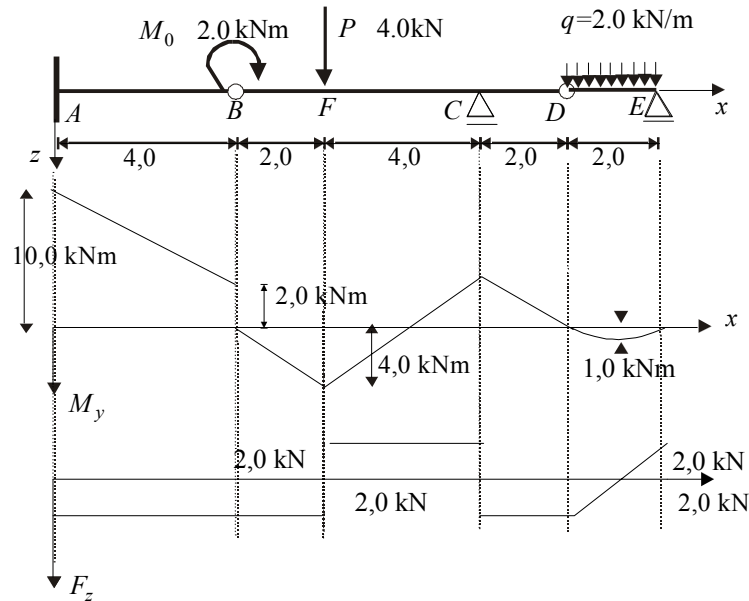
Wykres sił poprzecznych będzie w każdym przedziale charakterystycznym stały, przeto wystarczy obliczyć siłę poprzeczną w dowolnym punkcie każdego z przedziałów charakterystycznych. Otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned} F_z^{D-C}(x) &= R_D = 2,0 \text{ kN}, \\ F_z^{C-F}(x) &= R_D - R_C = 2,0 - 4,0 = -2,0 \text{ kN}, \\ F_z^{B-F}(x) &= R_B = 2,0 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Wykresy momentów i sił poprzecznych przedstawiono na rys 2.22 (odcinek  $B-F-C-D$ ).

Przechodzimy teraz do belki podstawowej  $A-B$ . Obciążona jest ona siłą skupioną  $R_B = 2,0$  kN przyłożoną w punkcie  $B$  (uwaga na zwrot) oraz momentem skupionym  $M_0 = 2,0$  kNm, przyłożonym na lewo od punktu  $B$ . W tym szczególnym przypadku belki (wspornik) wykresy momentów i sił poprzecznych możemy sporządzić bez konieczności wyznaczania reakcji w punkcie  $A$ . Po prostu redukować będziemy układ sił zewnętrznych, przyłożonych

zawsze na prawo od przekroju poprzecznego. Wykres momentów będzie linią prostą, wystarczy przeto wyznaczyć wartości  $M_y(x)$  w dwóch punktach charakterystycznych:



Rys. 2.22

$$M_y^B = -M_0 = -2,0 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_y^A = -M_0 - R^B \cdot 4 = -2,0 - 2,0 \cdot 4 = -10,0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Równanie sił poprzecznych dla ostatnio rozważanej belki ma postać:  $F_z(x) = 2$ . Wykres przedstawiono na rys. 2.22 na odcinku A-B, otrzymując w ten sposób szukane szkice wykresów dla całej belki.

**Sposób 2.** Rozwiązanie rozpoczynamy od obliczenia reakcji w więzach A, C, E (rys. 2.22). W tym celu wykorzystamy równania równowagi i równania przegubów.

- Równania równowagi dla całej belki:

$$M_y^A = 0; \quad R^E \cdot 14 - q \cdot 2 \cdot 13 + R^C \cdot 10 - P \cdot 6 - M_0 - M_u =$$

$$\underline{14R^E + 10R^C + M_u - 78 = 0},$$

$$S_x = 0; \quad \underline{H = 0},$$

$$S_z = 0; \quad R^A - P + R^C - q \cdot 2 + R^E = \underline{R^A + R^C + R^E - 8,0 = 0}.$$

- Równania przegubów:

$$M^D(Z_p) = 0; \quad R^E \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = \underline{2R^E - 4 = 0},$$

$$M^B(Z_l)=0; \quad R^A \cdot 4 - M_u + M_0 = 4R^A - M_u + 2 = 0.$$

Rozwiązując podkreślony układ pięciu równań znajdujemy:

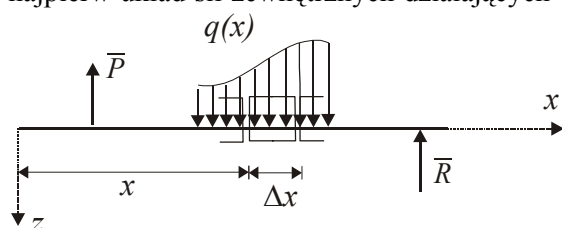
$$R^A = 2,0 \text{ kN}, \quad R^C = 4,0 \text{ kN}, \quad R^E = 2,0 \text{ kN}, \quad M_u = 10,0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

W ten sposób znamy wszystkie siły działające na belkę i możemy obliczać momenty i siły poprzeczne w każdym przedziale charakterystycznym według ogólnych zasad otrzymując wykresy przedstawione na rys. 2.22

Do wyznaczania funkcji sił przekrojowych i ich wykresów dla innych konstrukcji prętowych wrócimy w drugim kolejnym rozdziale. W najbliższym, rozważymy niektóre zależności różniczkowe pomiędzy funkcjami sił przekrojowych a także pomiędzy tymi siłami a gęstością sił zewnętrznych. Uważny czytelnik mógł już zauważyć pewne zależności w czasie rozwiązywania dotychczasowych zadań.

## 2.8 ZALEŻNOŚCI RÓŻNICZKOWE POMIĘDZY SIŁAMI PRZEKROJOWYMI I GĘSTOŚCIĄ SIŁ ZEWNĘTRZNYCH

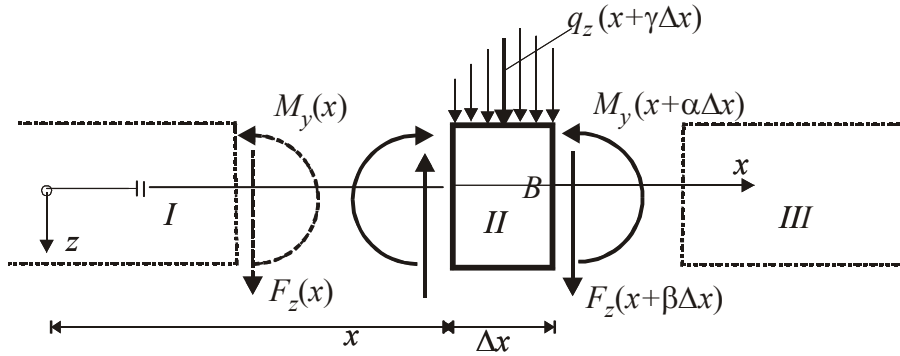
Powróćmy do równań momentów i sił poprzecznych rozpisanych w poszczególnych przedziałach charakterystycznych rozważanych przykładów. Patrząc na równania momentów i sił poprzecznych spostrzegamy, że we wszystkich przedziałach siła poprzeczna jest pochodną momentu. Nie jest to przypadek, jeśli pręt jest prostoliniowy, co postaramy się udowodnić. Rozważmy najpierw układ sił zewnętrznych działających w płaszczyźnie  $xz$ , pokazany na rys.



Rys. 2.23

2.23 (nie pokazano na tym rysunku sił równoległych do osi belki, bowiem nie wnoszą one nic do zależności, które zamierzamy wyprowadzić). Jeśli belka jest w równowadze, wówczas układ tych sił jest równoważny układowi zerowemu.

Z rozpatrywanego pręta wytnijmy element o długości  $\Delta x$  przekrojami poprzecznymi w punktach o odciętych:  $x$  i  $x + \Delta x$ . Element ten przedstawiono na rys. 2.24. Na rysunku tym, w przekroju  $x + \Delta x$ , zgodnie z definicją sił przekrojowych, przedstawiono zredukowany układ sił zewnętrznych przyłożony do części III:  $M_y(x + \Delta x)$ ,  $F_z(x + \Delta x)$ .



Rys. 2.24

Układ sił przekrojowych przyłożony do ścianki poprzecznej części *I*:  $M_y(x)$ ,  $F_z(x)$  jest równoważny układowi sił zewnętrznych przyłożonych do części *II* i *III* a przeciwny do układu  $(Z_I)$ . Zgodnie z zasadą akcji i reakcji układ sił działających na lewą ściankę wyciętego elementu *II* będzie równoważny układowi  $(Z_I)$ . Zatem na wycięty element działa układ równoważny  $(Z_I) + (Z_{II}) + (Z_{III})$ , który jest równoważny układowi  $(Z)$  będącemu z założenia równoważnym układowi zerowemu. Wynika z tego, że suma wszystkich sił przyłożonych do wyciętego elementu, a także moment tego układu względem dowolnego punktu są równe zero.

