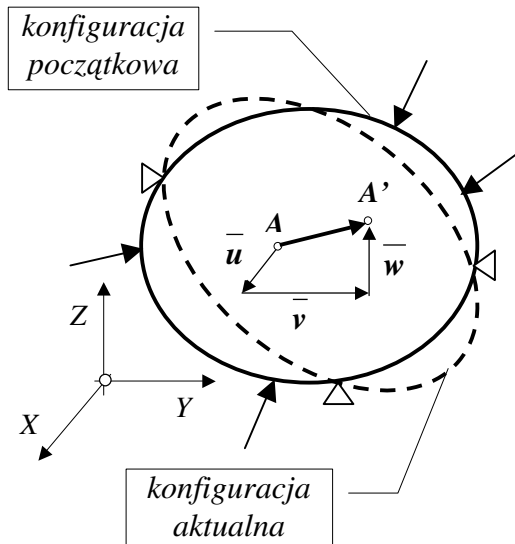


6. TEORIA STANU ODKSZTAŁCENIA

6.1. Wektor przemieszczenia liniowego. Odkształcenia liniowe i kątowe.

Kilkakrotnie już było powiedziane, że przedmiotem naszych rozważań jest ciało odkształcalne, tzn. takie, które pod działaniem sił obciążających lub innych czynników (np. ciepło-wilgotnościowych) zmienia swoje kształty i wymiary. Oznacza to, że punkty tego ciała mogą zmieniają swoje położenie w przestrzeni, przy czym, co wyraźnie należy podkreślić, będzie nas interesować zmiana położenia punktów ciała powstała w wyniku jego deformacji, a nie na skutek jego ruchu jako bryły sztywnej.

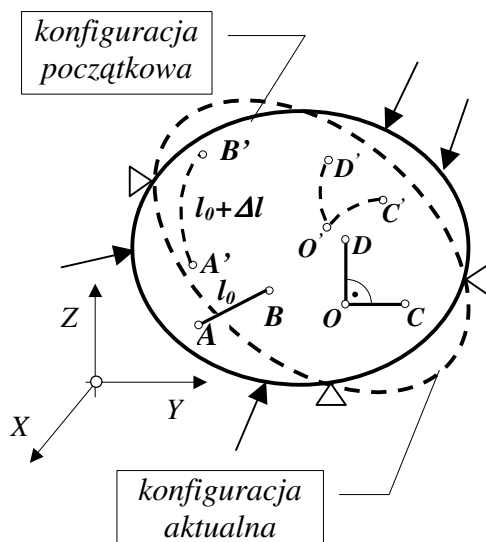


Rys. 6.1

Wektor mający początek w punkcie ciała nie zdeformowanego (w konfiguracji początkowej), a koniec w tym samym punkcie po deformacji (w konfiguracji aktualnej) nazywać będziemy wektorem przemieszczenia liniowego w tym punkcie. Na rys. 6.1 jest to wektor

$\overline{AA'} = \overline{u} + \overline{v} + \overline{w}$. Ponieważ, w ogólności wektory przemieszczenia liniowego w różnych punktach są różne to możemy powiedzieć, że przyłożone obciążenia generują w bryle odkształcalnej wektorowe pole przemieszczeń, którego współrzędne są funkcjami położenia punktu w konfiguracji początkowej $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Taki opis deformacji bryły nazywamy materialnym a współrzędne, współrzędnymi Lagrange'a.

Do oceny wielkości zmian kształtów i wymiarów bryły wygodnie jest zdefiniować pewne ich miary - miary deformacji.



Rys. 6.2

W tym celu rozważmy zachowanie się dwóch punktów A i B które w konfiguracji początkowej odległe były o l_0 , a po przyłożeniu obciążenia długość łączącego ich włókna (linii materialnej) zwiększyła się o Δl (rys. 6.2).

Odształceniem liniowym w punkcie A w kierunku punktu B nazywać będziemy:

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l_0} \quad (6.1)$$

Możemy więc powiedzieć, że odkształceniem liniowym w punkcie w wybranym kierunku nazywamy względny przyrost długości włókna w tym punkcie na skutek przyłożonych obciążeń.

