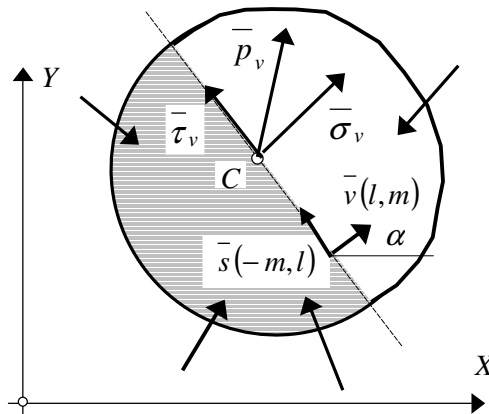


5. ANALIZA PŁASKIEGO STANU NAPRĘŻENIA

5.1. Naprężenia na dowolnej płaszczyźnie

Jak pamiętamy płaski stan naprężenia w punkcie cechuje to, że wektory naprężeń przyporządkowane wszystkim płaszczyznom przecięcia bryły w danym punkcie leżą w jednej płaszczyźnie zwanej, płaszczyzną stanu naprężenia. Wówczas w macierzy naprężeń wszystkie jej elementy w jednym wierszu (kolumnie) mają zerowe wartości.

Taki stan naprężenia występuje np. w płaskich tarczach. Rozważmy zatem płaską tarczę określoną w układzie współrzędnych (X,Y) i obciążoną dowolnym, ale będącym w równowadze, układem sił zewnętrznych.



Rys. 5.1

Wybermy dowolny punkt C w pokazanej na rys. 5.1 płaskiej tarczy i przyjmijmy, że znamy w nim współrzędne macierzy naprężeń. Ponieważ panuje w nim płaski stan naprężenia, to macierz naprężeń będzie miała, w ogólnym przypadku, cztery różne od zera elementy:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Współrzędne wektora naprężenia $\bar{p}_v(p_{vx}, p_{vy})$ w tym punkcie na płaszczyźnie o wersorze normalnym $\bar{v}(l, m)$ są równe:

$$p_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m,$$

$$p_{vy} = \tau_{yx} l + \sigma_y m,$$

a naprężenia normalne i styczne na tej płaszczyźnie wynoszą:

$$\sigma_v = \bar{p}_v \bar{v} = (\sigma_x l + \tau_{xy} m) l + (\tau_{yx} l + \sigma_y m) m = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm,$$

$$\tau_v = \bar{p}_v \bar{s} = (\sigma_x l + \tau_{xy} m)(-m) + (\tau_{yx} l + \sigma_y m) l = -\sigma_x lm + \sigma_y lm + \tau_{xy} (l^2 - m^2),$$

gdzie: $\bar{s}(-m, l)$ wersor styczny do płaszczyzny (patrz rys. 5.1) i prostopadły do wersora $\bar{v}(l, m)$.

Uwzględniając, że $l = \cos \alpha$ a $m = \sin \alpha$, gdzie: α to kąt między kierunkiem wersora \bar{v} i osią X , oraz znane z trygonometrii zależności

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

po przekształceniach otrzymujemy wzory :

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (5.1)$$

$$\tau_v = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha, \quad (5.2)$$

podające wartości naprężeń normalnych i stycznych na płaszczyźnie przekroju, o wektorze normalnym nachylonym pod kątem α do osi X. Dodatnim wartością tych naprężeń odpowiadają zwroty zgodne ze zwrotami wektorów \bar{v} oraz \bar{s} , gdyż są to miary rzutów wektora naprężenia $\bar{p}_v(p_{vx}, p_{vy})$ na osie wyznaczone tymi wektorami.

Policzmy ile wynosi suma naprężeń normalnych na dwóch dowolnych ale wzajemnie prostopadłych płaszczyznach przekroju.

Korzystając ze wzoru (5.1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_{v,\alpha} + \sigma_{v,\alpha+90} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha + \\ &+ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2(\alpha + 90^0) + \tau_{xy} \sin 2(\alpha + 90^0) = \sigma_x + \sigma_y \end{aligned}$$

dowodząc w ten sposób, iż: w płaskim stanie naprężenia suma naprężeń normalnych na dwóch do siebie prostopadłych płaszczyznach jest wielkością stałą lub, inaczej, że suma naprężeń na przekątnej macierzy naprężeń jest niezmiennikiem tzn. nie zmienia swej wartości przy zmianie układu, w którym jest określana. Twierdzenie to odnosi się również do przestrzennego stanu naprężenia.