Zanim rozpiszemy te warunki, wykorzystamy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej:

$$M_z(x + \Delta x) = M_z(x) + \frac{dM_z(x + \alpha \Delta x)}{dx} \Delta x, \quad \alpha \in (0,1)$$

$$F_z(x + \Delta x) = F_z(x) + \frac{dF_z(x + \beta \Delta x)}{dx} \Delta x, \quad \beta \in (0,1)$$

Założymy ponadto, że w punkcie  $x + \gamma \Delta x$  wartość  $q_z(x + \gamma \Delta x)$  jest średnią gęstością obciążenia z przedziału  $(x, x + \Delta x)$ ;  $\gamma \in (0,1)$ .

Wypisując równania równowagi, otrzymujemy:

- równość zera trzeciej ( $S_z$ ) współrzędnej sumy ( $\sum S_z = 0$ )

$$-F_z(x) + q_z(x + \gamma \Delta x) \Delta x + F_z(x) + \frac{dF_z(x + \beta \Delta x)}{dx} \Delta x = 0,$$

- równość zera momentu względem punktu *B* ( $\sum M_B = 0$ ):

$$-M_y(x) - F_z(x) \Delta x + q_z(x + \gamma \Delta x) \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} + M_y(x) + \frac{dM_y(x + \alpha \Delta x)}{dx} \Delta x = 0.$$



W pierwszej równości redukują się  $F_z(x)$  i  $-F_z(x)$ , w drugiej zaś  $M_y(x)$  i  $-M_y(x)$ . Po redukcji i po podzieleniu obu równań przez  $\Delta x$  mamy:

$$q_z(x + \gamma\Delta x) + \frac{dF_z(x + \beta\Delta x)}{dx} = 0,$$

$$-F_z(x) + q_z(x + \gamma\Delta x)\Delta x \cdot \frac{1}{2} + \frac{dM_y(x + \alpha\Delta x)}{dx} = 0.$$

Biorąc w powyższych związkach obustronną granicę przy  $\Delta x \rightarrow 0$ , otrzymujemy następujące zależności w punkcie o odciętej  $x$ :

$$\frac{dF_z(x)}{dx} = -q_z(x),$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = F_z(x).$$
(2.5)

Różniczkując drugą z powyższych zależności względem  $x$  i wykorzystując pierwszą otrzymujemy kolejną ważną zależność:

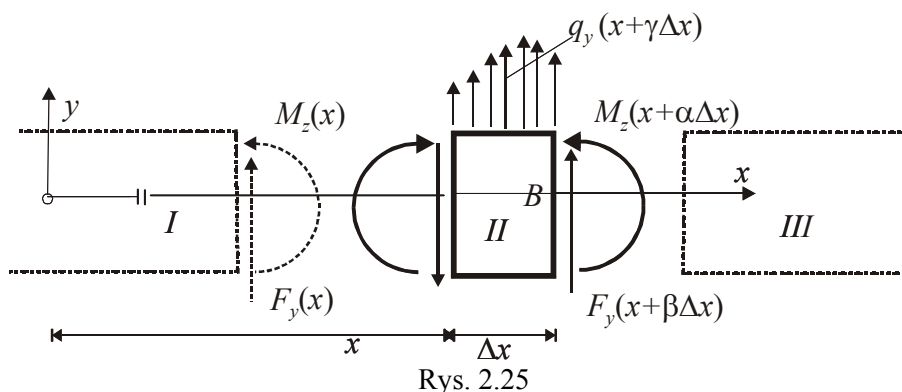
$$\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = -q_z(x).$$
(2.6)

Wyprowadzone różniczkowe zależności w postaci wzorów (2.5) i (2.6) dotyczą sił poprzecznych, momentu i gęstości obciążenia leżących w płaszczyźnie  $xz$ . Czytelnikowi pozostawiamy wykazanie następujących zależności między siłami leżącymi w płaszczyźnie  $xy$  (rys. 2.25):

$$\frac{dF_y(x)}{dx} = -q_y(x),$$
(2.7)

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = -F_y(x),$$
(2.8)

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q_y(x)$$
(2.9)



Rys. 2.25

Do równań (2.5) – (2.9) będziemy często wracać. Odgrywają one ważną rolę w analizie statyczno wytrzymałościowej belki prostej. W tym miejscu zwróćmy uwagę na:

1. Korzyści, jakie płyną z tych relacji przy sporządzaniu wykresów sił przekrojowych. Mianowicie:

- jeśli w przedziale charakterystycznym  $q(x) \equiv 0$ , wówczas funkcja  $F(x) = \text{const}$ , wystarcza wtedy określić wartość tej funkcji w jednym przekroju, aby móc narysować ją w całym przedziale; moment natomiast jest funkcją liniową i do jej wykreślenia wystarcza znajomość wartości momentu w dwóch punktach tego przedziału (z reguły określamy je w punktach charakterystycznych),
- jeśli w przedziale charakterystycznym  $q(x) = \text{const}$ , wówczas  $F(x)$  jest funkcją liniową, a moment parabolą drugiego stopnia.

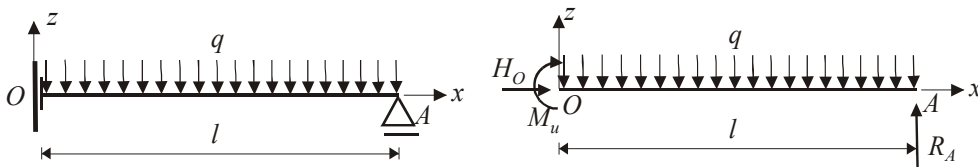
2. Fakt, że z zależności (2.6) lub (2.9) można także wyznaczyć funkcję momentów; obie bowiem relacje stanowią proste niejednorodne równania różniczkowe zwyczajne, o stałych współczynnikach, dla których nietrudno określić warunki brzegowe, a które w dalszym ciągu nazywać będziemy *warunkami statycznymi*.

### Zadanie 2.9

Wykorzystując zależności różniczkowe pomiędzy funkcjami: gęstością obciążenia belki i siłami przekrojowymi wyznaczyć równania sił przekrojowych w belce pokazanej na rys. 2.26a, w przyjętym na rysunku układzie współrzędnych.

a)

b)



Rys. 2.26

Wobec  $q_z(x) = -q = \text{const}$  równanie różniczkowe (2.6) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q.$$

Z rys. 2.26a odczytujemy warunki brzegowe:

$$F_z(0) = 0 \quad \text{ i } \quad M_y(l) = 0$$

Całkując dwukrotnie równanie różniczkowe otrzymujemy:

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = qx + c = F_z(x) \quad \Rightarrow \quad M_y(x) = \frac{1}{2}qx^2 + cx + d$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych otrzymujemy równania sił przekrojowych:

$$F_z(x) = qx,$$

$$M_y(x) = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}ql^2.$$

Zwróćmy jeszcze uwagę, że gdybyśmy budowali równania sił przekrojowych zgodnie z definicją, wówczas należałoby wprawdzie obliczyć siły zastępujące więzy, pokazane na rys. 2.26b.

## 2.9 SIŁY PRZEKROJOWE W RAMACH

*Ramą nazywamy układ prętów prostoliniowych, połączonych w węzłach w sposób sztywny to jest taki, że w procesie deformacji nie zmienia się kąt pod jakim schodzą się te pręty w węźle.*

*Ramą płaską nazywamy układ prętów prostoliniowych, leżących w jednej płaszczyźnie i obciążonych siłami leżącymi w tej samej płaszczyźnie. Przykłady ramy płaskiej (2D) i ramy - 3D pokazano na rysunkach 2.27 i 2.29.*

Zasady budowy funkcji sił przekrojowych pozostają takie same jak w przypadku belek prostych. Po wyznaczeniu sił reakcji, budujemy w każdym przęcie ramy układ lokalny, do którego odnosimy siły przekrojowe.

Rozwiązanie pokażemy na konkretnym przykładzie.

### Zadanie 2.10

Dana jest rama pokazana na rys. 2.27. Należy zbudować równania sił przekrojowych w każdym przedziale charakterystycznym oraz sporządzić wykresy tych sił.

- Obliczenie reakcji

Z warunku równowagi sił zewnętrznych układu zerowemu otrzymujemy w układzie globalnym X, Y, Z następujące równania oraz wynikające z nich siły reakcji:

$$S_Z = H - qa = 0 \Rightarrow H = qa,$$

$$S_X = R - P = 0 \Rightarrow R = P,$$

$$M_Y(A) = M_A + M_B - Pa + qa \frac{3}{2}a = 0 \Rightarrow M_A = -\frac{3}{2}qa^2.$$

- Równania sił przekrojowych

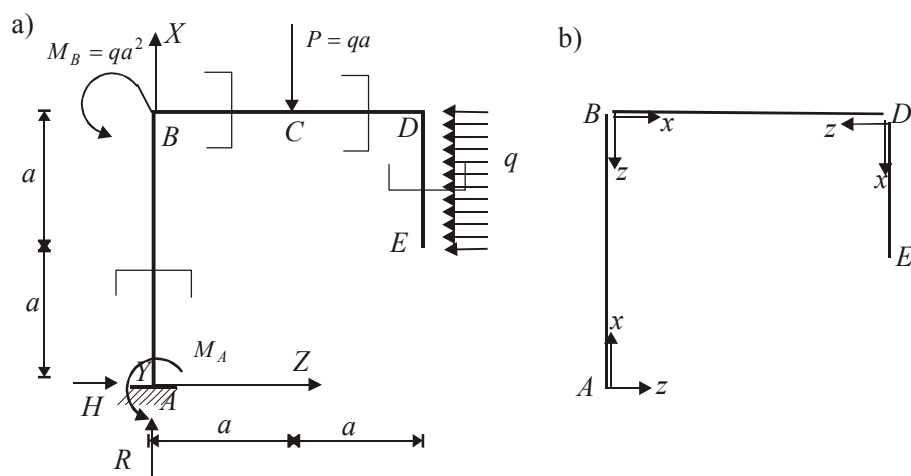
Dla każdego pręta ramy, jak pokazano na rysunku 2.27b przyjęto osobny układ lokalny – dla pręta AB o początku w punkcie A, dla pręta BD w punkcie B i dla pręta DE w D. Jak nietrudno zauważyć lokalna oś  $y$  w każdym przypadku ma zwrot zgodny z normalną zewnętrzną płaszczyzny rysunku. Na rys. 2.27a znakiem „[„, wskazano poszczególne przedziały charakterystyczne, dla których budowane będą funkcje sił przekrojowych.