Odształcenie liniowe, które odpowiada wydłużeniu włókna uważamy za dodatnie.

Odształcenie liniowe nazywane też są odkształceniami podłużnymi.

Jeżeli rozważymy dwa prostopadłe włókna przechodzące przez wspólny punkt O w konfiguracji początkowej (rys. 6.2) to ich odkształcenie kątowe definiujemy jako:

$$\gamma_{C O D} = \lim_{C \rightarrow O \text{ i } D \rightarrow O} (C \hat{O} D - C' \hat{O}' D'). \quad (6.2)$$

Zatem odkształceniem kątowym nazywać będziemy kąt o jaki zmieni się w wyniku przyłożonych obciążeń kąt prosty między dwoma włóknami przechodzącymi w konfiguracji początkowej przez wspólny punkt.

Odształcenie kątowe któremu odpowiada zmniejszenie się kąta prostego uważamy za dodatnie.

Odształcenie kątowe nazywane też są odkształceniami postaciowymi.

6.2. Stan odkształcenia w punkcie

Stan odkształcenia w punkcie to nieskończony zbiór odkształceń liniowych i kątowych wszystkich włókien przechodzących przez ten punkt.

Można wyróżnić trzy rodzaje stanu odkształcenia w punkcie: jednoosiowy, płaski i przestrzenny.

Są one związane z wymiarowością modelu ciała, który został przyjęty do rozważań i stąd jednoosiowy stan odkształcenia nie znajduje teoretycznych i praktycznych zastosowań.

W tym miejscu warto podkreślić zasadnicze różnice między pojęciami, które występują w teorii stanu odkształcenia i naprężenia. W definicji odkształceń występuje punkt i określone co do kierunku włókno przez niego przechodzące, a w definicji naprężenia występuje punkt i płaszczyzna o określonej normalnej przechodząca przez ten punkt. Dlatego, mimo, że jak się później okaże identycznego matematycznego formalizmu w obliczeniach, nie wszystkie cechy obu tych stanów mogą być identycznie interpretowane i traktowane.

Mówimy, że znamy stan odkształcenia w analizowanej konstrukcji, jeśli znamy stan odkształcenia w każdym jej punkcie.

6.3. Macierz odkształceń. Graficzny obraz macierzy odkształceń

W dowolnie wybranym punkcie bryły możemy definiować odkształcenia liniowe i kątowe w dowolnych kierunkach, również w kierunkach osi układu odniesienia. Odkształcenia liniowe i kątowe w danym punkcie w kierunkach osi układu zapiszemy w postaci macierzy, którą nazywać będziemy macierzą odkształceń:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Tak więc:

macierz odkształceń w punkcie to uporządkowany zbiór odkształceń liniowych i kątowych trzech włókien przechodzących przez ten punkt i równoległych do osi układu odniesienia.

Macierz uporządkowana jest w ten sposób, że na przekątnej występują odkształcenia liniowe a poza przekątną połówki odkształceń kątowych. Czytelna jest też wymowa indeksów przy odkształceniach.

I tak np. ε_z to odkształcenie liniowe włókna równoległego do osi Z , a γ_{xy} to odkształcenie kątowe włókien równoległych do osi X i Y .