5.2. Ekstremalne naprężenia normalne i styczne

Inżyniera analizującego stan naprężenia w danym punkcie interesują przede wszystkim występujące w nim ekstremalne wartości naprężeń normalnych i stycznych.

Postawmy więc dwa bardzo ważne zagadnienia do rozwiązania:

- na jakiej płaszczyźnie przekroju występują i ile wynoszą ekstremalne naprężenia normalne,
 - na jakiej płaszczyźnie przekroju występują i ile wynoszą ekstremalne naprężenia styczne.
- Aby rozwiązać te oba zagadnienia należy wyznaczyć ekstremalne wartości funkcji $\sigma_v = \sigma_v(\alpha)$ oraz $\tau_v = \tau_v(\alpha)$.

Zacznijmy od naprężeń normalnych.

Pochodna funkcji $\sigma_v = \sigma_v(\alpha)$ przyrównana do zera

$$\frac{d\sigma_v}{d\alpha} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

pokazuje, że na tych płaszczyznach przekroju na których naprężenia normalne są ekstremalne, naprężenia styczne są równe zero i daje równanie, z którego możemy wyznaczyć

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x} \right) + n \frac{\pi}{2} \quad (5.3)$$

kąt pod jakim nachylony jest do osi X, wektor normalny płaszczyzny lub płaszczyzn na których występują ekstremalne naprężenia normalne.

Zależności (5.3) pokazują, że ekstremalne naprężenia normalne występują na dwóch wzajemnie do siebie prostopadłych płaszczyznach. Płaszczyzny te nazywamy płaszczyznami głównymi a naprężenia normalne na nich naprężeniami głównymi. Kierunki wektorów normalnych do płaszczyzn głównych czyli kierunki naprężeń głównych nazywamy kierunkami głównymi. Zatem:

naprężenia główne w danym punkcie to ekstremalne wartości naprężeń normalnych, które w nim występują. Działają one na dwóch do siebie prostopadłych płaszczyznach (płaszczyznach głównych) na których naprężenia styczne są równe zero.

W celu wyznaczenia wartości naprężeń głównych w płaskim stanie naprężenia korzystamy z poniższych wzorów trygonometrycznych:

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}, \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

które wstawiamy do równania (5.1):

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} + \tau_{xy} \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \right)$$

aby następnie po wykorzystaniu zależności (5.3) otrzymać końcowe rezultaty w postaci:

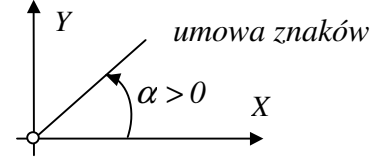
$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Wzór (5.3) podaje jedynie kąt transformacji wyjściowego układu współrzędnych do układu kierunków naprężeń głównych nie określając, kierunku σ_{\max} i kierunku σ_{\min} . Kierunki tych naprężeń określają poniższe zależności:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\max}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\min} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}}. \quad (5.5)$$

We wzorach (5.5) α_{\max} oznacza kąt o jaki należy obrócić oś X do pokrycia się z kierunkiem maksymalnego naprężenia normalnego σ_{\max} . Analogicznie definiujemy kąt α_{\min} .



W celu wyznaczania ekstremalnych naprężeń stycznych i płaszczyzn ich występowania postępujemy podobnie jak w przypadku ekstremalnych naprężeń normalnych.

Przyrównanie do zera pochodnej funkcji $\tau_v = \tau_v(\alpha)$:

$$\frac{d\tau_v}{d\alpha} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0,$$

daje zależność, z której wyznaczamy kierunki normalnych do płaszczyzn ekstremalnych naprężeń stycznych

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \rightarrow \alpha_\tau = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \right) + n \frac{\pi}{2} \quad (5.6)$$

Wzór (5.6) pokazuje, że ekstremalne naprężenia styczne też występują na dwóch wzajemnie do siebie prostopadłych płaszczyznach, a α_τ to kąt transformacji układu współrzędnych do układu wyznaczonego przez normalne do tych płaszczyzn.