Pręt DE:

$$0 < x < a \begin{cases} F_x(x) = 0, \\ F_z(x) = q(a-x), \\ M_y(x) = -\frac{1}{2}q(a-x)^2. \end{cases}$$

Pręt BD:

$$a < x < 2a \begin{cases} F_x(x) = -qa, \\ F_z(x) = 0, \\ M_y(x) = -\frac{1}{2}qa^2. \end{cases} \quad 0 < x < a \begin{cases} F_x(x) = -qa, \\ F_z(x) = P = qa, \\ M_y(x) = -\frac{1}{2}qa^2 - P(a-x) = -\frac{3}{2}qa^2 + qax. \end{cases}$$



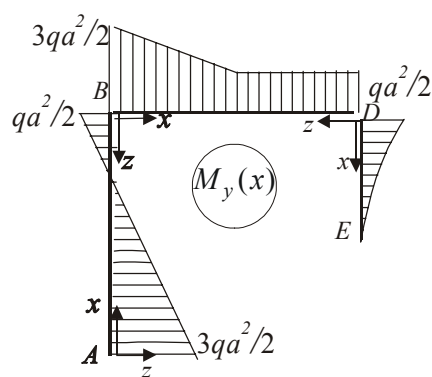
Rys. 2.27

Pręt AB:

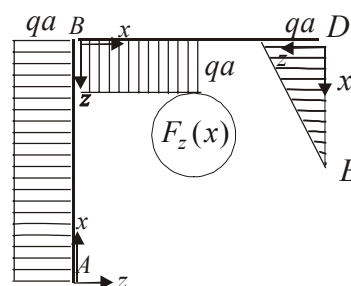
$$0 < x < 2a \begin{cases} F_x(x) = -[+qa] = -qa, \\ F_z(x) = -[+qa] = -qa, \\ M_y(x) = -[-\frac{3}{2}qa^2 + qax] = \frac{3}{2}qa^2 - qax. \end{cases}$$

Wykresy sił przekrojowych pokazano na rys. 2.28.

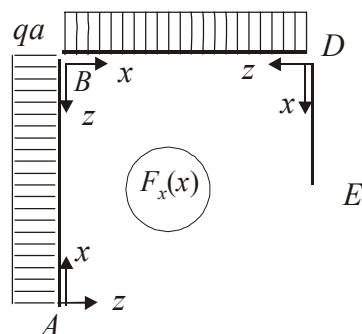
a)



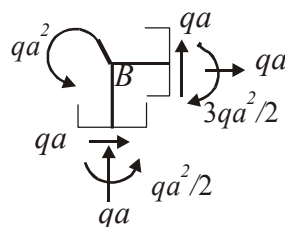
b)



c)



d)



Rys. 2.28

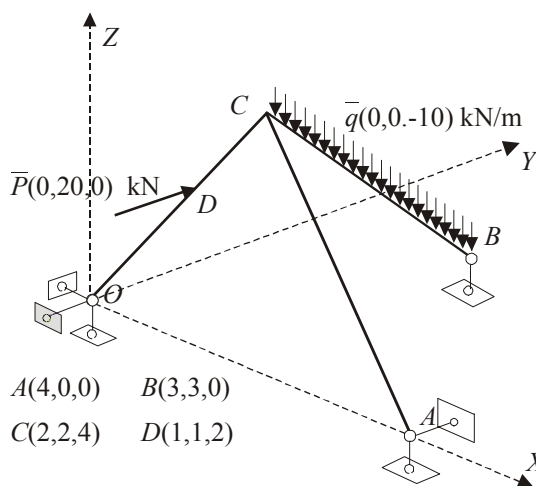
Na zakończenie tego przykładu warto zwrócić uwagę na jeden z warunków koniecznych sprawdzenia poprawności wykonanych obliczeń. Jest to tzw. warunek równowagi węzła (rys. 2.28d). Polega on na:

- „wycięciu” węzła poprzecznymi przekrojami przywęzłowymi,
- przyłożeniu do wszystkich poprzecznych ścianek wyciętego elementu obliczonych lub odczytanych z wykresu sił przekrojowych,

- sprawdzeniu, czy zerują się sumy i momenty wszystkich sił, jakie na wycięty węzeł działają, a więc sił na ściankach oraz sił zewnętrznych przyłożonych bezpośrednio do węzła.

Równowaga układu sił przyłożonych do węzła wynika stąd, że każdy układ sił przekrojowych jest równoważny układowi sił zewnętrznych przyłożonych do odciętej

części bryły, a układy te wraz z układem sił przyłożonym do węzła tworzą układ równoważny zerowemu. Równowagę węzła  $B$  pokazano na rys.2.28d.



Rys. 2.29

Wskazówka. Tok postępowania jak w zad 2.6 (pkt 2.7.1)

### Zadanie 2.11

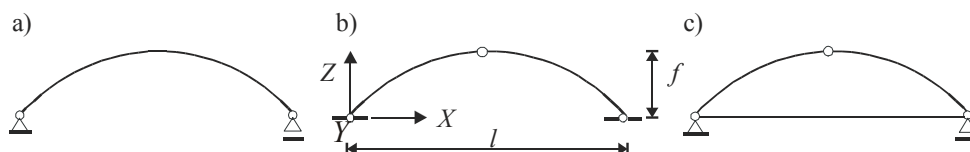
Na rys. 2.29 pokazano konstrukcję, wykonaną z belek o przekroju prostokątnym  $ax2a$ , której współrzędne węzłów (w metrach) oraz obciążenie (w kN i kN/m), opisano na rysunku.

Zadaniem jest zapisanie równań sił przekrojowych i sporządzenie wykresów tych sił.

## 2.10 SIŁY PRZEKROJOWE W ŁUKACH

Łukiem nazywamy konstrukcję złożoną z jednego lub więcej prętów krzywoliniowych. Spośród łuków statycznie wyznaczalnych do podstawowych typów zaliczamy: łuk wolno podparty (rys.2.30a), łuk trójprzegubowy (rys.2.30b) oraz łuk trójprzegubowy ze ściągiem (rys.2.30c). Odległość wierzchołka łuku od prostej łączącej podpory nazywamy *strzałką łuku* i oznaczamy ją zwykle literą  $f$ . Odległość między podporami nazywamy *rozpiętością łuku* lub *przęsem* i oznaczamy ją zwykle przez  $l$ . Krzywą łuku, jak pokazaliśmy wcześniej w punkcie 2.27, odnosimy do globalnego układu współrzędnych i zapisujemy w postaci parametrycznej:

$$X = X(t), \quad Y = Y(t), \quad Z = Z(t).$$



Rys. 2.30

Najczęściej spotykanymi kształtami łuków są kołowy i paraboliczny. Jeśli podpory leżą na tym samym poziomie, a układ współrzędnych, w którym określony jest łuk, przyjmujemy jak na rys. 2.30b, to równanie łuku parabolicznego ma postać (pkt 2.2.2; Zad.2):

$$X(t) = t, \quad Y(t) = 0, \quad Z(t) = \frac{4f}{l^2} t(l-t). \quad (2.10)$$

Budowa funkcji sił przekrojowych w łukach opiera się na identycznych ogólnych zasadach, jakie wynikają z definicji tych sił i z których korzystaliśmy przy znajdowaniu sił przekrojowych w belkach i ramach. Dlatego też nie tracąc na ogólności, i w tym przypadku, przedstawimy tok postępowania na przykładzie liczbowym. Wykonanie dość żmudnych obliczeń możemy powierzyć dowolnemu z matematycznych programów komputerowych. Tu skorzystamy z programu *Mathcad*.

### Zadanie 2.12

Znaleźć równania momentów, sił poprzecznych i podłużnych oraz sporządzić wykresy tych funkcji dla łuku parabolicznego pokazanego na rys. 2.31.

