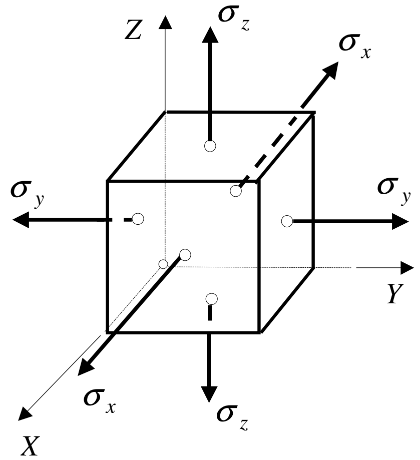
7. RÓWNANIA FIZYCZNE

7.1. Związki między stanem odkształcenia i naprężenia. I i II postać równań Hooke'a

Zależność deformacji bryły od obciążeń zewnętrznych narzuca istnienie zależności między odkształceniami i naprężeniami. Będziemy się starali ustalić te zależności dla przestrzennych stanów odkształcenia i naprężenia. Jest rzeczą powszechnie znaną, że konstrukcje o tej samej geometrii, obciążeniach i więzach, wykonane z różnych materiałów, doznają różnych deformacji więc jest oczywiste, że poszukiwane zależności muszą być oparte na doświadczeniach.

Wyobraźmy sobie dowolnie mały sześcian o ściankach równoległych do płaszczyzn układu współrzędnych i poddajmy go działaniu naprężenia normalnego σ_x, równomiernie rozłożonego na dwóch przeciwległych ściankach. Doświadczenia pokazują, że w przypadku materiału sprężystego i izotropowego naprężenia te nie wywołają żadnych odkształceń kątowych sześcianu, a odkształcenia liniowe będą miały wartości:



Rys. 7.1

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

gdzie: E oraz ν stałe materiałowe noszące odpowiednio nazwy moduł sprężystości (moduł Younga) i liczba Poissona.

Jeżeli nasz sześcian poddamy działaniu jedynie naprężenia normalnego σ_y, równomiernie rozłożonego na dwóch przeciwległych ściankach to wywoła ono jedynie odkształcenia liniowe:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}.$$

I analogicznie, przy działaniu równomiernie rozłożonego naprężenia normalnego σ_z, otrzymamy:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Nasuwa się teraz pytanie, czy w przypadku jednoczesnego działania tych trzech naprężeń liniowe odkształcenia w danym kierunku będzie można przedstawić jako sumę algebraiczną odkształceń przy oddzielnym działaniu tych naprężeń (tzn. jako dodanie do siebie efektów trzech jednoosiowych stanów naprężenia). Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, potwierdzają ją doświadczenia i formułuje zasada superpozycji:

skutek w określonym kierunku, wywołany przez zespół przyczyn działających równocześnie jest równy algebraicznej sumie skutków wywołanych w tym kierunku przez każdą z przyczyn działających oddzielnie.

Należy w tym miejscu podkreślić, że stosowalność zasady superpozycji ograniczona jest dwoma warunkami:

- warunkiem proporcjonalności – wymagającym, aby poszczególne skutki były liniowo zależne od przyczyn, które je wywołały,
- warunkiem niezależności działania – wymagającym, aby żaden ze skutków nie wpływał na sposób działania pozostałych przyczyn.