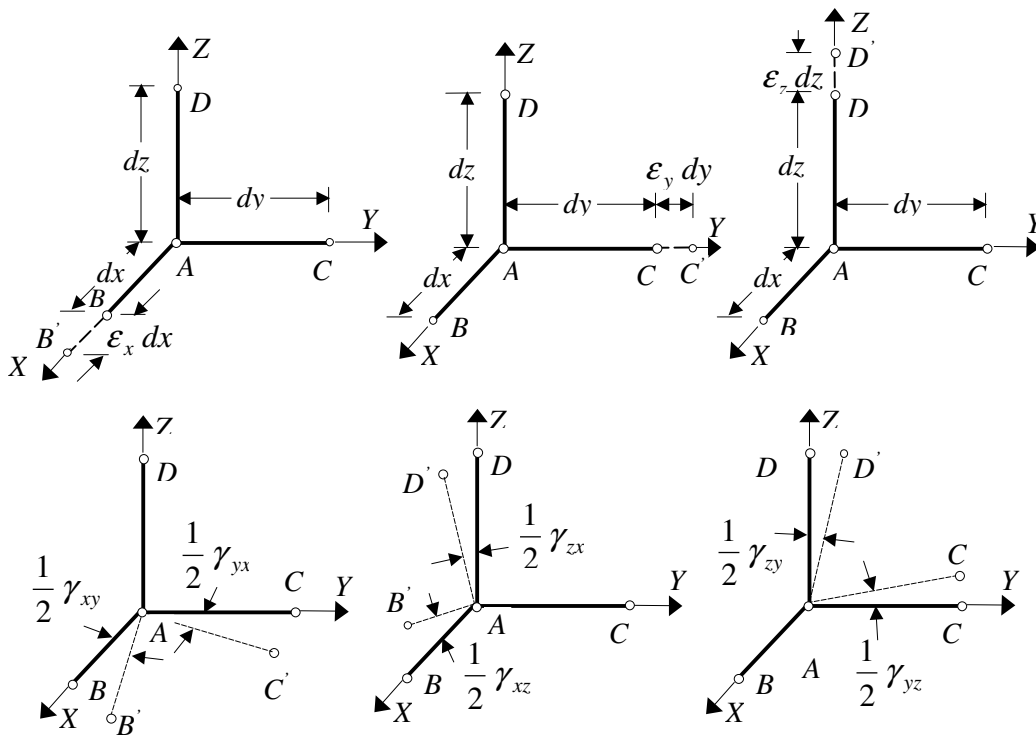
Z definicji elementów macierzy odkształceń wynika jej symetria:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (6.4)$$

Jak się wkrótce przekonamy macierz odkształceń w punkcie będzie podstawą określenia w nim stanu odkształcenia.

Graficzny obraz macierzy odkształceń w punkcie można przedstawić w postaci deformacji przechodzących przez ten punkt trzech wzajemnie do siebie prostopadłych włókien o dowolnie małych długościach $dx=dy=dz=1$, które są równoległe do osi układu współrzędnych (rys. 6.3).

Wszystkie pokazane na rys. 6.3 odkształcenia są dodatnie.



Rys. 6.3

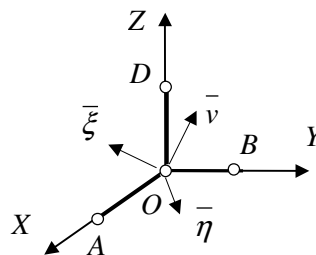
6.4. Tensor odkształceń. Odkształcenia liniowe i kątowe dowolnie zorientowanych włókien

Można dowieść, że macierz odkształceń jest tensorem drugiego rzędu (patrz np. S.Piechnik: Wytrzymałość Materiałów. PWN 1978) co oznacza, że jej elementy transformują się przy zmianie układu odniesienia w pewien ściśle określony sposób zwany prawem transformacji tensora, oraz, że w wyniku mnożenia jej przez jednostkowy wersor $\bar{v}(l,m,n)$ otrzymamy pewien wektor $\bar{e}_v(e_{vx}, e_{vy}, e_{vz})$, który możemy nazwać wektorem odkształcenia¹ określony zależnościami:

$$\bar{e}_v = T_\epsilon \bar{v} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} e_{vx} \\ e_{vy} \\ e_{vz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

¹ J.Więckowski: Wytrzymałość Materiałów. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1975.