Dane:

$$P = 4 \text{ kN}; \quad q = 2 \text{ kN/m}; \quad l = 12 \text{ m}; \quad f = 4 \text{ m}.$$

- Obliczenie reakcji:

Reakcje obliczamy z równań równowagi:

$$\begin{aligned} S_X &= 0; & H_A + H_B &= 0; \\ S_Z &= 0; & V_A + V_B - 2,0 \cdot 6,0 - 4,0 &= 0; \\ M_B &= 0; & V_A \cdot 12 - 2,0 \cdot 6,0 \cdot 9,0 - 4,0 \cdot 3,0 &= 0, \end{aligned}$$

oraz z warunku równości zera momentu względem przegubu układu sił po jednej stronie przegubu :

$$M_C = 0; \quad -H_B \cdot 4,0 - V_B \cdot 6,0 + 4,0 \cdot 3,0 = 0$$

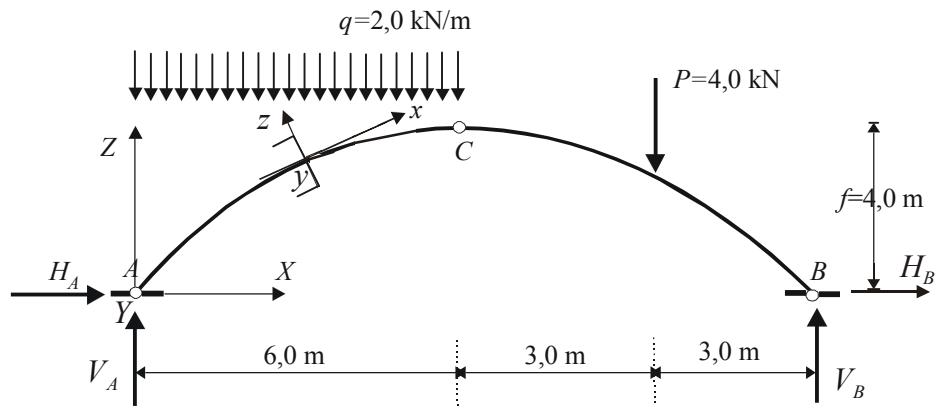
Z równań tych otrzymujemy:

$$V_A = 10,0 \text{ kN}; \quad V_B = 6,0 \text{ kN}; \quad H_A = H_B = H = 6,0 \text{ kN}.$$

- Układ lokalny:

Podstawiając do (2.10):  $l = 12 \text{ m}$  i  $f = 4 \text{ m}$ , równanie paraboli przyjmuje postać, w której pominiemy drugą współrzędną jako równą zero:

$$X = t; \quad Z = -\frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{3}t.$$



Rys. 2.31

Wektor styczny do paraboli ma współrzędne  $\bar{a}(\dot{X}, \dot{Z}) = \bar{a}\left(1, -\frac{2}{9}t + \frac{4}{3}\right)$ . Wobec  $X = t$  współrzędne wektora stycznego i jego długość zapiszemy:

$$\bar{a}\left(1, -\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}\right); |\bar{a}| = \sqrt{1 + \left(-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}\right)^2}.$$

Zgodnie ze wzorem (2.2) Współrzędne wersora  $\bar{e}_x$ , w naszym przypadku, przyjmą postać:

$$\bar{e}_x = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \Rightarrow \bar{e}_x \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}\right)^2}}, \frac{-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}\right)^2}} \right).$$

Warto zauważyć, że pierwsza współrzędna wersora  $\bar{e}_x$  jest kosinusem kąta pomiędzy wersorem a dodatnim kierunkiem osi X, druga – sinusem.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}\right)^2}} = \cos \alpha; \frac{-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{2}{9}X + \frac{4}{3}\right)^2}} = \sin \alpha.$$

Powyższe pozwala zapisać:  $\bar{e}_x(\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Prawoskrętność układu lokalnego, zgodna z układem globalnym, wyznacza współrzędne wersora osi z w postaci, w której również wykorzystano wprowadzoną powyżej interpretację trygonometryczną:



$$\bar{e}_z(-\sin \alpha, \cos \alpha).$$

- Funkcje sił przekrojowych:

Funkcje sił przekrojowych wyznaczymy w dwóch krokach. Najpierw, w układzie globalnym, w poszczególnych przedziałach charakterystycznych wyznaczymy wektory sumy ( $\bar{S}(Z_{II})$ ) i momentu ( $\bar{M}(Z_{II})$ ) układu sił zewnętrznych przyłożonych do łuku po dodatniej stronie osi x, a następnie mnożąc wektor sumy przez wersory układu lokalnego otrzymamy odpowiednio siły podłużne i poprzeczne. W układach płaskich, jak wcześniej zaznaczyliśmy, wektor momentu ma tylko jedną y-ową współrzędną niezerową i identyczną w obu układach. ( $M_y(x) = M_Y(x)$ ).

W przedziale  $0 \leq t \leq 6$  zredukowany układ sił zewnętrznych w układzie globalnym opisują współrzędne (znaki minus przed klamrami wynikają z faktu redukcji sił zewnętrznych układu (ZI)):

$$S_X(X) = -[H],$$

$$S_Z(X) = -[V_A - qX(t)],$$

$$M_Y(X) = M_Y(X) = -[V_A X(t) - HZ(t) + \frac{1}{2} qX^2(t)].$$

Siły przekrojowe; podłużną i poprzeczną otrzymamy mnożąc wektor sumy przez odpowiednie wersory układu lokalnego:

$$F_x(X) = \bar{S} \bar{e}_x = -H \cos \alpha - [V_A - qX(t)] \sin \alpha,$$

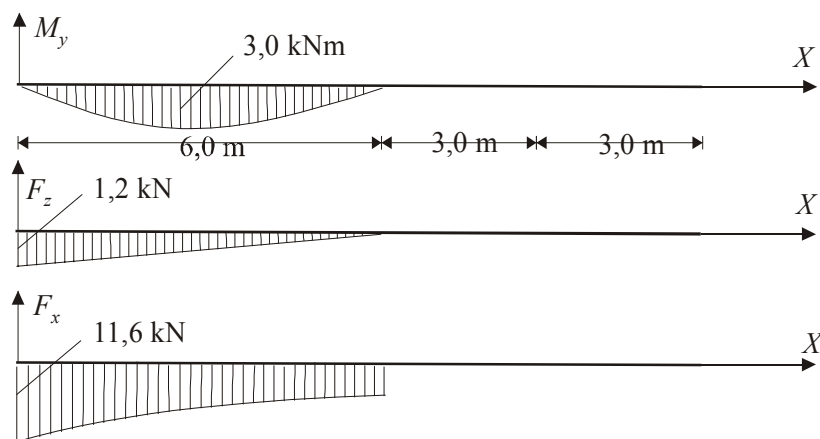
$$F_z(X) = \bar{S} \bar{e}_z = H \sin \alpha - [V_A - qX(t)] \cos \alpha.$$

Program Mathcad, w rozważanym przedziale, przedstawia tabelę z następującymi wartościami sił przekrojowych w punktach  $X = 1, 2, \dots, 6$  m:

$\frac{M_y(t)}{0}$	$\frac{F_z(t)}{-1,2}$	$\frac{F_x(t)}{-11,6}$
1,667	-0,892	-9,96
2,667	-0,498	-8,471
3	0	-7,211
2,667	0,609	-6,295
1,667	1,302	-5,857
0	2	-6

Wykresy sił przekrojowych, w tym przypadku, sporządzamy bądź odkładając wartości zmiennych zależnych funkcji przekrojowych zgodnie ze zwrotami osi lokalnych z, lub zgodnie ze zwrotem globalnej osi Z. Na rys. 2.32 przyjęto, wygodniejszy w łukach, drugi sposób.

Rozpisanie równań sił przekrojowych w pozostałych przedziałach oraz sporządzenie wykresów pozostawiamy czytelnikowi.



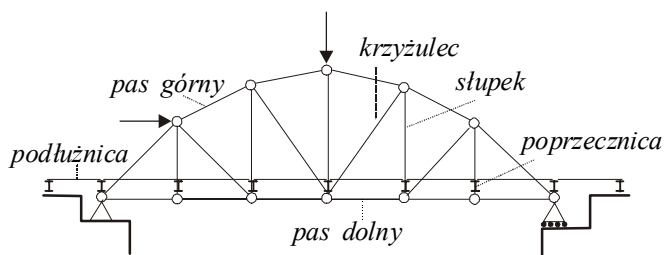
Rys. 2.32

## 2.11 SIŁY PRZEKROJOWE W KRATOWNICACH

### 2.11.1 DEFINICJA KRATOWNICY

*Kratownicą nazywamy konstrukcję złożoną z prętów prostych połączonych między sobą w węzłach będących idealnymi przegubami (bez tarcia), do której obciążenie zewnętrzne oraz więzy przyłożone są wyłącznie w węzłach.*

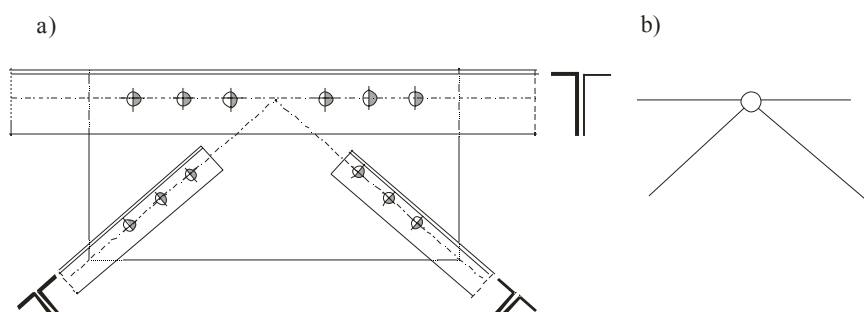
Pręty zewnętrzne ograniczające kratownicę od góry nazywamy pasem górnym, pręty ograniczające kratownicę od dołu – pasem dolnym. Pręty pionowe łączące oba pasy nazywamy słupkami, ukośne – krzyżulcami (rys. 2.33).