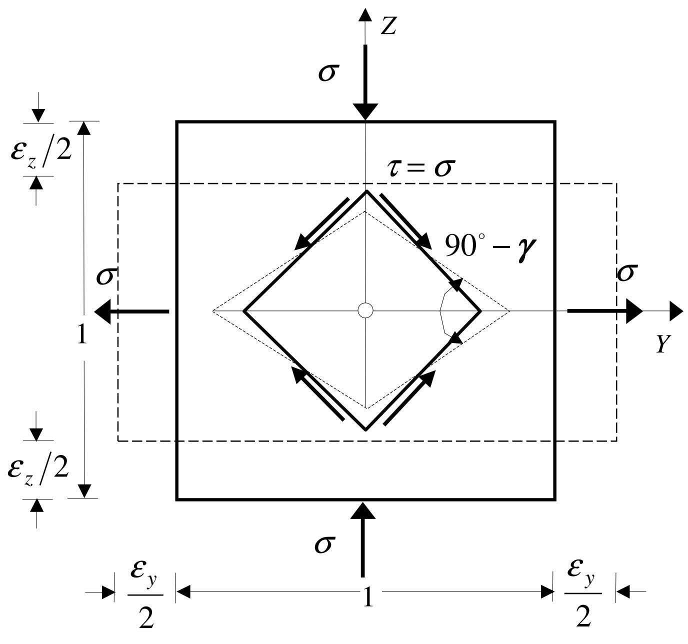
Przyjęte przez nas założenia odnośnie materiału oraz małości przemieszczeń i odkształceń prowadzą do spełnienia tych warunków.
Tak więc, wykorzystując zasadę superpozycji możemy zapisać:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Powyższe równania pokazują, że związki między odkształceniami liniowymi i naprężeniami normalnymi określone są poprzez dwie stałe materiałowe E i ν. Do określenia związków między odkształceniami kątowymi i naprężeniami stycznymi mogą również służyć te same stałe. Aby tego dowieść rozważmy stan naprężenia określony macierzą :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Jest to płaski stan naprężenia w płaszczyźnie (Y, Z) i - jak pokazano na rys. 7.2 - na płaszczyznach nachylonych pod kątem 45 do osi (Y, Z) występują jedynie naprężenia styczne $\tau = \sigma$ (por. przykład 5.4.2).



Rys. 7.2

Odkształcenia liniowe w kierunkach osi układu wynoszą:

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\sigma, \qquad \varepsilon_z = -\frac{1+\nu}{E}\sigma$$

a kątowe jest rowne zeru.
Odkształcenie kątowe γ osi obróconych o kąt 45° wynoszą:

$$\frac{\gamma}{2} = -\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{2}\sin\left(-90^\circ\right) = \frac{1+\nu}{E}\sigma,$$

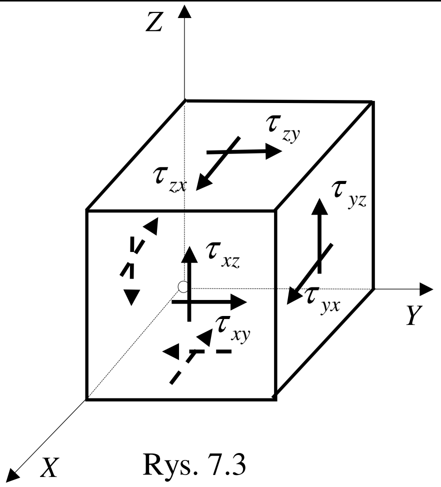
ale $\tau = \sigma$ stąd:

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau.$$

Oznaczając przez $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, ostatecznie możemy zapisać związek między odkształceniem kątowym i naprężeniem stycznym w formie:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{7.2}$$

gdzie stała materiałowa G nazywana jest modułem ścinania lub Kirchhoffa albo modułem sprężystośći poprzecznej.



Rys. 7.3

Powracając do rozważanego na początku sześcianu poddajmy go teraz kolejno działaniu równomiernie rozłożonych naprężeń stycznych pokazanych na rys. 7.3. W przypadku sprężystego ciała izotropowego nie wywołają one odkształceń liniowych a kątowe będą równe:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}. \tag{7.3}$$

Równania (7.1) i (7.3) określające związki między odkształceniami i naprężeniami nazywają się równaniami Hooke'a lub związkami konstytutywnymi lub fizycznymi. Tę postać równań fizycznych w których odkszałcenia są funkcjami naprężeń nazwiemy I postacią równań Hooke'a.

Ponieważ rozważamy materiały z załozenia izotropowe to występują w nich tylko dwie stałe materiałowe które należy wyznaczyć doświadczalnie. Sposób ich wyznaczenia podany zostanie w toku dalszych wykładów.

Udowodnimy teraz ważne twierdzenie: w ciele sprężystym i izotropowym kierunki naprężeń głównych pokrywają się z kierunkami odkształceń głównych.

Dowód: niech osie *X, Y* i *Z* to osie głównych naprężeń. Jeśli tak to naprężenia styczne $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ a dalej z (7.3) $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ co dowodzi, że te osie są osiami odkształceń głównych.