Wstawiając (5.6) do (5.2), przy wykorzystaniu analogicznych jak poprzednio zależności trygonometrycznych otrzymujemy wartości ekstremalnych naprężeń stycznych:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}, \quad (5.7)$$

$$\tau_{\min} = - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = - \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Porównanie wzorów (5.3) i (5.6) daje zależność:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} 2\alpha_\tau \rightarrow 2\alpha_\tau = 2\alpha + \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha_\tau = \alpha + \frac{\pi}{4}$$

co dowodzi twierdzenia, że płaszczyzny ekstremalnych naprężeń stycznych połowią kąty między płaszczyznami naprężeń głównych (ekstremalnych naprężeń normalnych).

Na koniec powiemy, że w przypadku przestrzennych stanów naprężenia są trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny główne na których naprężenia styczne się zerują a naprężenia normalne są ekstremalne (naprężenia główne). Płaszczyzny ekstremalnych naprężeń stycznych i w tym przypadku połowią kąty między płaszczyznami naprężeń głównych.

5.3. Koła Mohra

Stawiamy pytanie: czy wartości naprężeń normalnych i stycznych na dowolnej płaszczyźnie przekroju bryły w punkcie, w którym panuje płaski stan naprężenia określony zadanymi współrzędnymi macierzy naprężeń mogą być całkowicie dowolne czy też muszą przyjmować wartości z pewnego ograniczonego zakresu. Aby odpowiedzieć na to pytanie powrócimy do równań (5.1) oraz (5.2) i zapiszemy je w nieco zmienionej formie:

$$\sigma_v - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_v = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha,$$

a następnie podniesiemy każde z nich do kwadratu i dodamy stronami otrzymując w wyniku końcowym zależność:

$$\left(\sigma_v - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_v^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right)^2. \quad (5.8)$$

Równanie (5.8) pokazuje że, wartości naprężeń normalnych i stycznych dla wszystkich płaszczyzn przekroju bryły w danym punkcie leżą na brzegu koła o promieniu (rys. 5.2).

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

i środka przesuniętym na osi σ_v o wielkość $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$.

Koło to nazywamy kołem Mohra, jest ono graficzną reprezentacją stanu naprężenia w danym punkcie i możemy z niego wyznaczyć wiele interesujących wielkości związanych ze stanem naprężenia.

Na rys. 5.2 pokazane jest koło Mohra w punkcie w którym współrzędne macierzy naprężeń spełniają zależności $\sigma_x > \sigma_y > 0$ oraz $\tau_{xy} > 0$. Punkt K pokazany na tym rysunku, nazywany biegunem koła Mohra, ma współrzędne $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ i pozwala na wyznaczenie kierunków naprężeń głównych.

Łatwo jest dowieść pokazanych na tym rysunku zależności. Ograniczymy się zatem jedynie do udowodnienia, że $\sigma_{max} = OB$ oraz że, $\sigma_{min} = OA$.

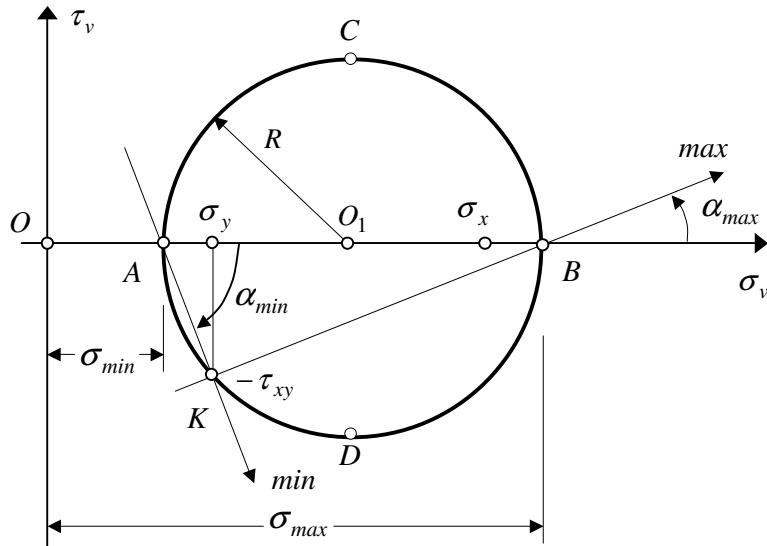
Z rysunku widać, że $OB = OO_1 + R$, a ponieważ:

$$OO_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \text{ a } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}, \text{ więc:}$$