Rys. 2.33

Przedstawiona powyżej definicja kratownicy wymaga szerszego komentarza. Przyjęcie w niej teoretycznego modelu *idealnego przegubu* istotnie odbiega od rzeczywistości, jaką jest praktyka inżynierska.

Wystarczy przypatrzeć się np. konstrukcji węzła nitowanego (rys. 2.34a), którego schemat w myśl definicji przyjmujemy jak na rys. 2.34b.



Rys. 2.34

Mniej zastrzeżeń może budzić przyjęcie założenia o *przykładaniu obciążenia zewnętrznego wyłącznie w węzłach*, albowiem w rzeczywistych konstrukcjach dość często tak właśnie realizuje się obciążenie konstrukcji. Na rys. 2.33 pokazano przykład przęsła mostowego, w węzłach którego zamontowane są *poprzecznice* (belki łączące dwa równoległe biegnące przęsła), na których oparte są *podłużnice* (belki biegnące równoległe do przęsła), stanowiące bezpośrednią konstrukcję, na której zamontowana jest jezdnia. Podobnie realizuje się obciążenie w przęsłach dachowych, gdzie obciążenie przyłożone na krokwiach przekazuje się na konstrukcję poprzez płatwie umocowane w węzłach.

Założenie o przegubowych węzłach istotnie ułatwia obliczenia. Przyjmując sztywne połączenia w węzłach, konstrukcja staje się wysoko statycznie niewyznaczalna i rozwiązanie jej wymaga dużego nakładu pracy (szczególnie w przypadku obliczeń manualnych). W rezultacie tej pracy okazuje się, że jeśli obciążenie będzie przyłożone tylko w węzłach, to różnice w wartościach sił przekrojowych w stosunku do kratownicy z przegubami są nieznaczne i nie mają znaczenia praktycznego (na ogół nie przekraczają kilku procent).

### 2.11.2 TWIERDZENIE O ZREDUKOWANYM UKŁADZIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH W PRZEKROJACH POPRZECZNYCH PRĘTÓW

Rozważmy dowolną kratownicę geometrycznie niezmienną i pozostającą w równowadze pod działaniem układu sił zewnętrznych  $(Z) \equiv (0)$ . Niech będzie to np. kratownica pokazana na rys. 2.35a. Prostą  $\alpha - \alpha$  dokonajmy jej przekroju na dwie części. Układ sił zewnętrznych przyłożonych do cz. II w przekroju poprzecznym każdego przeciętego pręta może być „reprezentowany” przez siły przekrojowe  $F_x(x_i), F_y(x_i), M_y(x_i)$ ;  $x_i$  - oznacza położenie przekroju  $i$ -tego pręta w jego

układzie lokalnym  $(x_i, y_i, z_i)$ . W dalszym ciągu, dla uproszczenia, pomijając będziemy indeks „i”.

Udowodnimy, że układ sił wewnętrznych w przekroju każdego pręta kratownicy redukuje się tylko do siły osiowej  $F_x(x) = \text{const}$ .

Rozważmy przecięty pręt  $AB$ . Zgodnie z założeniem o obciążeniu przykładanym tylko w węzłach na długości pręta mamy  $q_z(x) \equiv 0$ .

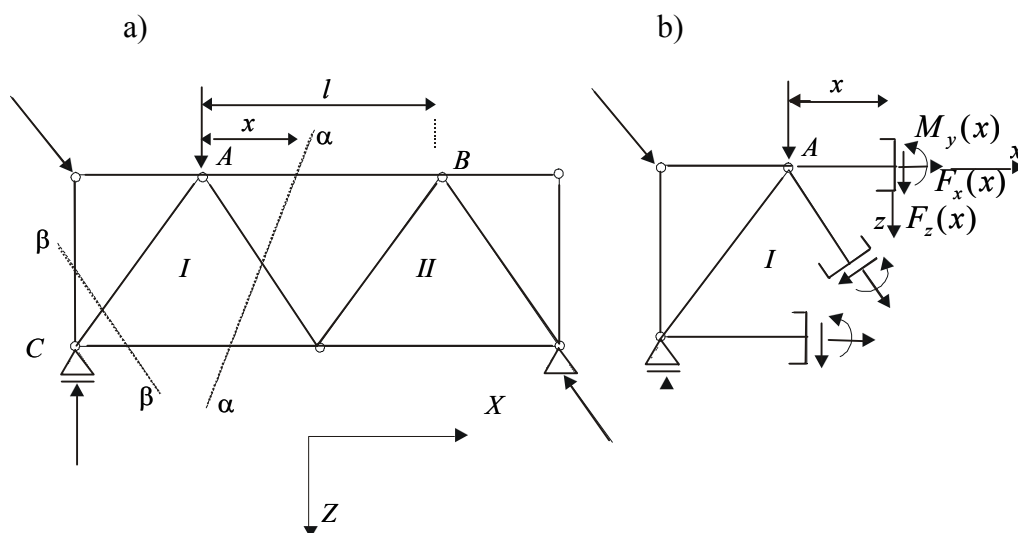
Poznana wcześniej zależność różniczkowa pomiędzy gęstością obciążenia a funkcją momentu przyjmuje zatem postać:

$$\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow M_y(x) = ax + b.$$

Jeśli początek osi  $x$  układu lokalnego znajduje się w punkcie  $A$ , to warunek zerowania się funkcji momentu w obu przegubach możemy zapisać:

$$\left. \begin{aligned} M_y(0) &= a \cdot 0 + b = 0 \\ M_y(l) &= a \cdot l + b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b = 0.$$

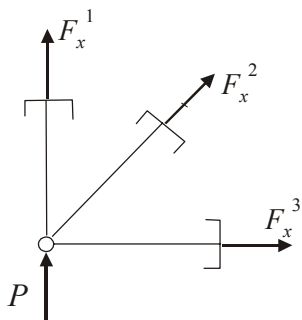
Wynika więc, że  $M_y(x) \equiv 0$ , a biorąc pod uwagę zależność różniczkową pomiędzy funkcjami momentu i siły poprzecznej, również  $F_z(x) \equiv 0$ . Stanowi to dowód postawionej tezy.



Rys. 2.35

### 2.11.3 TWIERDZENIA O „PRĘTACH ZEROWYCH”

Pod nazwą pręty zerowe rozumiemy te pręty, w których siła podłużna jest równa zero.



Rys. 2.36

Punktem wyjścia do dowodu twierdzeń o prętach zerowych będzie następujące twierdzenie:

Jeśli kratownica poddana obciążeniu układem sił zewnętrznych  $(Z) \equiv (0)$  pozostaje w równowadze, to układ sił działający na każdy dowolnie wycięty jej fragment – w szczególności także każdy - węzeł jest układem równoważnym układowi zerowemu.

Dowód tego twierdzenia jest natychmiastowy. Wytnijmy z kratownicy pokazanej na rys. 2.35a np. węzeł w lewym dolnym narożniku, dzieląc kratownicę prostą  $\beta - \beta$ . Działanie na wycięty węzeł pozostałej

części kratownicy reprezentowane jest przez siły przekrojowe  $F_x^1, F_x^2, F_x^3$  (rys. 2.36). Zgodnie z poznany twierdzeniem o równoważności układów sił wewnętrznych i zewnętrznych mamy:

$$(F_x^1, F_x^2, F_x^3) \equiv (Z_p), \quad (2.11)$$

gdzie  $(Z_p)$  jest układem sił zewnętrznych przyłożonych do odciętej prawej części kratownicy. Oznaczając układ sił zewnętrznych przyłożonych do analizowanej, lewej części kratownicy przez  $(Z_l)$  (w tym przypadku do rozpatrywanego węzła, przyłożony układ sił zewnętrznych  $(Z_l)$  składa się tylko z jednej siły) mamy zgodnie założeniem  $(Z) = (Z_l) + (Z_p) \equiv (0)$ . Uwzględniając w tym ostatnim związku relację (2.11) mamy:

$$(F_x^1, F_x^2, F_x^3) + (Z_l) \equiv (0), \quad \text{c.b.d.o.}$$

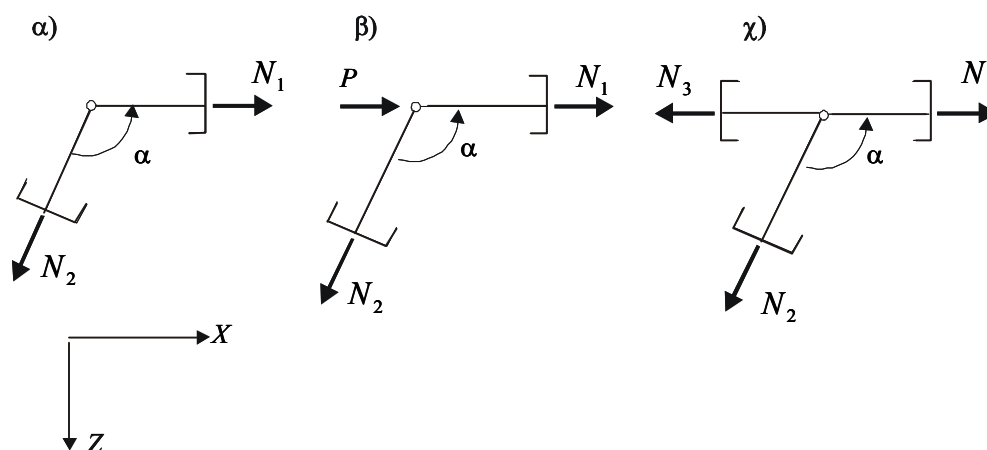
Możemy teraz przystąpić do sformułowania i dowodu trzech prostych, a ważnych, twierdzeń o prętach zerowych.