Aby wyprowadzić związki między naprężeniami i odkształceniami należy odwrócić równania (7.1) i (7.3). Odwrócenie tych drugich jest sprawą bardzo prostą. Pierwsze odwrócimy kolejno wykonując:

$$E\,\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z),$$

$$E\,\varepsilon_y = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z),$$

$$E\,\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Dodanie stronami tych trzech równań daje zależność:

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{E}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \tag{7.4}$$

Przekształcamy pierwsze równanie dodając i odejmując po prawej stronie:

$$E\,\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) - \nu\,\sigma_x + \nu\,\sigma_x \quad \rightarrow \quad E\,\varepsilon_x = (1+\nu)\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Wstawienie (7.4) daje:

$\sigma_x = \dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right]$ i postępując analogicznie z następnymi naprężeniami normalnymi dostajemy równania wiążące je z odkształceniami liniowymi.

II postać równań fizycznych Hooke'a :

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] \tag{7.5}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}$$

7.2. III postać równań Hooke'a - prawo zmiany objętości i prawo zmiany postaci

Przyjmijmy na mocy definicji:

$$\varepsilon_m \underset{=}{def} \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}, \quad \sigma_m \underset{=}{def} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{7.6}$$

jako odkształcenie średnie i naprężenie średnie. Przy tych oznaczeniach wzór (7.4) możemy zapisać w formie:

$$\sigma_m = 3K\,\varepsilon_m \tag{7.7}$$

gdzie: $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ jest stałą materiałową i nazywana jest modułem objętościowej ściśliwości sprężystej lub modułem Helmholtza.

Dokonajmy rozkładu macierzy naprężeń na dwie części

$$T_\sigma \quad = \quad A_\sigma \quad + \quad D_\sigma$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix}$$

gdzie:

A_σ - aksjator naprężeń, D_σ - dewiator naprężeń;

i analogicznie macierzy odkształceń:

$$T_\varepsilon \quad = \quad A_\varepsilon \quad + \quad D_\varepsilon$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon_m \end{pmatrix}$$

gdzie:

A_ε - aksjator odkształceń, D_ε - dewiator odkształceń.

Łatwo sprawdzić, że zachodzą poniższe związki między aksjatorami i dewiatorami naprężeń i odkształceń:

$$A_\sigma = 3K\,A_\varepsilon\,, \tag{7.8}$$

$$D_\sigma = 2G\,D_\varepsilon\,, \tag{7.9}$$

które stanowią III postać równań Hooke'a i noszą nazwy prawa zmiany objętości i prawa zmiany postaci.
Uzasadnienie tych nazw nie jest trudne. Działanie aksjatora naprężeń wywołuje jedynie zmianę objętości, a odkształcenia postaciowe są równe zeru. Natomiast pod działaniem dewiatora naprężeń powstają odkształcenia postaciowe, a suma odkształceń liniowych na przekątnej dewiatora odkształceń jest równa zeru, co dowodzi, że nie ma zmiany objętości.
Wróćmy jeszcze do równania (7.7). Wykorzystując, że zmiana objętości jest równa:

$$D = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_m\,,$$

możemy zapisać:

$$D = 3\frac{1-2\nu}{E}\sigma_m\,.$$

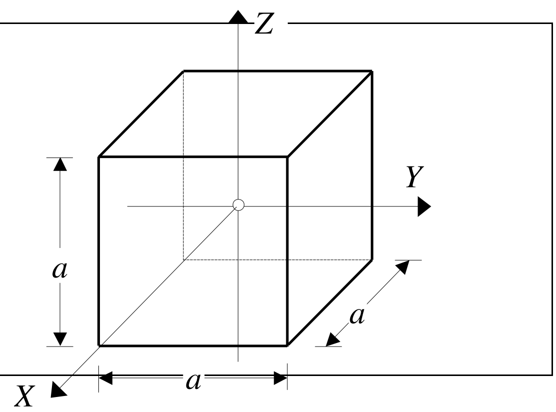
Jeśli $\sigma_m > 0$, to oczywiście $D>0$, a więc musi zachodzić: $1\text{-}2\nu > 0$, czyli $\nu \le \frac{1}{2}$.
Maksymalna zmiana objętości będzie zachodzić dla materiału którego $\nu = 0$, materiał którego $\nu = \frac{1}{2}$ jest nieściśliwy. Guma ma liczbę Poissona bliską 0.5, a korek bliską 0.