$$OB = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{max} = \sigma_1.$$

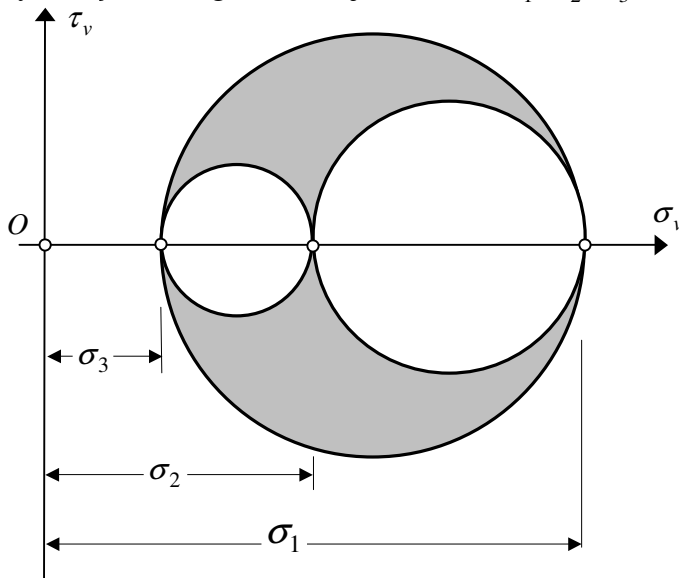
Analogicznie dowodzimy drugą zależność.

Z koła Mohra łatwo odczytujemy wartości ekstremalnych naprężeń stycznych, reprezentują je punkty C i D .



Rys. 5.2

W przestrzennym stanie naprężenia w miejsce jednego mamy trzy koła Mohra, które pokazuje rys. 5.3 na którym zaciemniony obszar to obszar wszystkich możliwych wartości naprężeń normalnych i stycznych w punkcie (graficzna reprezentacja występującego w nim stanu naprężenia) w którym naprężenia główne mają wartości $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.



Rys. 5.3

5.4. Przykłady

Przykład 5.4.1. Wyznaczyć analitycznie i sprawdzić przy pomocy koła Mohra naprężenia główne i ich kierunki w punkcie gdzie dana jest macierz naprężeń w układzie (X,Y)

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -200 & -100 \\ -100 & 50 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Narysować graficzne obrazy macierzy naprężeń w układzie wyjściowym (X,Y) i w układzie kierunków głównych naprężeń $(1,2)$.

Rozwiązanie

Wartości naprężeń głównych:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-200 + 50}{2} + \sqrt{\left(\frac{-200 - 50}{2}\right)^2 + 100^2} = 85.078 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-200 + 50}{2} - \sqrt{\left(\frac{-200 - 50}{2}\right)^2 + 100^2} = -235.078 \text{ MPa}$$

Sprawdzenie :

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \rightarrow -200 + 50 = 85.078 - 235.078 \rightarrow -150 = -150$$

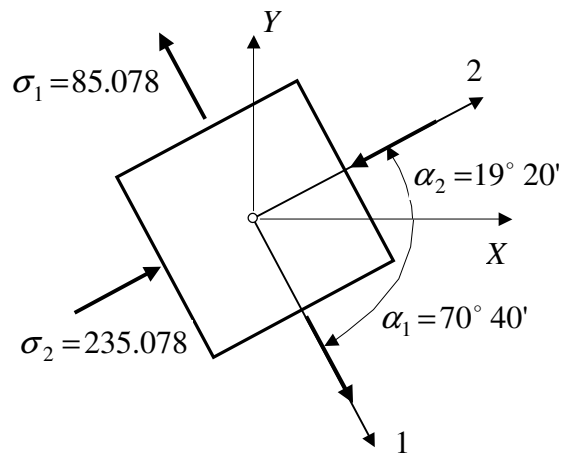
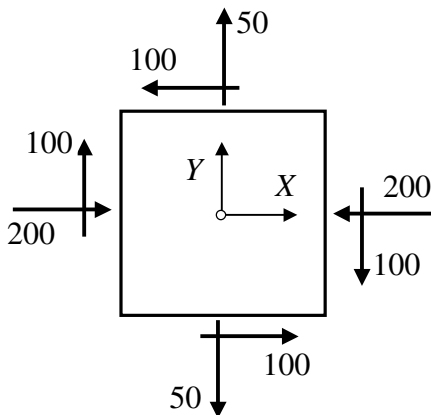
Kierunki naprężeń głównych:

$$\text{tg } \alpha_{max} = \text{tg } \alpha_1 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{max}} = \frac{100}{50 - 85.078} = -2.8508 \rightarrow \alpha_{max} = -70^{\circ} 40'$$

$$\text{tg } \alpha_{min} = \text{tg } \alpha_2 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{min}} = \frac{100}{50 + 235.078} = 0.3508 \rightarrow \alpha_{min} = 19^{\circ} 20'$$