#### 2.11.3.1 Twierdzenie $\alpha$

Jeśli w węźle schodzą się dwa pręty i węzeł nie jest obciążony siłą zewnętrzną, to siły przekrojowe w obu prętach są równe zero. (rys. 2.37a)

**Dowód**

Układ sił przyłożonych do węzła pozostającego w równowadze jest równoważny układowi zerowemu. Ponieważ mamy tu do czynienia ze zbieżnym układem sił, koniecznym i wystarczającym warunkiem równowagi jest zerowanie się sumy.



Rys. 2.37

Przyjmując układ współrzędnych tak, jak pokazano na rysunku i przyrównując, w tym układzie, współrzędne wektora sumy do zera otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} S_x = 0 &\Rightarrow N_1 + N_2 \cos \alpha = 0, \\ S_z = 0 &\Rightarrow N_2 \cdot \sin \alpha = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_1 = N_2 = 0.$$

Oba pręty są więc prętami zerowymi.

### 2.11.3.2 Twierdzenie β

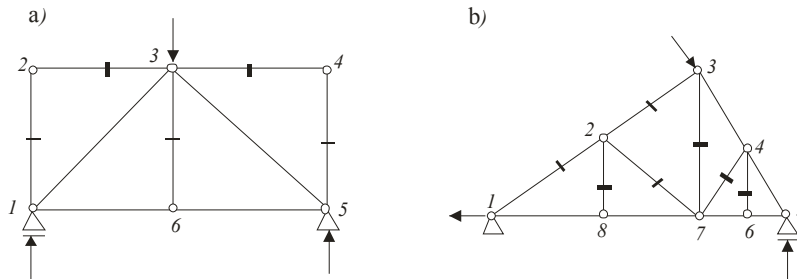
Jeśli w węźle schodzą się dwa pręty i węzeł jest obciążony siłą zewnętrzną równoległą do jednego z nich, to w drugim pręcie siła przekrojowa jest równa zero; na rys.2.37β  $N_2=0$ .

### 2.11.3.3 Twierdzenie γ

Jeśli w węźle schodzą się trzy pręty, z których dwa są równoległe i węzeł nie jest obciążony siłą zewnętrzną, to siła przekrojowa w pręcie trzecim jest równa zero (na rys.2.37γ  $N_2=0$ ).

Dowody twierdzeń β i γ przeprowadzamy podobnie jak dowód twierdzenia α.

Zastosowanie poznanych twierdzeń pokażemy na dwóch przykładach kratownic przedstawionych na rys.2.38.



Rys.2.38

W przykładzie z rys.2.38a, wycinając węzły 2 i 4 i opierając się na twierdzeniu  $\alpha$ , mamy  $N_{2-3} = N_{2-1} = N_{4-3} = N_{4-5} = 0$ . Wycinając zaś węzeł 6 mamy zgodnie z twierdzeniem  $\gamma$ :  $N_{6-3} = 0$ .

W przykładzie z rys. 2.38b, wycinając najpierw węzły 8 i 6 i opierając się na twierdzeniu  $\gamma$ , znajdujemy  $N_{8-2} = N_{6-4} = 0$ , wycinając następnie węzły 2 i 4 i wykorzystując fakt, że  $N_{2-8} = N_{4-6} = 0$  oraz twierdzenie  $\gamma$  otrzymujemy  $N_{2-7} = N_{4-7} = 0$ . W dalszej kolejności wycinamy węzeł 7, znajdując  $N_{7-3} = 0$ . Wycinając wreszcie węzły 3 i 1 oraz wykorzystując twierdzenie  $\beta$  stwierdzamy, że  $N_{1-2} = N_{3-2} = 0$ . Pręty zerowe oznaczono na rys. 2.38 kreską prostopadłą do osi pręta.

## 2.11.4 OBLICZANIE SIŁ PRZEKROJOWYCH W PRĘTACH

### 2.11.4.1 Sposób równoważenia węzłów

Jest to sposób analityczny i polega na wypisaniu równań równowagi dla każdego wyciętego węzła. Jak powiedzieliśmy poprzednio, mamy tylko dwa analityczne równania dla każdego węzła, mianowicie:  $S_x = 0$  i  $S_z = 0$ . Rozpisując równania równowagi dla wszystkich węzłów otrzymamy więc układ złożony z  $2w$  równań. Liczba niewiadomych występujących w tych równaniach będzie następująca:  $N$  sił przekrojowych (tyle ile jest prętów w kratownicy) oraz ilość nieznanymi reakcji –  $r$ . Te ostatnie możemy wyznaczyć z równań równowagi całej konstrukcji traktując ją jako jedną bryłę. Liczba, zatem reakcji, jeśli mamy je wyznaczyć z równań równowagi, musi być równa 3 (w zadaniu płaskim). Jeśli  $r < 3$  lub  $r > 3$ , kratownica jest *zewnątrznie geometrycznie zmienna* lub, w drugim przypadku, *zewnątrznie statycznie niewyznaczalna*. Równań równowagi całej bryły nie musimy rozpisywać osobno, jeśli rozważać będziemy równowagę każdego węzła. Tak więc w układzie  $2w$  równań będziemy mieli niewiadomych  $N + 3$ . Niewiadome będziemy mogli wyznaczyć, jeśli liczba niezależnych równań będzie równa ilości niewiadomych, czyli:

$$2w = N + 3 \quad \text{lub} \quad 2w - N - 3 = 0.$$

Powiemy wówczas, że kratownica jest *wewnętrznie statycznie wyznaczalna*. Jeśli liczba liniowo niezależnych równań będzie mniejsza od liczby niewiadomych, kratownicę nazwiemy wewnętrznie statycznie niewyznaczalną. Ten fakt zapiszemy:

$$2w < N + 3 \quad \text{lub} \quad 2w - N - 3 < 0.$$

Jeśli zaś liczba liniowo niezależnych równań będzie większa niż liczba niewiadomych, czyli:

$$2w - N - 3 > 0,$$

wówczas powiemy, że kratownica jest *wewnętrznie geometrycznie zmienna*.

Formułowanie równań, jak i ich rozwiązywanie jest stosunkowo żmudne, gdyby czynić to manualnie. Elementarną tę pracę wykonuje dziś komputer. Praktycznie każdy użytkowy program służący obliczeniom statycznym opcję taką posiada. Tym niemniej w wielu prostych kratownicach obliczenia można wykonać równie prostym narzędziem, jakim jest sposób Rittera

#### 2.11.4.2 Sposób Rittera

Sposób Rittera jest sposobem analitycznym; polega on na metodzie przecięć oraz na wykorzystaniu twierdzenia o równoważności odpowiednich układów sił zewnętrznych i przekrojowych lub, – co na jedno wychodzi – na wykorzystaniu twierdzenia o równowadze układu sił zewnętrznych i przekrojowych przyłożonych do jednej części kratownicy.

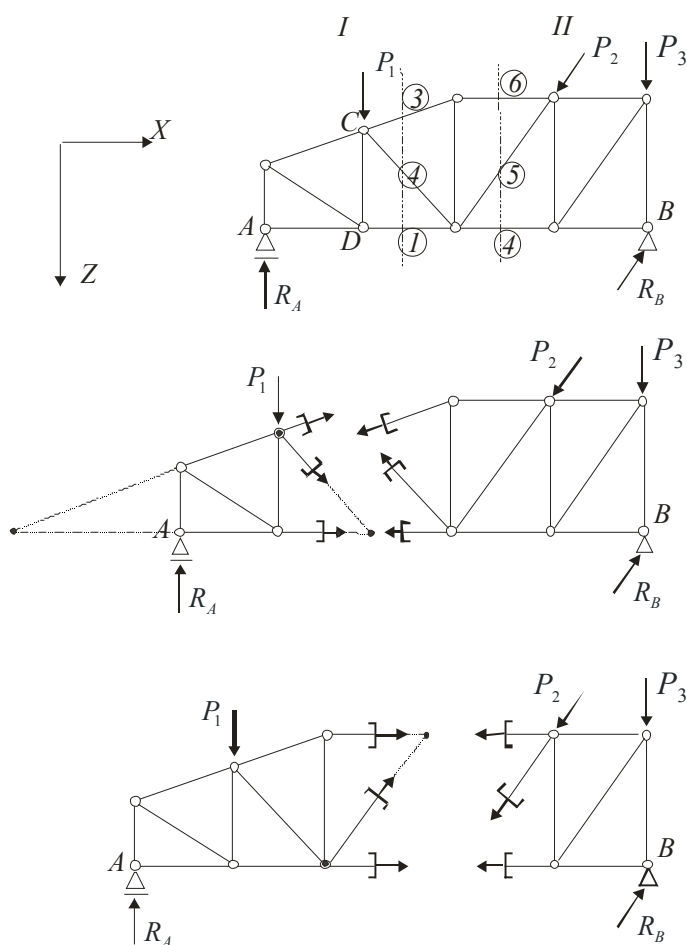
Do dyspozycji mamy trzy analityczne równania równowagi (układ płaski). Jeśli więc kratownicę przetniemy przez nie więcej niż trzy pręty, to z równań równowagi możemy wyliczyć szukane siły przekrojowe, jeżeli tylko nie tworzą one układu zbieżnego. Jeżeli przecinanych prętów jest więcej, wówczas siły w części prętów muszą być wcześniej policzone.