7.3. Przykłady

Przykład 7.3.1. Jakie obciążenie sześcianu o boku a wykonanego z materiału spełniającego równania Hooke'a, powoduje przemieszczenia dowolnego jego punktu określone funkcjami:

$$u = -C\,x\,,$$
$$v = -C\,y\,,$$
$$w = -C\,z\,,$$

jeśli stałe materiałowe są równe E i ν.



Rozwiązanie

Z równań Cauchy'ego łatwo wyznaczyć, że odkształcenia liniowe są równe

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -C$$

a odkształcenia kątowe równają się zeru

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$$

Odpowiadające im współrzędne tensora naprężeń są równe

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -BC$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$$

gdzie : $B = \dfrac{E}{(1-2\nu)}$.

Obciążenie ścianek sześcianu wyznaczymy ze statycznych warunków brzegowych.
Ścianki $x = \pm a/2$, współrzędne wersora normalnego zewnętrznego $l = \pm 1, \;\; m = n = 0$.

$$q_{\nu x} = \mp BC, \quad q_{\nu y} = q_{\nu z} = 0 .$$

Ścianki $y = \pm a/2$, współrzędne wersora normalnego zewnętrznego $m = \pm 1, \;\; l = n = 0$.

$$q_{\nu y} = \mp BC, \quad q_{\nu x} = q_{\nu z} = 0 .$$

Ścianki $z = \pm a/2$, współrzędne wersora normalnego zewnętrznego $n = \pm 1, \;\; l = m = 0$.

$$q_{\nu z} = \mp BC, \quad q_{\nu x} = q_{\nu y} = 0 .$$

Tak więc ścianki sześcianu obciążone są równomiernie rozłożonym obciążeniem ściskającym o intensywności *BC*.

Przykład 7.3.2. Dane są funkcje przemieszczeń w konstrukcji wykonanej z materiału liniowo sprężystego:

$$u = (5 + 0.1xy)*10^{-4}\,\text{m}, \; v = (y - 0.1xy)*10^{-4}\,\text{m}, \quad w = \left(x^2 - z^2\right)*10^{-4}\,\text{m},$$

wyznaczyć macierz odkształceń i naprężeń w punkcie $A(-1,\, 2,\, 1)$m, jeśli moduł Younga E = 205 GPa i liczba Poissona ν = 0.3.

Rozwiązanie

Z równań geometrycznych Cauchy'ego wyznaczymy funkcje odksztaceń a po wstawieniu do nich wspólrzędnych punktu *A* otrzymamy wartości występujących w nim odkształceń:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.1y*10^{-4} = 0.2*10^{-4}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = (1.0 - 0.1x)*10^{-4} = 1.1*10^{-4},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -2z*10^{-4} = -2.0*10^{-4},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (0.1x - 0.1y)*10^{-4} = -0.3*10^{-4},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2x*10^{-4} = -2.0*10^{-4}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Macierz odkształceń ma postać:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.15 & -1.0 \\ -0.15 & 1.1 & 0 \\ -1.0 & 0 & -2.0 \end{pmatrix} *10^{-4}.$$

Naprężenia wyznaczymy korzystając z II postaci równań Hooke'a:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] =$$

$$= \frac{205*10^9}{1+0.3}\left[0.2 + \frac{0.3}{1-2*0.3}\left(0.2 + 1.1 - 2.0\right)\right]*10^{-4} = -5.125 \text{ MPa},$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] =$$

$$= \frac{205*10^9}{1+0.3}\left[1.1 + \frac{0.3}{1-2*0.3}\left(0.2 + 1.1 - 2.0\right)\right]*10^{-4} = 9.067 \text{ MPa},$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right] =$$

$$= \frac{205*10^9}{1+0.3}\left[-2.0 + \frac{0.3}{1-2*0.3}\left(0.2 + 1.1 - 2.0\right)\right]*10^{-4} = -39.817 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{205*10^9}{2(1+0.3)}(-0.3)*10^{-4} = -2.365 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{205*10^9}{2(1+0.3)}(-2.0)*10^{-4} = -15.769 \text{ MPa}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0.$$

Macierz naprężeń przedstawia się więc następująco:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.125 & -2.365 & -15.769 \\ -2.365 & 9.067 & 0 \\ -15.769 & 0 & -39.817 \end{pmatrix} \text{ MPa}.$$