I co więcej, znajomość macierzy odkształceń w dowolnym punkcie O (tzn. znajomość odkształceń liniowych i kątowych trzech wzajemnie prostopadłych włókien OA , OB i OC pokazanych przykładowo na rys. 6.4) wystarcza do określenia odkształceń liniowych i kątowych dowolnych włókien przechodzących przez ten punkt, bo własności tensora pozwalają napisać poniższe zależności:



Rys. 6.4

$$\varepsilon_v = (l, m, n) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \frac{1}{2}\gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{v\xi} = (l_1, m_1, n_1) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \frac{1}{2}\gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{v\eta} = (l_2, m_2, n_2) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \frac{1}{2}\gamma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

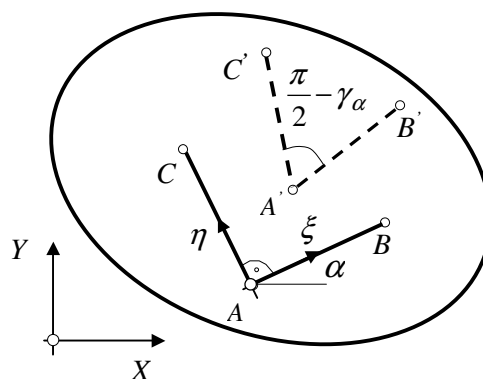
w których: ε_v , $\gamma_{v\xi}$, $\gamma_{v\eta}$ to odkształcenia liniowe i kątowe trzech wzajemnie prostopadłych włókien równoległych do dowolnej ale ortogonalnej trójki wektorów $\bar{v}(l, m, n)$, $\bar{\xi}(l_1, m_1, n_1)$ $\bar{\eta}(l_2, m_2, n_2)$.

Dalsze rozważania przeprowadzimy dla płaskiej tarczy leżącej w płaszczyźnie (X, Y) w której panuje płaski stan odkształcenia.

Wybermy w niej pokazane na rys. 6.5 dwa prostopadłe włókna AB i AC przechodzące przez wspólny, dowolnie wybrany punkt A w którym znana jest macierz odkształceń:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

Kierunki tych włókien są równoległe do dwójki wektorów $\bar{\xi}(l, m)$ i $\bar{\eta}(-m, l)$ nachylonych pod



Rys. 6.5

dowolnym kątem α do osi układu (X, Y) .

Odształcenie liniowe ε_α nachylonego pod kątem α do osi X włókna AB , jak i odkształcenia kątowe γ_α włókien CAB wyznaczamy korzystając ze wzorów (6.6) i (6.7):

$$\varepsilon_\alpha = (l, m) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \left(\varepsilon_x l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m \right) l + \left(\frac{1}{2}\gamma_{yx} l + \varepsilon_y m \right) m = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + 2\frac{1}{2}\gamma_{xy} lm ,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma_\alpha &= (-m, l) \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \left(\varepsilon_x l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m \right) (-m) + \left(\frac{1}{2}\gamma_{yx} l + \varepsilon_y m \right) l = \\ &= (\varepsilon_y - \varepsilon_x)lm + \frac{1}{2}\gamma_{xy}(l^2 - m^2). \end{aligned}$$

Jeśli w powyższych związkach uwzględnimy, że $l = \cos \alpha$, $m = \sin \alpha$ oraz zależności trygonometryczne:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \cos^2 \alpha &= (1 + \cos 2\alpha)/2, \quad \sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2, \end{aligned}$$

to odkształcenia liniowe i kątowe dowolnie zorientowanych włókien wyrażone poprzez współrzędne macierzy odkształceń przedstawiają się następująco:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha, \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_\alpha = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\alpha. \quad (6.11)$$

Zależności te pokazują, że macierz odkształceń w punkcie określa w nim stan odkształcenia, gdyż pozwala na wyznaczenie odkształceń liniowych i kątowych dowolnych włókien przechodzących przez ten punkt.

Z równania (6.10) łatwo można zobaczyć, że:

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha+90^\circ} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \text{ co dowodzi twierdzenia, że suma odkształceń liniowych dwóch}$$

prostopadłych włókien przechodzących przez dowolny punkt jest wielkością stałą, tzn. nie zależy od układu odniesienia. Bardziej formalnie możemy powiedzieć, że suma odkształceń na przekątnej głównej macierzy odkształceń jest niezmiennikiem. Twierdzenie to jest również prawdziwe w przypadku przestrzennego stanu odkształcenia.