Tę prostą ideę zilustrujemy na przykładzie. Niech kratownica pokazana na rys. 2.39 pozostaje w równowadze, będąc obciążona układem sił zewnętrznych  $(Z) \equiv 0$ . Jeśli chcemy obliczyć siły przekrojowe w prętach 1, 2 i 3, to przez te trzy pręty przecinamy kratownicę na dwie części (rys. 2.39b). Siły przekrojowe  $N_1, N_2, N_3$  możemy wyliczyć z warunku równowagi układu sił (zewnętrznych i przekrojowych) przyłożonych do części *I* lub układu sił przyłożonych do części *II*. Wybór układu zależy od tego, który z nich będzie prostszy. W przykładzie pokazanym na rys. 2.39b rozważymy część *I*. Zanim jednak wypiszemy równania równowagi, zwróćmy uwagę na przyjęty początek pierwszej osi układu lokalnego  $(x_i)$  w każdym przeciętym przecięciu. Znajduje się on w węźle przeciętego pręta (*C* dla prętów pasa górnego i krzyżulca, zaś w punkcie *D* dla pręta pasa dolnego).



Narysowane na rysunku wszystkie siły przyjęto jako dodatnie (rozciąganie). Równania równowagi w formie analitycznej, odniesionej do układu globalnego, przyjmują postać:

$$S_X = 0, \quad S_Z = 0, \quad M_Y^Q = 0. \quad (2.12)$$



Rys. 2.39

Rozpisane powyższe trzy równania pozwalają obliczyć siły  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , które do tych równań wchodzi. W przypadku pokazanym na rys.2.39b, oraz w wielu innych, znacznie wygodniej będzie posłużyć się równoważnymi do równań (2.12) równaniami równowagi, mianowicie:

$$M_Y^{Q_1} = 0, \quad M_Y^{Q_2} = 0, \quad M_Y^{Q_3} = 0, \quad (2.13)$$

wynikającymi z twierdzenia mówiącego, że *układ sił jest równoważny układowi zerowemu, jeśli momenty względem trzech dowolnych punktów, ale nie leżących na jednej prostej, są równe zero*.

Dowód tego twierdzenia przeprowadzono w mechanice teoretycznej opierając się – jak sobie przypominamy – na twierdzeniu o zmianie bieguna. Wygoda przy wykorzystaniu równań (2.13) leży w odpowiednim wyborze biegunów:  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Jeśli bieguny te obierzemy w punktach przecięcia się każdych dwóch kierunków sił  $N_1, N_2, N_3$ , otrzymamy wówczas rozdzielony układ równań (każde zawiera tylko jedną niewiadomą). Tak obrane bieguny pokazano na rys.2.39b. Szukając sił przekrojowych w prętach, oznaczonych numerami 4, 5 i 6, dokonujemy przekroju kratownicy np. prostą  $m$ . Podobnie jak poprzednio i w tym przypadku równania równowagi układu będziemy dla lewej części kratownicy (rys.2.39c). Szukając najprostszej formy równań równowagi wykorzystamy tu twierdzenie równoważne do twierdzeń, z których wynikały związki (2.12) i (2.13), a mianowicie:

$$S_Z = 0, \quad M_Y^{Q_4} = 0, \quad M_Y^{Q_5} = 0, \quad (2.14)$$

wypływające z twierdzenia, że *układ sił jest równoważny układowi zerowemu, jeśli suma rzutów wszystkich sił na jedną z osi jest równa zero oraz momenty względem dwóch dowolnych punktów, nie leżących na prostej prostopadłej do tej osi, są równe zero*.

Obierając  $Z$  jako oś rzutu, a bieguny w punktach przecięcia się kierunków prętów 5 i 6 ( $Q_4$ ) oraz prętów 5 i 4 ( $Q_5$ ) i licząc  $Z$ -ową współrzędną sumy i momenty względem obranych punktów otrzymujemy znów rozdzielony układ równań. Szczegółowy tok postępowania przedstawimy na przykładzie liczbowym.

### Zadanie 2.13

Znaleźć siły przekrojowe w następujących prętach kratownicy: 2-3, 2-10, 1-10, 3-4, 3-9, 10-9 i 6-8, pokazanej na rys. 2.40.

- Obliczenie reakcji.

Równania równowagi całej kratownicy przyjmują postać:

$$\begin{aligned} M_Y^7 &= 0; \quad R_1 \cdot 6 - P_1 \cdot 5 - P_2 \cdot 4 - P_3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{6} = 5,0 \text{ kN}; \\ S_Z &= 0; \quad R_1 - P_1 - P_2 - P_3 + R_7 = 0 \Rightarrow R_7 = 2 + 4 + 4 - 5 = 5,0 \text{ kN}; \\ S_Y &= 0; \quad H = 0 \end{aligned}$$

- Obliczenie sił przekrojowych:  $N_{2-3}, N_{2-10}, N_{1-10}$

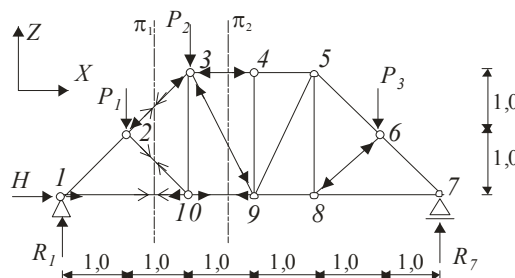
Dokonujemy przekroju prostą  $\pi_1$  i w przekrojach poprzecznych zakładamy dodatnie siły podłużne (groty pełne). Obliczenia przeprowadzimy rozważając lewą część kratownicy. Korzystać będziemy oczywiście z warunków równowagi określonych relacjami (2.13). Obiera-

my następnie bieguny, względem których obliczać będziemy momenty, będą nimi: 1, 2 i 10. Otrzymujemy wówczas:

$$M_Y^1 = 0; P_1 \cdot 1 + N_{2-10} \cdot \sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{2-10} = -\sqrt{2} \text{ kN},$$

$$M_Y^2 = 0; R_1 \cdot 1 - N_{1-10} \cdot 1 = 0 \Rightarrow N_{1-10} = 5 \text{ kN},$$

$$M_Y^{10} = 0; R_1 \cdot 2 - P_1 \cdot 1 + N_{2-3} \cdot \sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{2-3} = \frac{-2 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2} \text{ kN}.$$



Rys. 2.40

Znaki „-” i „+” wskazują, że pręty 2-10 i 2-3 są ściskane, pręt zaś 1-10 rozciągany.

- Obliczenie sił przekrojowych:  $N_{3-4}$ ,  $N_{2-9}$ ,  $N_{10-9}$ .  
Kratownicę dzielimy prostą  $\pi_2$  i zakładamy, podobnie jak poprzednio, siły przekrojowe dodatnie. Wykorzystamy teraz równania równowagi (2.14) i rozważymy prawą część kratownicy. Dwa bieguny obieramy w punktach 3 i 9. Równania równowagi przyjmują postać:

$$M_Y^3 = 0; R_7 \cdot 4 - P_3 \cdot 3 - N_{9-10} \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_{9-10} = \frac{5 \cdot 4 - 4 \cdot 3}{2} = 4,0 \text{ kN},$$

$$M_Y^9 = 0; R_7 \cdot 3 - P_3 \cdot 2 - N_{4-3} \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_{4-3} = \frac{-5 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{2} = -3,5 \text{ kN},$$

$$S_Z = 0; R_7 - P_3 + N_{9-3} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{9-2} = \frac{\sqrt{5}(-5+4)}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ kN}.$$

Pręty 4-3 i 9-3 są ściskane, pręt zaś 9-10 rozciągany.

- Obliczenie siły przekrojowej w pręcie 6-8.

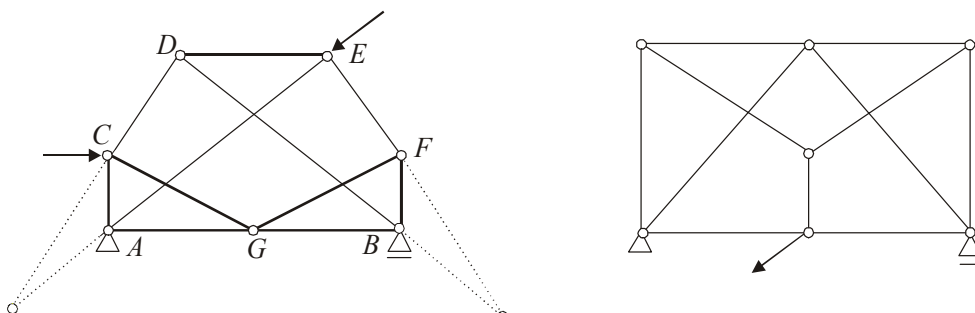
Obliczenie tej siły moglibyśmy wykonać, dokonując odpowiedniego przecięcia, możemy również siłę tę obliczyć wycinając węzeł 6, jak to pokazano na rys. 2.40, i wykorzystując warunek równowagi węzła, np. sumę rzutów sił na normalną do prętów 5-6-7 równą zero, otrzymać

$$N_{6-8} + P_3 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{6-8} = -4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \text{ kN}.$$

Pręt jest więc ściskany. Poprawne zwroty sił przekrojowych, wskazujące na ściskanie lub rozciąganie poszczególnych prętów, nanosimy na poszczególnych prętach. Na rysunku rzeczywiste zwroty oznaczono symbolami: „ $\rightarrow \leftarrow$ ” lub „ $\leftarrow \rightarrow$ ”

### 2.11.4.3 Sposób wymiany prętów

Możemy się spotkać z kratownicą, w której wyznaczenie sił w prętach sposobem Rittera okazuje się już w pierwszym kroku niemożliwe. Po prostu nie potrafimy znaleźć przekroju tylko z trzema niewiadomymi siłami przekrojowymi, nie schodzącymi się w jednym punkcie, ani też nie ma węzła tylko z dwiema niewiadomymi, które moglibyśmy obliczyć przez podział kratownicy na dwie części lub przez wycięcie węzła. Przykłady takich kratownic pokazano na rys. 2.41. Tok postępowania w takim przypadku pokażemy na przykładzie kratownicy przedstawionej po lewej stronie rys. 2.41. Wykażemy, że kratownica jest statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna. Ilość równań równowagi, jakie możemy zbudować wycinając poszczególne węzły jest  $2w = 2 \cdot 7 = 14$ , a ilość niewiadomych jest również taka sama (11 prętów + 3 reakcje). Jest to oczywiście jedynie warunek konieczny statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności.