Sprawdzenie :

$$|\alpha_{max}| + |\alpha_{min}| = 70^{\circ} 40' + 19^{\circ} 20' = 90^{\circ}$$



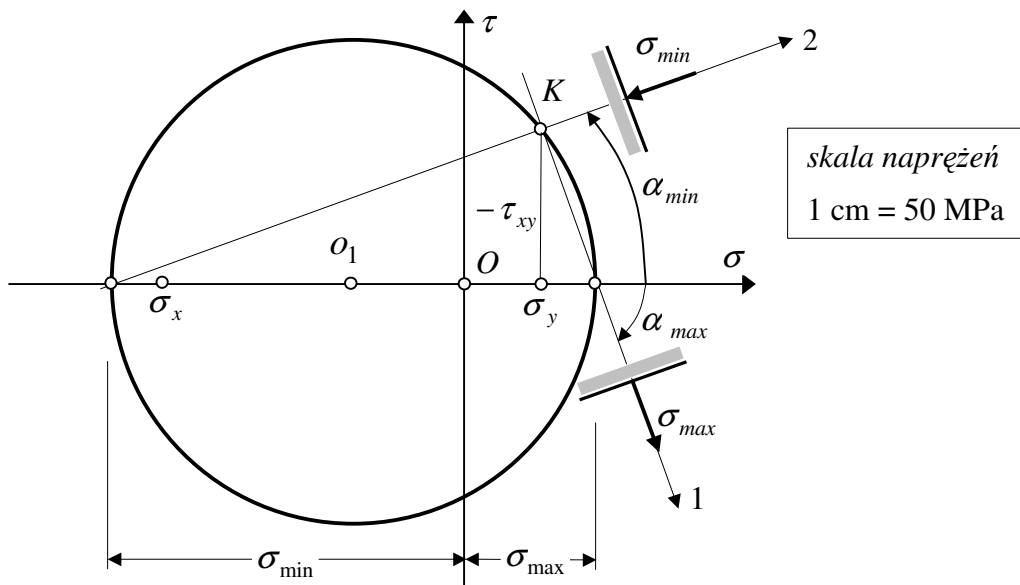
Macierz naprężeń w układzie (X,Y) Macierz naprężeń w układzie kierunków głównych $(1,2)$

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -200 & -100 \\ -100 & 50 \end{pmatrix} \text{ MPa} \qquad T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 85.078 & 0 \\ 0 & -235.078 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Macierz przejścia z układu współrzędnych (X,Y) do układu kierunków głównych $(1,2)$

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} \cos(-70^{\circ} 40') & \sin(-70^{\circ} 40') \\ \cos 19^{\circ} 20' & \sin 19^{\circ} 20' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3311 & -0.9436 \\ 0.9436 & 0.3311 \end{pmatrix}$$

Koło Mohra



Przykład 5.4.2. Wyznaczyć analitycznie naprężenia główne i ich kierunki w punkcie gdzie dana jest macierz naprężeń w układzie (X,Y)

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 100 & 0 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Narysować graficzne obrazy macierzy naprężeń w układzie wyjściowym (X,Y) i w układzie kierunków głównych naprężeń $(1,2)$.

Rozwiązanie

Wartości naprężeń głównych:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = + \sqrt{100^2} = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_{min} = \sigma_2 = - \sqrt{100^2} = -100 \text{ MPa}.$$

Kierunki naprężeń głównych:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\max}} = \frac{-100}{-100} = 1.0 \rightarrow \alpha_{\max} = 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\min}} = \frac{-100}{100} = -1.0 \rightarrow \alpha_{\min} = -45^\circ$$

Zadana macierz naprężeń w punkcie przedstawia tzw. przypadek czystego ścinania. W układzie osi (X, Y) postać tej macierzy wyraźnie uzasadnia tę nazwę.

Przykład pokazuje, że taki stan naprężenia można generować również poprzez naprężenia normalne - rozciągające i ściskające - na prostopadłych do siebie płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° do osi wyjściowych.