6.5. Ekstremalne odkształcenia liniowe i kątowe

Pozostaniemy przy analizie stanu odkształcenia płaskiej tarczy. Zależności (6.10) i (6.11) pokazują, że znajomość macierzy odkształceń w dowolnym jej punkcie pozwala wyznaczyć wartości odkształceń liniowych i kątowych dowolnie zorientowanych włókien przezeń przechodzących. W tej sytuacji naturalne jest postawienie dwóch ważnych zagadnień:

- wyznaczyć włókna których odkształcenia liniowe są ekstremalne i wyliczyć wartości tych odkształceń liniowych,
- wyznaczyć włókna których odkształcenia kątowe są ekstremalne i wyliczyć wartości tych odkształceń kątowych.

Przy rozwiązaniu tych zagadnień wykorzystamy formalną analogię wzorów (5.3) i (5.4) w płaskim stanie naprężenia oraz wzorów (6.10) i (6.11) w płaskim stanie odkształcenia:

$$\sigma_v \rightarrow \varepsilon_\alpha, \quad \tau_v \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_\alpha, \quad \sigma_x \rightarrow \varepsilon_x, \quad \sigma_y \rightarrow \varepsilon_y, \quad \tau_{xy} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy}.$$

Korzystając z tej analogii możemy powiedzieć, że: w każdym punkcie ciała w którym panuje płaski stan odkształcenia można wyróżnić dwa do siebie prostopadłe włókna których odkształcenia kątowe są równe zero a odkształcenia liniowe są ekstremalne. Kierunki tych włókien nazywamy kierunkami odkształceń głównych. Zatem:

odkształcenia główne w danym punkcie to ekstremalne wartości odkształceń liniowych w nim występujących. Są to odkształcenia liniowe dwóch do siebie prostopadłych włókien których odkształcenia kątowe są równe zero.

Wartości odkształceń głównych i ich kierunki określają wzory:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} \quad (6.12)$$

$$\varepsilon_{min} = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-\gamma_{xy}}{2(\varepsilon_y - \varepsilon_{max})}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{min} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-\gamma_{xy}}{2(\varepsilon_y - \varepsilon_{min})} \quad (6.13)$$

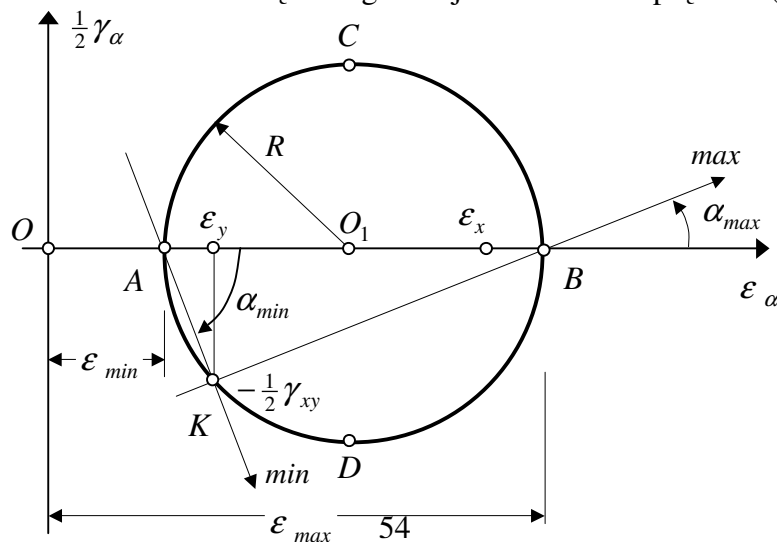
Ekstremalne odkształcenia kątowe wynoszą:

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{2}, \quad (6.14)$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{min} = -\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} = -\frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{2},$$

a kierunki włókien które ich doznają połowią kąty między kierunkami odkształceń głównych. Włókna których odkształcenia kątowe są ekstremalne połowią kąty między włóknami odkształceń głównych.

Koła Mohra dla stanu odkształcenia są analogiczne jak dla stanu naprężenia (rys. 6.6).