Rys. 2.41

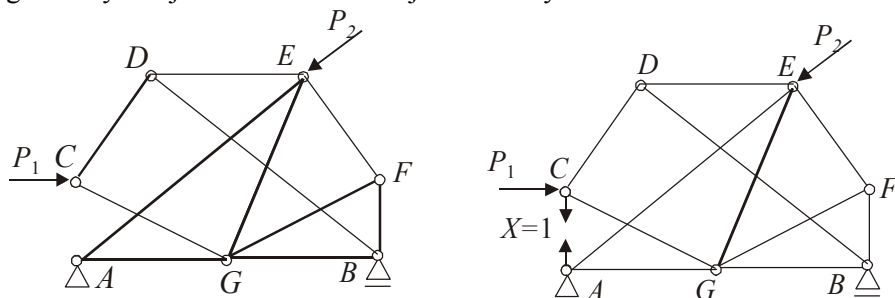
Warunek wystarczający pokażemy na drodze następującego rozumowania: rysowane pogrubioną linią pręty tworzą dwie tarcze, które z prętem-tarczą  $D-E$  połączone są ze sobą czterema prętami ( $C-D$ ,  $A-E$  i  $E-F$ ,  $D-B$ ) i przegubem  $G$  tak, że kierunki poszczególnych par prętów przecinają się w punktach nie leżących z przegubem  $G$  na jednej prostej, a to wystarcza, aby kratownica była geometrycznie niezmienna (o geometrycznej niezmienności połączonych tarcz była mowa w przedmiocie mechanika teoretyczna). W oparciu o zasadę prac wirtualnych (również poznana w mechanice) można bez większego trudu tę kratownicę rozwiązać. My jednak postąpimy inaczej pokazując równocześnie zastosowanie zasady superpozycji rozwiązań.

Z rozważanej kratownicy przeniesiemy jeden z prętów w inne miejsce tak, aby:

- kratownica pozostała geometrycznie niezmienna,
- można ją było rozwiązać sposobem Rittera,

to znaczy, aby można dokonać takiego jej przekroju, który nie przecina więcej niż trzy pręty. Usuńmy np. z danej kratownicy pręt  $A-C$ , a wstawmy inny, np.  $E-G$  (rys. 2.42).

Otrzymana nowa kratownica oczywiście spełnia warunek konieczny statycznej niewyznaczalności i geometrycznej niezmienności (nie zmieniła się liczba węzłów ani liczba prętów i reakcji podlegających wyznaczeniu). Sprawdzić, zatem należy warunek wystarczający. Dwie tarcze o pogrubionych liniach  $AEG$  i  $GEF$ , połączone ze sobą prętem  $E-F$  i przegubem  $G$ , tworzą razem jedną nową tarczę. Jeśli pogrubiony na rysunku pręt  $C-D$ , potraktujemy jako tarczę, to obie tarcze, a mianowicie  $C-D$  i  $A-E-F-B-G-A$ , połączone są trzema prętami  $C-G$ ,  $D-B$ ,  $D-E$ , które nie są równoległe ani nie przecinają się w jednym punkcie. Stanowi to o geometrycznej niezmienności całej kratownicy.



Rys. 2.42

Łatwo przekonać się, że tę nową kratownicę możemy rozwiązać sposobem Rittera. Powiedzmy, że rozwiązaliśmy ją znajdując wszystkie siły w prętach  $\tilde{N}_{i-j}$ , w tym również  $\tilde{N}_{E-G}$ . Obciążmy teraz nową kratownicę siłami  $X = 1$  przyłożonymi w węzłach  $A$  i  $C$  w kierunku usuniętego pręta. W przypadku takiego obciążenia potrafimy rozwiązać ją poznanymi sposobami, znajdując siły przekrojowe  $\hat{N}_{i-j}$  we wszystkich prętach, w tym również  $\hat{N}_{E-G}$ . Gdybyśmy kratownicę obciążyli siłą  $X \neq 1$ , wówczas, zgodnie z zasadą superpozycji, siły w niej wynosiłyby  $X \cdot \hat{N}_{i-j}$ , a w pręcie  $E-G$   $X \cdot \hat{N}_{E-G}$ .

W wyniku obciążeń układem  $(Z)$  i siłą  $X \neq 1$  siła w pręcie  $E-G$  będzie:  $\tilde{N}_{E-G} + X \cdot \hat{N}_{E-G}$ . Postawmy teraz pytanie: jaką siłą  $X$  należy obciążyć nową kratownicę, aby siła przekrojowa w pręcie  $E-G$  od obu obciążeń była równa zero? Odpowiedź jest prosta: wtedy, gdy:

$$\tilde{N}_{E-G} + X \cdot \hat{N}_{E-G} = 0, \text{ czyli gdy } X = -\frac{\tilde{N}_{E-G}}{\hat{N}_{E-G}}.$$

Otrzymany rezultat jest równocześnie odpowiedzią na pytanie – jaka jest siła w pręcie  $A-C$  kratownicy danej przy obciążeniu ( $Z$ ), albowiem w niej nie było pręta  $E-G$ , co jest równoznaczne z istnieniem takiego pręta, w którym siła przekrojowa jest równa zero. Jeśli teraz w kratownicy danej znana jest siła przekrojowa w pręcie  $A-C$ , to wyznaczenie dalszych sił sposobem Rittera nie sprawia trudności. Nie ma jednak potrzeby kolejnego rozwiązywania, możemy, bowiem wykorzystać zasadę superpozycji rezultatów dotychczasowych obliczeń:

$$N_{i-j} = \tilde{N}_{i-j} - \frac{\tilde{N}_{E-G}}{\hat{N}_{E-G}} \hat{N}_{i-j}.$$

## 2 WSTĘP DO STATYKI KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH.....31

2.1	OŚ PRĘTA, PRZEKRÓJ POPRZECZNY, BIEGUN REDUKCJI.....	32
2.2	UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH .....	32
2.2.1	<i>Układ globalny, ortokartezjański .....</i>	32
2.2.2	<i>Układ lokalny, krzywoliniowy ortogonalny.....</i>	33
2.3	DEFINICJA SIŁ PRZEKROJOWYCH .....	40
2.4	UPROSZCZONY RYSUNEK LITEGO PRĘTA .....	42
2.5	UKŁADY PŁASKIE .....	44
2.6	FUNKCJE SIŁ PRZEKROJOWYCH.....	46
2.6.1	<i>Punkty i przedziały charakterystyczne.....</i>	46
2.6.2	<i>Równania sił przekrojowych .....</i>	47
2.6.3	<i>wykresy sił przekrojowych.....</i>	47
2.7	SIŁY PRZEKROJOWE W BELKACH .....	48
2.7.1	<i>Belka prosta.....</i>	48
2.7.2	<i>Belki wieloprzęsłowe, przegubowe, statycznie wyznaczalne .....</i>	53
2.8	ZALEŻNOŚCI RÓŻNICZKOWE POMIĘDZY SIŁAMI PRZEKROJOWYMI I GĘSTOŚCIĄ SIŁ ZEWNĘTRZNYCH .....	61
2.9	SIŁY PRZEKROJOWE W RAMACH .....	65
2.10	SIŁY PRZEKROJOWE W ŁUKACH .....	68
2.11	SIŁY PRZEKROJOWE W KRATOWNICACH .....	72
2.11.1	<i>Definicja kratownicy.....</i>	72
2.11.2	<i>Twierdzenie o zredukowanym układzie sił wewnętrznych w przekrojach poprzecznych prętów .....</i>	73
2.11.3	<i>Twierdzenia o „prętach zerowych” .....</i>	75
2.11.3.1	<i>Twierdzenie <math>\alpha</math> .....</i>	75
2.11.3.2	<i>Twierdzenie <math>\beta</math> .....</i>	76
2.11.3.3	<i>Twierdzenie <math>\gamma</math> .....</i>	76
2.11.4	<i>Obliczanie sił przekrojowych w prętach .....</i>	77
2.11.4.1	<i>Sposób równoważenia węzłów .....</i>	77
2.11.4.2	<i>Sposób Rittera.....</i>	78
2.11.4.3	<i>Sposób wymiany prętów .....</i>	82