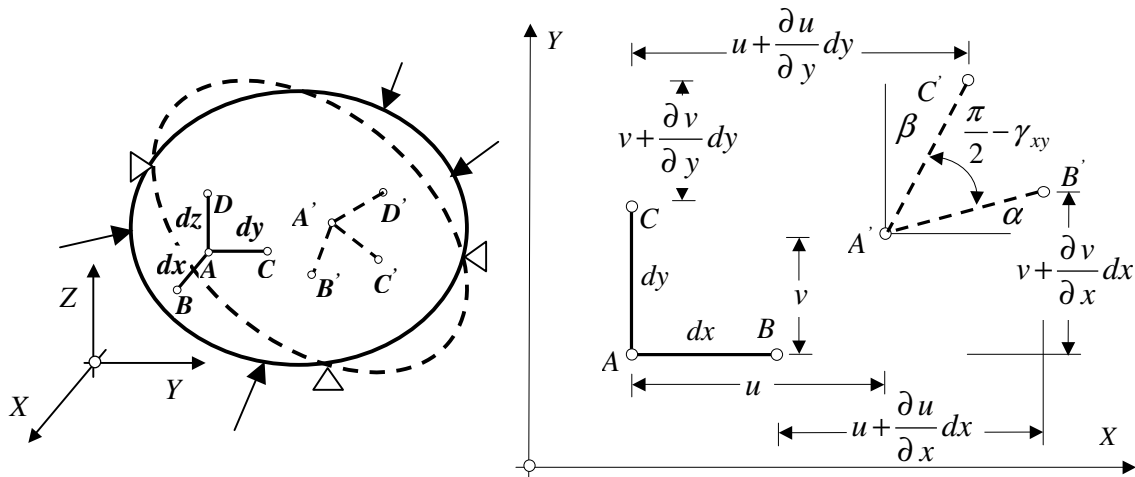
Rys. 6.6

Na koniec powiemy, że w przypadku przestrzennych stanów odkształcenia są trzy wzajemnie prostopadłe włókna których odkształcenia kątowe się zerują a odkształcenia liniowe są ekstremalne (odkształcenia główne). Włókna których odkształcenia kątowe są ekstremalne połowią kąty między włóknami odkształceń głównych.

6.4. Równania geometryczne

Jest rzeczą oczywistą, że między przemieszczeniami i odkształceniami muszą istnieć zależności, nazwiemy je równaniami geometrycznymi.

W celu ich wyprowadzenia rozważmy w bryle w konfiguracji początkowej trzy dowolnie małe, wzajemnie prostopadłe i równoległe do osi układu włókna przechodzące przez dowolnie wybrany punkt A (rys. 6.7).



Rys. 6.7

Rozważmy wpierrw deformacje włókien leżących w płaszczyźnie (X, Y) . Jeśli przyjmiemy, że współrzędne wektora przemieszczenia punktu A są u i v , to - jak pokazano na rys. 6.7- współrzędne wektorów dowolnie bliskich mu punktów będą powiększone o człony zawierające jedynie pierwsze ich pochodne jeśli pominięte będą człony zawierające wielkości dowolnie małe wyższych rzędów.

Zatem odkształcenia liniowe włókien równoległych do osi układu, zgodnie z ich definicją, przyjmą postać:

$$\varepsilon_x = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\Delta dx}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\Delta dy}{dy} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Przejdźmy do wyznaczenia odkształceń kątowych γ_{xy} . Z założenia małych przemieszczeń wynika, że $\text{tg } \alpha \approx \alpha$ oraz $\text{tg } \beta \approx \beta$, a stąd zgodnie z definicją odkształceń kątowych:

$$\gamma_{xy} = \lim_{dx \rightarrow 0 \text{ i } dy \rightarrow 0} (\alpha + \beta) = \lim_{dx \rightarrow 0 \text{ i } dy \rightarrow 0} \left[\frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) - v}{dx} + \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u}{dy} \right] = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

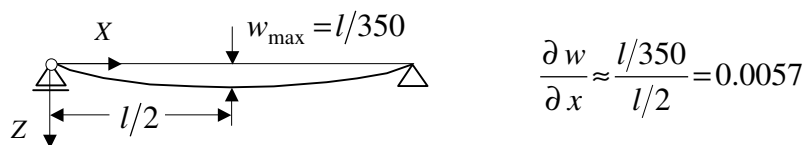
Prowadząc analogiczne rozważania w pozostałych dwóch płaszczyznach ostatecznie otrzymamy związki wiążące odkształcenia z przemieszczeniami w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Widzimy więc, że znajomość pola przemieszczeń konstrukcji, tj. znajomość funkcji $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ pozwala poprzez proste różniczkowanie wyznaczyć macierz odkształceń w dowolnym jej punkcie. I odwrotnie - znajomość odkształceń, poprzez całkowanie, pozwala wyznaczyć pole przemieszczeń, przy czym w tym przypadku muszą być jeszcze określone kinematyczne warunki brzegowe nałożone na analizowaną konstrukcję.

Równania geometryczne (6.9) nazywamy również równaniami Cauchy'ego. Są one słuszne przy założeniu, że przemieszczenia punktów analizowanych konstrukcji są małe (co już założyliśmy przyjmując zasadę zeszytnienia) i małe są również ich pierwsze pochodne.

To drugie ograniczenie w ogólnie występujących konstrukcjach inżynierskich jest powszechnie spełnione co pokazuje poniższy przykład belki. Polska Norma Budowlana PN-90/B-03200 ogranicza maksymalne ugięcie głównej belki stropowej do wielkości $l/350$. Stąd największa wartość pochodnej linii ugięcia wyniesie w przybliżeniu:



Rys. 6.8

6.7. Równania nierozdzielności odkształceń

Łatwo można zauważyć z równań geometrycznych, że trzy odkształcenia w płaskim stanie odkształcenia:

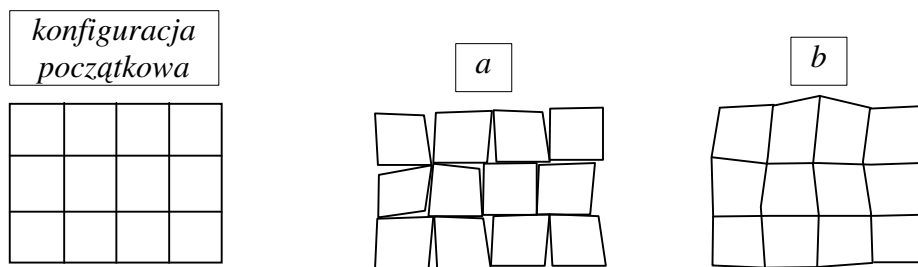
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

wyrażają się poprzez dwie współrzędne wektora przemieszczenia co wskazuje, że odkształcenia są związane jakąś zależnością. Aby ją wyznaczyć zróżniczkujemy każde z nich dwukrotnie z tym, że pierwsze względem y , drugie względem x , trzecie względem x i y a następnie dodajmy stronami otrzymując w wyniku równanie:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.16)$$

które nazwiemy równaniem nierozdzielności odkształceń.

Jego interpretację fizyczną obrazuje rys. 6.9. Z geometrycznej reprezentacji macierzy odkształceń wynika, że w każdym punkcie płaskiej tarczy określa ona deformacje dowolnie małego jednostkowego kwadratu. Jeśli odkształcenia zadane zostaną zupełnie dowolnie to nie będzie zachowanej ciągłości tarczy w konfiguracji początkowej i zdeformowanej jak to obrazuje przypadek *a* na rys. 6.9. Odkształcenia spełniające równania nierozdzielności odkształceń dają konfigurację po deformacji zachowującą ciągłość tarczy jak pokazuje przypadek *b*.



Rys. 6.9

Można więc powiedzieć, że równania nierozdzielności stanowią warunki konieczne, które muszą spełniać funkcje aby mogły być współzrzednymi przemieszczeń.

W przestrzennym stanie odkształcenia jest sześć równań nierozdzielności odkształceń.

6.6. Względna zmiana objętości w punkcie

Rozważmy przestrzenny stan odkształcenia w punkcie, określony poprzez odkształcenia główne. Zatem macierz odkształceń będzie miała postać:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

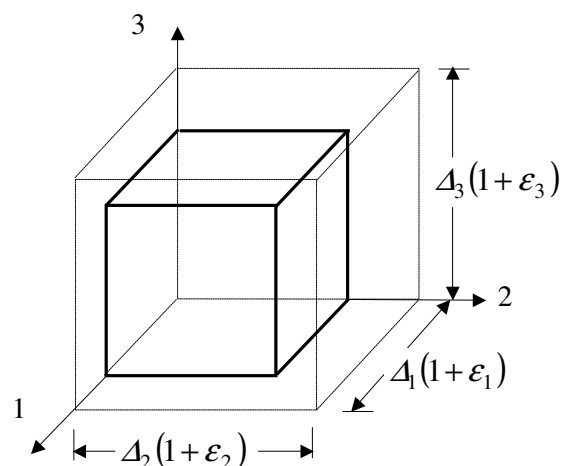
a jej graficzny obraz pokazuje rysunek obok.

Objętość dowolnie małego sześcianu reprezentującego rozważany punkt w konfiguracji początkowej, przedstawia się następująco :

$$V_o = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3.$$

Jego objętość po deformacji wynosi:

$$V = \Delta_1 (1 + \varepsilon_1) \Delta_2 (1 + \varepsilon_2) \Delta_3 (1 + \varepsilon_3)$$



Względną zmianę objętości w punkcie wyznacza granica:

$$D = \lim_{V_o \rightarrow 0} \frac{V - V_o}{V_o} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Po pominięciu iloczynów odkształceń jako małych wyższego rzędu otrzymamy:

$$D = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

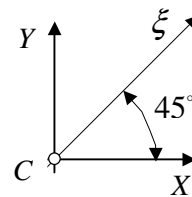
a ponieważ suma odkształceń liniowych jest niezmiennikiem to względna zmiana objętości w punkcie wynosi:

$$D = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (6.19)$$

Wielkość D często nazywana jest dylatacją.

6.8. Przykłady

Przykład 6.8.1. Wyznaczyć odkształcenia główne i ich kierunki w punkcie C płaskiej tarczy w którym wyznaczono przy pomocy tensometrów elektrooporowych odkształcenia liniowe $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\xi$ w trzech kierunkach pokazanych na rys.



Rozwiązanie

Aby zastosować wzory (6.12) i (6.13) potrzebujemy znać γ_{xy} . Wyznamy to odkształcenie kątowe, wykorzystując znane odkształcenie liniowe włókna pod kątem 45°

$$\varepsilon_{\alpha=45^\circ} = \varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 * 45^\circ) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin(2 * 45^\circ)$$

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \rightarrow \gamma_{xy} = 2\varepsilon_\xi - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left[\varepsilon_\xi - \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)\right]^2},$$

$$\varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left[\varepsilon_\xi - \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)\right]^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{max} = -\frac{2\varepsilon_\xi - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2(\varepsilon_y - \varepsilon_{max})}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{min} = -\frac{2\varepsilon_\xi - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2(\varepsilon_y - \varepsilon_{min})}.$$

Układy czujników tensometrycznych do pomiaru odkształceń liniowych w ustalonych kierunkach nazywamy rozetami.

Przykład 6.8.2. Dowieść, że możliwy jest stan odkształcenia w płaskiej tarczy gdy elementy macierzy odkształceń określają zależności

$$\varepsilon_x = k(x^2 + y^2); \quad \varepsilon_y = k y^2; \quad \gamma_{xy} = 2k x y$$

Rozwiązanie

Sprawdzamy równanie nierozdzielności, które stanowią warunki konieczne na to aby dane funkcje mogły określać odkształcenia.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \rightarrow 2k + 0 = 2k$$

Równanie nierozdzielności jest spełnione i możliwy jest stan odkształcenia określony powyższymi funkcjami.

Przykład 6.8.3. Sprawdzić czy poniższe funkcje, mogą być funkcjami odkształceń

$$\varepsilon_x = (x^2 + y); \quad \varepsilon_y = y^2; \quad \gamma_{xy} = 2xy$$

Rozwiązanie

Równanie nierozdzielności odkształceń w tym przypadku daje:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \rightarrow 0 + 0 \neq 2$$

co dowodzi, że powyższe funkcje nie mogą być funkcjami odkształceń.